OPERE MATEMATICHE

DEL MARCHESE

GIULIO CARLO DE' TOSCHI DI FAGNANO

PUBBLICATE SOTTO GLI AUSPICI

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA PER IL PROGRESSO DELLE SCIENZE

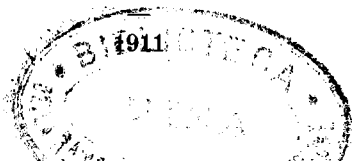
DAI SOCI

V. VOLTERRA, G. LORIA, D. GAMBIOLI

VOLUME SECONDO

che contiene la materia del Tomo II delle "Produzioni Matematiche,,

MILANO-ROMA-NAPOLI
SOCIETÀ EDITRICE DANTE ALIGHIERI
DI
ALBRIGHI, SEGATI E C.

1911

INDICE.

PRODUZIONI MATEMATICHE

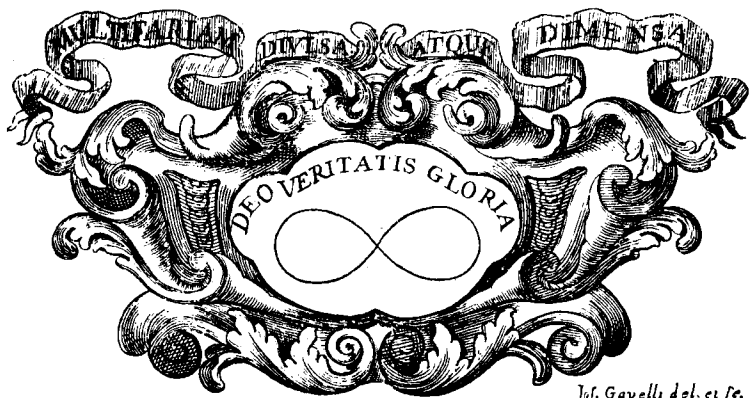
DEL CONTE GIULIO CARLO DI FAGNANO, MARCHESE DE' TOSCHI, E DI SANT' ONORIO

NOBILE ROMANO, E PATRIZIO SENOGAGLIESE

ALLA SANTITA' DI N. S.

BENEDETTO XIV.

PONTEFICE MASSIMO.

TOMO SECONDO.

IN PESARO

L' ANNO DEL GIUBBILEO M. DCC. L.

NELLA STAMPERIA GAVELLIANA

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

CATALOGO DEGLI SCRITTI

CONTENUTI IN QUESTO SECONDO TOMO.

PRODUZIONI MATEMATICHE

DEL MARCHESE

GIULIO CARLO DE' TOSCHI DI FAGNANO

TOMO SECONDO

XIII.

DIVERSE PROPRIETÀ
DEI TRIANGOLI RETTILINEI DIMOSTRATE.

PREFAZIONE.

Ànno i Triangoli rettilinei sì belle Affezioni, che meritano di esser considerate dai Geometri più di quello abbian fatto sinora. Sogliono essi affaticarsi intorno alle Curve, e lodevolmente; ma intanto poco promovono la coltura, dirò così, della Linea retta, che in un certo modo può chiamarsi la più semplice delle Curve paraboliche: quasichè la maggior semplicità d'un oggetto lo rendesse men degno della loro attenzione; e come se la facilità di descrivere la Retta medesima scemasse i di lei pregj; la dove presso ogni equo estimatore piuttosto dovrebbe accrescerli. Mi è pertanto piaciuto di raccorre, e dimostrare diverse proprietà de' suddetti Triangoli, e talvolta di esibirne delle nuove di mia invenzione: lo che potrà riconoscere chi osserverà non solo i Teoremi infrascritti, ma i Corollarj, che da quelli largamente si spargono; mentre per lo più ò scelte Proposizioni generali, e feconde: elleno tanto lo sono, che da una gran parte di loro si vede nascere il famoso Teorema di Pittagora. Ò ancora illustrate con novelle, e varie Dimostrazioni di antiche Verità, persuaso, che molto perfezioni l'Intelletto Geometrico il tentare, e scoprire le vie differenti, che conducono ad una stessa meta. Per altro io non intendo col presente saggio, che di eccitare spiriti più penetranti, e felici ad intraprendere con successo migliore simil fatica. Ove ciò accada, mi stimerò ricompensato ampiamente dell'opera, che in produrre questo piccolo Trattato ò impiegata.

TEOREMA I (fig. 1, e 2), e (fig. 3, e 4), — Sia qualunque angolo rettilineo BAD diviso in due BAC, DAC dalla retta AC, che taglia in C la sottotesa BD; io dico, che

$$(1) \qquad \frac{\sin BAD}{AC} = \frac{BD \sin BAC}{BC, AD}.$$

AVVERTIMENTO. — In questo teorema, e nei due seguenti io prenderò sempre AC pel raggio.

PRIMA DIMOSTRAZIONE (fig. 1, e 2). — Dal punto C si conduca la CI parallela al lato AD, la quale tagli in I il lato AB, e la CK parallela al lato AB, che tagli in K il lato AD. Dallo stesso punto C si calino le normali CE, CF su i rispettivi lati AB, AD, prolungati, quando bisogni.

Essendo AC il raggio, starà CI a CE ($\sin BAC$), come AC a $\sin BIC$ ($\sin BAD$); e perciò $\frac{\sin BAD}{AC} = \frac{\sin BAC}{CI}$. Ma a cagione delle parallele CI, AD sarà $BD.AB::BC.CI = \frac{AD, BC}{BD}$, e questo valore di CI posto nell'equazione precedente la trasforma nell'equazione (1). Il che, ec.

SECONDA DIMOSTRAZIONE (fig. 3, e 4). — Dal punto C si tirino le perpendicolari CE, CF su i respettivi lati AB, AD del triangolo BAD, e dal punto B la perpendicolare BG sul lato AD prolungato se bisogna.

A cagione della comune altezza il triangolo BAD sta al triangolo BAC, come BD a BC, ovvero ponendo in luogo dei triangoli i loro valori; $\frac{1}{2} AD, BG.\frac{1}{2} AB, CE::BD.CB$, e per conseguenza

$$AD, BG, CB = AB, CE, BD, \text{ ed anche } \frac{BG}{AB} = \frac{BD, CE}{BC, AD}.$$

Perchè il raggio è AC, si à $\frac{BG}{AB} = \frac{\sin BAD}{AC}$, e $CE = \sin BAC$, i quali valori sostituiti nell'equazione, che li precede, la mutano nell'equazione (1). Il che, ec.

COROLLARIO. — Dall'ispezione delle figure 1, e 2, come pure dalle figure 3, e 4, e dal tenore de' raziocinj fatti sopra di esse, si rende ma-

nifesto, che

$$\text{(2)} \qquad \frac{sin\,BAD}{AC}=\frac{BD\,sin\,DAC}{DC,\,AB}.$$

TEOREMA II (fig. 1, e 2), e (fig. 3, e 4). — Posto ciò, che si è espresso nell'enunciazione del primo teorema, io dico, che

$$\text{(3)} \qquad \frac{sin\,BAC}{sin\,DAC}=\frac{BC,\,AD}{DC,\,AC}.$$

PRIMA DIMOSTRAZIONE. — La comparazione dell'equazioni (1) e (2) dà questa: $\frac{BD\,sin\,BAC}{BC,AD}=\frac{BD\,sin\,DAC}{DC,AB}$, che conduce visibilmente all'equazione (3) di modo che questo secondo teorema può reputarsi in virtù della presente dimostrazione come un corollario del primo.

SECONDA DIMOSTRAZIONE (fig. 1, e 2). — I triangoli CEI, CFK sono simili, perchè gli angoli in E, e in F sono retti; e gli angoli in I, e in K opposti nel parallelogrammo $CIAK$ (o i loro complementi a due retti) sono eguali. Adunque $CE\ (sin\,BAC).CF\ (sin\,DAC)::CI.CK$. Ma per le parallele CI, AD, la $CI=\frac{BC,\,AD}{BD}$, e per le parallele CK, BA, la $CK=\frac{DC,\,AB}{BD}$; i quali valori di CI, CK surrogati nella precedente analogia, mostrano $sin\,BAC.sin\,DAC::\frac{BC,\,AD}{BD}.\frac{DC,\,AB}{BD}$; e dividendo gli antecedenti pe' conseguenti si ottiene l'equazione (3). Il che, ec.

TERZA DIMOSTRAZIONE (fig. 3, e 4). — L'altezza de' triangoli BAC, DAC essendo comune, essi sono come le loro basi BC, CD; vale a dire

$$\frac{1}{2}AB,\,CE\ \ (sin\,BAC).\frac{1}{2}AD,\,CF\,(sin\,DCA)::BC.CD;$$

cioè $\frac{AB,\,sin\,BAC}{AD,\,sin\,DAC}=\frac{BC}{DC}$, e moltiplicando l'uno, e l'altro membro per $\frac{AD}{AB}$, ne risulta l'equazione (3). Il che, ec.

Corollario. — Se la retta AC divide per metà l'angolo BAD, allora $\sin BAC = \sin DAC$, e l'equazione (3) fa conoscere $AB.AD::BC.CD$. Ma se $AB.AD::BC.CD$, allora $AB, CD = AD, BC$, e per l'equazione (3) $\sin BAC = \sin DAC$, cioè la AC divide per metà l'angolo BAD.

Questo corollario è la proposizione terza del VI libro di Euclide.

Avvertimento. — L'infrascritta equazione (4) sarà ampliata nella prima dimostrazione del teorema XXXVIII.

Teorema III (fig. 1, e 2), e (fig. 3, e 4). — Posto le cose enunciate nel titolo del primo teorema; io dico, che

$$\frac{\sin BAD}{AC} = \frac{\sin BAC}{AD} + \frac{\sin DAC}{AB}. \tag{4}$$

Prima dimostrazione. — Surrogando nell'equazione (1) $BC+CD$ in luogo di BD, si avrà

$$\frac{\sin BAD}{AC} = \frac{\sin BAC}{AD} + \frac{CD \sin BAC}{BC, AD}. \tag{5}$$

Dall'equazione (3) deducesi manifestamente $\frac{CD \sin BAC}{BC, AD} = \frac{\sin DAC}{AB}$. Pertanto l'equazione (5) è la stessa, che l'equazione (4). Il che, ec.

Seconda dimostrazione (fig. 3, e 4). — Egli è evidente, che il triangolo BAD è uguale alla somma dei due triangoli BAC, DAC : e perciò $\frac{1}{2}AD,\ BG = \frac{1}{2}AB, CE\,(\sin BAC) + \frac{1}{2}AD,\ CF\ (\sin DAC)$, e moltiplicando per $\frac{2}{AB, AD}$, $\frac{BG}{AB} = \frac{\sin BAC}{AD} + \frac{\sin DAC}{AB}$. Perchè il raggio è AC, è ancora $\frac{BG}{AB} = \frac{\sin BAD}{AC}$. Adunque sussiste l'equazione (4). Il che, ec.

Corollario I (fig. 3). — Se ambidue gli angoli BAD, BCA sono retti, si rifletta, che $\sin BAD$ è uguale al raggio AC, ed essendo

$$\sin BAC = CE, \text{ e } \sin DAC = CF,$$

l'equazione (4) si trasmuta nell'infrascritta:

$$\frac{AC}{AC} = \frac{CE}{AD} + \frac{CF}{AB}, \tag{6}$$

e perchè in questa ipotesi CE è parallela ad AD, si vede

$$\frac{CE}{AD} = \frac{BC}{BD} = \frac{AB^2}{BD^2},$$

a cagione di AB, media proporzionale tra BC, BD.

Similmente, in questa supposizione CF è parallela ad AB, di maniera che $\frac{CF}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{AD^2}{BD^2}$, mentre AD è media proporzionale tra CD, BD. Adunque l'equazione (6) diventa $\frac{AC}{AC} = \frac{AB^2}{BD^2} + \frac{AD^2}{BD^2} = \frac{AB^2 + AD^2}{BD^2}$, e conseguentemente $BD^2 = AB^2 + AD^2$. Che è la celebre proposizione Pittagorica.

Corollario II (fig. 3). — La stessa Pittagorica proposizione può dedursi dal presente teorema, o piuttosto dal primo in quest'altro modo. Sia BCA un triangolo dato rettangolo in C; dall'estremità A della sua base conducasi la normale AD, che tagli in D il lato BC prolungato, e formi il triangolo rettangolo BAD diviso dalla retta AC in due triangoli BAC, DAC. Dee dunque valere l'equazione (5); e conseguentemente assumendo come sopra la AC in raggio, può sostituirsi in essa equazione la AC per $\sin BAD$, e la CE per $\sin BAC$, dal che ne verrà

$$\frac{AC}{AC} = \frac{CE}{AD} + \frac{CD, CE}{BC, AD}.$$

Si è veduto nel precedente corollario, che $\frac{CE}{AD} = \frac{BC}{BD}$; dunque $\frac{AC}{AC} = \frac{BC}{BD} + \frac{CD, BC}{BC, BD} = \frac{BC^2 + CD, BC}{BC, BD}$. Ora CD, BC è uguale ad AC^2, perchè AC è media proporzionale tra CD, BC; e BC, BD è uguale ad AB^2, per essere AB media proporzionale tra BC, BD. Pertanto l'ultima equazione si riduce a questa $\frac{AC}{AC} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}$, e quindi $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

Corollario III (fig. 3). — Se l'angolo BAC è uguale all'angolo DAC, e di più la retta AC cade perpendicolarmente sopra la sottotesa BD, è

chiaro, che $BC = CD$, ed $AB = AD$; talchè dall'equazione (4) deriva la seguente:

$$\frac{sin\ BAD}{sin\ BAC} = \frac{2\ AC}{AB} = \frac{2\ AE}{AC}, \tag{7}$$

perchè $AB . AC :: AC . AE$. Ma AE è il coseno dell'angolo BAC; dunque l'equazione (7) in se racchiude l'infrascritto teorema.

Il seno di qualunque angolo BAC dato, sta al seno dell'angolo duplo, come il raggio sta al duplo del coseno dell'angolo dato.

Questo medesimo corollario nasce immediatamente anche dal primo teorema, poichè essendo nella presente supposizione $BD = 2\ BC$, dall'equazione (1) vien subito l'equazione (7).

Avvertimento. — Nel primo scolio, che sarà annesso alla nona dimostrazione del sesto teorema, io dimostrerò differentemente i tre precedenti teoremi, cioè primo, secondo, e terzo.

Nell'atto, che io dimostrava questi tre medesimi teoremi, Gio: Francesco mio figliuolo nel suo trattato de' triangoli, che stava componendo, dimostrò in differenti modi il secondo, e il terzo di essi, deducendone delle conseguenze, senza essere punto informato di quelle, che io ne deduceva.

Teorema IV (fig. 5). — Sia qualunque angolo BAD, e due sottotese arbitrarie di esso BD, PR si taglino in C; io dico in primo luogo, che

$$\frac{AB}{AP} = \frac{BD}{PR} \times \frac{CR}{CD}. \tag{8}$$

Io dico in secondo luogo, che

$$\frac{AR}{AD} = \frac{RP}{DB} \times \frac{CB}{CP}. \tag{9}$$

Dimostrazione. — Si tiri dal vertice A dell'angolo dato al punto C d'intersezione la retta AC.

Dall'equazione (2) si deduce $\frac{sin\ PAR}{AC\ sin\ RAC} = \frac{PR}{CR,\ AP}$, e ancora $\frac{sin\ BAD\ (PAR)}{AC\ sin\ DAC\ (RAC)} = \frac{BD}{CD,\ AB}$. Il confronto di queste due equazioni manifesta l'equazione (8). Il che, ec.

Similmente dall'equazione (1) si deduce $\frac{\sin BAD}{AC \sin BAC} = \frac{BD}{CB, AD}$ ed anche $\frac{\sin PAR\,(BAD)}{AC \sin PAC\,(BAC)} = \frac{PR}{CP, AR}$. Il confronto di queste due equazioni mostra l'equazione (9). Il che, ec.

Corollario. — L'equazione (8) moltiplicata per l'equazione (9) fa conoscere $\frac{AB}{AP} \times \frac{AR}{AD} = \frac{CB}{CD} \times \frac{CR}{CP}$.

Teorema V (fig. 6). — Nell'interno dell'area di qualunque triangolo rettilineo BAR prendasi ad arbitrio il punto C, per cui passino le linee AO, BD, RP tirate dai vertici degli angoli A, B, R ai lati opposti, i quali ne rimangono tagliati in O, D, P; io dico, che

$$\frac{CR}{RP} = \frac{CD}{BD} + \frac{CO}{AO}. \tag{10}$$

Dimostrazione. — Applicando a questo teorema il precedente, l'equazione (8) rovesciata fa conoscere

$$\frac{AP}{AB} = \frac{CD, RP}{CR, BD}. \tag{11}$$

Si consideri poscia l'angolo ABR, le di cui sottotese AO, PR si tagliano nel punto C, e si comprenderà, che in virtù dello stesso teorema IV $\frac{BA}{BP} = \frac{AO}{PR} \times \frac{CR}{CO}$, donde viene

$$\frac{PB}{AB} = \frac{CO, RP}{CR, AO}. \tag{12}$$

Si aggiungano l'equazioni (11), e (12), e ne risulterà questa:

$$\frac{AP + PB}{AB} = \frac{CD, RP}{CR, BD} + \frac{CO, RP}{CR, AO},$$

che maneggiata a dovere dà

$$\frac{AB}{AB} = \frac{CD, AO, RP + CO, RP, BD}{CR, AO, BD},$$

e per conseguenza si scopre $CR, AO, BD = CD, AO, RP + CO, RP, BD$, e quindi

$$\frac{CR}{RP} = \frac{CD, AO + CO, BD}{AO, BD}, \tag{13}$$

equazione, che equivale all'equazione (10). Il che, ecc.

Corollario I (fig. 6). — Immaginando, che la superficie triangolare BAR s'aggiri intorno al punto immobile C, in maniera che linea CA succeda nel sito della linea CR, egli è visibile, che sussisterà la seguente equazione:

$$\frac{CA}{AO} = \frac{CP}{RP} + \frac{CD}{BD}. \tag{14}$$

Ed è similmente chiaro, che continuando la suddetta superficie triangolare il suo giro intorno al punto C immobile, in modo che la linea CB subentri nel luogo della linea CR, valerà l'equazione infrascritta:

$$\frac{CB}{BD} = \frac{CO}{AO} + \frac{CP}{RP}. \tag{15}$$

Corollario II (fig. 6). — Aggiungendo insieme le tre equazioni (10), (14) e (15), se ne forma quella, che segue:

$$\frac{CR}{RP} + \frac{CA}{AO} + \frac{CB}{BD} = \frac{2CP}{RP} + \frac{2CO}{AO} + \frac{2CD}{BD};$$

e questa è una nuova, e bellissima proprietà del triangolo.

Corollario III. — Dividendo l'equazione (11) per l'equazione (12) ne proviene:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CD, AO}{CO, BD}. \tag{16}$$

Corollario IV. — Ponendo nell'equazioni (11) e (12) il valore di $\frac{RP}{CR}$ tratto dall'equazione (13) si conseguirà fatte le necessarie operazioni

$$\frac{AP}{AB} = \frac{CD, AO}{CD, AO + CO, BD} \tag{17}$$

$$\frac{BP}{AB} = \frac{CO, BD}{CO, BD + CD, AO}, \tag{18}$$

e queste due equazioni rovesciate, e debitamente trattate, daranno

$$\frac{AB}{AP}=1+\frac{CO, BD}{CD, AO}, \tag{19}$$

$$\frac{AB}{BP}=1+\frac{CD, AO}{CO, DB}. \tag{20}$$

Corollario V (fig. 6). — Sia dato il triangolo ACB rettangolo in C, e sopra la sua base AB sia calata la normale CP, la quale si prolunghi quanto si vuole in R. Si tirino dal punto R alle estremità della base le rette RA, RB: il lato BC del triangolo si continui finchè tagli la AR in D, e l'altro lato AC si continui anch'esso finchè tagli la BR in O; io dico, che sussistono le cinque seguenti equazioni:

$$\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{CD, AO}{CO, BD}, \tag{21}$$

$$\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{CD, AO}{CD, AO+CO, BD}, \tag{22}$$

$$\frac{BC^2}{AB^2}=\frac{CO, BD}{CO, BD+CD, AO}, \tag{23}$$

$$\frac{AB^2}{AC^2}=1+\frac{CO, BD}{CD, AO}, \tag{24}$$

$$\frac{AB^2}{BC^2}=1+\frac{CD, AO}{CO, BD}. \tag{25}$$

Si sostituiscano nell'equazioni (16), (17), (18), (19) e (20) in luogo di AP, e di BP i loro respettivi noti valori $\frac{AC^2}{AB}$, e $\frac{BC^2}{AB}$, e rimarrà dimostrato il presente corollario.

Corollario VI (fig. 6). — L'addizione delle due equazioni (22) e (23) conduce all'infrascritta: $\frac{AC^2+BC^2}{AB^2}=\frac{CD, AO+CO, BD}{CD, AO+CO, BD}$, da cui evidentemente apparisce $AC^2+BC^2=AB^2$. Nuova e leggiadra dimostrazione del teorema Pittagorico.

Corollario VII (fig. 6). — I valori di $\frac{CO, BD}{CD, AO}$, e di $\frac{CD, AO}{CO, BD}$ presi dall'equazione (21), e posti nelle respettive equazioni (24) e (25), le can-

giano in queste due: $\frac{AB^2}{AC^2} = 1 + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2 + BC^2}{AC^2}$, $\frac{AB^2}{BC^2} = 1 + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{BC^2}$, ciascuna delle quali contiene un'altra nuova, ed elegante dimostrazione dello stesso teorema Pittagorico: imperciocchè da ognuna di esse visibilmente si deduce, che AB^2 è uguale ad $AC^2 + BC^2$.

Avvertimento (fig. 7 e 8). — Nell'infrascritto corollario VIII, e negli altri susseguenti, che ne dipendono, la lettera y denota l'unità positiva, o negativa secondo che lo esige la situazione del punto P rispetto ai punti A, e K. Siccome la z significa l'unità positiva, o negativa secondo che richiede il sito del punto P in ordine ai punti B, ed S.

Corollario VIII (fig. 7 e 8). — Sia dato qualunque triangolo rettilineo ACB, la di cui base è AB, e da qualsivoglia punto P entro di essa si tiri al vertice C del triangolo la retta PC prolungata ad arbitrio di là da C, verbi grazia fino al punto R. Dallo stesso punto R si conducano all'estremità della base le rette RA, RB, le quali rimangano tagliate in D, e in O dai respettivi prolungamenti dei lati BC, AC. Indi del vertice C siano tirate alla base (prolungata, se bisogni) le due rette CK, CS, tali, che l'angolo ACK sia eguale all'angolo ABC, e l'angolo BCS sia eguale all'angolo BAC. Io dico, che le due seguenti equazioni sussistono

$$\frac{AB^2}{AC^2 + yAB,\ KP} = 1 + \frac{CO,\ BD}{CD,\ AO}, \tag{26}$$

$$\frac{AB^2}{BC^2 + zAB,\ SP} = 1 + \frac{CD,\ AO}{CO,\ BD}. \tag{27}$$

Sarà facile al lettore di supplir quelle figure, che dovrebbero aver rapporto agli altri casi di questo corollario.

Dimostrazione. — $AP = AK + y\ KP$, e $BP = BS + z\ SP$. Ma la simiglianza dei triangoli ACB, AKC, CSB fornisce queste due proporzioni $AB . AC :: AC . AK = \frac{AC^2}{AB}$; $AB . BC :: BC . BS = \frac{BC^2}{AB}$, i quali valori di AK, e di BS collocati nelle soprascritte espressioni di AP, e di BP somministrano $AP = \frac{AC^2 + y\ AB,\ KP}{AB}$; $BP = \frac{BC^2 + z\ AB,\ SP}{AB}$; e finalmente questi valori di AP, e di BP posti nell'equazioni (19), e (20) producono l'equazioni (26), e (27). Il che, ec.

Corollario IX (fig. 7 e 8). — S'immagini, che il punto P cada infinitamente vicino a B, il punto R cadrà prossimo a D, la CO sarà infinitamente piccola, e la KP equivalerà a KB, cosicchè l' equazione (26) diverrà $\frac{AB^2}{AC^2+y\,AB,\,BK}=1$, ovvero

$$AB^2=AC^2+y\,AB,\,BK. \tag{28}$$

Ed è visibile, che se AB è maggiore di AC, la y sarà $+1$; ma se la stessa AB sarà minore di AC, la y sarà -1.

Corollario X. — Si à per la costruzione $BC^2=AB,\,BS$: laonde aggiungendo al secondo membro dell'equazione (28) quest'espressione $BC^2-AB,\,BS$, essa rimarrà equazione come prima, e debitamente operando apparirà

$$AB^2=AC^2+BC^2+AB\,(y\,BK-BS). \tag{29}$$

La y conserva qui la sua significazione accennata nel fine del precedente corollario.

Corollario XI (fig. 7 e 8). — S'immagini ora, che il punto P cada prossimo ad A, il punto R cadrà infinitamente vicino ad O, la CD sarà infinitamente piccola, e la SP sarà equivalente ad SA. Perciò l'equazione (27) muterassi nella seguente: $\frac{AB^2}{BC^2+z\,AB,\,AS}=1$, cioè

$$AB^2=BC^2+z\,AB,\,AS, \tag{30}$$

ed è evidente, che z dee significare $+1$ quando AB è maggiore di BC, e dee denotare -1, quando la stessa AB è minore di BC.

Corollario XII. — Per la costruzione AC^2 è uguale ad $AB,\,AK$; quindi l'aggiungere AC^2 al secondo membro dell'equazione (30), e il detrarne $AB,\,AK$ nel medesimo tempo, non turba la stessa equazione, che nel debito modo trattata prende questa sembianza:

$$AB^2=BC^2+AC^2+AB\,(z\,AS-AK), \tag{31}$$

e la z qui mantiene il suo significato esposto in fine del corollario antecedente.

Corollario XIII (fig. 7, e 8). — Si aggiungano l'equazioni (28), e (30), e poi dividasi per 2 quella, che ne risulta, e si troverà

$$AB^2=\frac{1}{2}AC^2+\frac{1}{2}BC^2+\frac{1}{2}AB\,(y\,BK+z\,AS). \tag{32}$$

La y, e la z serbano in quest'ultima equazione i loro significati espressi nel fine dei corollarj IX e XI.

Corollario XIV (fig. 7). — Se l'angolo ACB è retto, la AB è maggiore di AC, ed anche di BC: perlocchè secondo le osservazioni fatte in fine dei corollarj IX, e XI, tanto la y, quanto la z esprimono l'unità positiva.

Di più è chiaro, che in questa ipotesi i punti K, ed S coincidono. Conseguentemente $y\,BK-BS=0$, e $z\,AS-AK=0$; adunque ambedue le equazioni (29) e (31) manifestano $AB^2=AC^2+BC^2$, vale a dire s' accordano entrambe a dimostrare la Pittagorica proposizione.

Corollario XV (fig. 7). — Si applichi l'equazione (32) all' ipotesi di ACB retto; la y e la z significheranno parimente l'unità positiva, e la coincidenza dei punti K ed S renderà

$$y\,BK+z\,AS=BK+AK=BS+AS=AB,$$

e la stessa equazione (32) diverrà $AB^2=\frac{1}{2}AC^2+\frac{1}{2}BC^2+\frac{1}{2}AB^2$. Togliendo pertanto $\frac{1}{2}AB$ dall'una, e l'altra parte, indi moltiplicando per 2, otterrassi $AB^2=AC^2+BC^2$. Novella maniera di dimostrare la Pittagorica proposizione.

Corollario XVI (fig. 7, e 8). — Pongasi nel secondo membro dell'equazione (28) in cambio di AB il suo valore $\frac{BC^2}{BS}$, che nasce dalla costruzione, e ne verrà

$$AB=AC^2+\frac{y\,BK,\,BC^2}{BS}. \tag{33}$$

La y qui ritiene il suo significato come nel fine del corollario IX.

COROLLARIO XVII (fig. 7, e 8). — Similmente si ponga nel secondo membro dell'equazione (30) in vece di AB la sua espressione $\frac{AC^2}{AK}$ proveniente dalla costruzione, e si vedrà essere

$$(34) \qquad AB^2 = BC^2 + \frac{z\, AS,\, AC^2}{AK}.$$

La z conserva qui la sua significazione notata in fine del corollario XI.

COROLLARIO XVIII (fig. 7). — Allorchè l'angolo ACB è retto, la y, e la z dinotano ambedue l'unità positiva, secondo quello, che si è avvertito in fine dei corollarj IX, e XI: e coincidendo in questa ipotesi i punti K, ed S, ne segue, che $BK = BS$, e che $AS = AK$; di modo che ambe l'equazioni (33), (34) divengono $AB^2 = AC^2 + BC^2$, e per conseguenza dimostrano la proposizione Pittagorica.

TEOREMA VI (fig. 9, e 10). — Qualunque sottotesa BD dell'angolo dato BAD sia tagliata in C dalla retta AC, che divide in due parti eguali l'angolo dato; io dico, che

$$(35) \qquad AB,\, AD = BC,\, CD + AC^2.$$

DIMOSTRAZIONE I. — Dal punto C si tiri al lato AB la retta CS, che faccia l'angolo BCS eguale a BAC, e conseguentemente l'angolo BSC eguale a BCA.

Si consideri, che in virtù del corollario XV del teorema precedente, e dell'equazione (30) si à $AB^2 = BC^2 + AB,\, AS$; cioè

$$(36) \qquad AB^2 - BC^2 = AB,\, AS;$$

mentre per quello, che si è notato in fine di detto corollario, la z nell'equazione (30) denota l'unità positiva; essendo in ambedue le figure 9, e 10 l'angolo ACB maggiore dell'angolo CAD, cioè dell'angolo eguale CAB, ed essendo per conseguenza AB maggiore di BC.

Si rifletta eziandio, che l'angolo SAC è uguale all'angolo CAD, e l'angolo CSA è il complemento a due retti dell'angolo BSC, eguale per la costruzione all'angolo BCA, il complemento del quale a due retti è l'angolo DCA, cui per conseguenza è uguale l'angolo suddetto CSA.

Dalla somiglianza pertanto dei triangoli SAD, CAD si deduce

$$AD.AC::AC.AS=\frac{AC^2}{AD},$$

e questo valore di AS introdotto nell'equazione (36) rende

$$AB^2-\frac{AB,AC^2}{AD}=BC^2.$$

In oltre pel corollario del secondo teorema abbiamo

$$AB.AD::BC.CD,$$

vale a dire $\frac{AD}{AB}=\frac{CD}{BC}$, e dividendo per quest'ultima equazione la penultima, ne proviene AD, $AB-AC^2=CD$, BC, che trasponendo AC^2, dà l'equazione (35). Il che, ec.

Dimostrazione II (fig. 9, e 10). — Si conduca dal punto C al lato AB la retta CK, che faccia l'angolo ACK eguale ad ABC.

Per la similitudine dei triangoli BAC, CAK, la retta AK è uguale ad $\frac{AC^2}{AB}$; e per la similitudine già dimostrata dei triangoli SAC, CAD, la retta AS è uguale ad $\frac{AC^2}{AD}$; e per conseguenza $\frac{AK}{AS}=\frac{AD}{AB}=\frac{CD}{BC}$, in virtù dell'eguaglianza degli angoli BAC, CAD, e del corollario del secondo teorema.

Facciasi nell'equazione (34) la $z=+1$ (come ò provato, che deve essere), e la stessa equazione (34) dividasi per $\frac{AS}{AK}$: ne verrà pertanto $\frac{AK}{AS}$, $AB^2=\frac{AK}{AS}$, BC^2+AC^2. Nel primo membro di quest'ultima equazione si ponga in vece di $\frac{AK}{AS}$ il suo valore $\frac{AD}{AB}$, e sostituiscasi nel secondo membro in cambio di $\frac{AK}{AS}$ l'altro suo valore $\frac{CD}{BC}$, e la medesima ultima equazione si cangerà nell'equazione (35). Il che, ec.

Dimostrazione III (fig. 9, e 10). — Dal punto C si tiri al lato AD la retta CT in modo che faccia l'angolo DCT eguale all'angolo DAC.

Il triangolo DCT è simile al triangolo DAC, e però

$$TD.CD::CD.AD;$$

ma il corollario del teorema II mostra $CD.AD::BC.AB$; adunque $TD.CD:BC.AB$, e $TD=\frac{BC, CD}{AB}$.

Il triangolo ATC è simile al triangolo ACB; attesochè gli angoli TAC, CAB sono per la supposizione eguali, e l'angolo ATC è il complemento a due retti dell' angolo DTC, come l'angolo ACB è il complemento a due retti dell'angolo DCA eguale in virtù della costruzione all'angolo DTC; adunque $AT.AC::AC.AB$, cioè $AT=\frac{AC^2}{AB}$.

Ora $AD=AT+TD$, e ponendo in vece di AT, e di TD i loro valori testè trovati, si scopre $AD=\frac{AC^2}{AB}+\frac{BC, CD}{AB}$; e moltiplicando per AB, immediatamente apparisce l'equazione (35). Il che, ec.

Dimostrazione IV (fig. 15). — I. Sia formato il parallelogramo $ACBG$, e dal punto A tirata al suo lato BC prolungato la retta AF, che faccia l'angolo FAB eguale all'angolo ACD.

Essendo anche l'angolo ABF eguale al suo alterno BAC, che per l'ipotesi è uguale all'angolo CAD, sarà il triangolo FAB simile al triangolo DCA, e l'angolo in F sarà eguale all' angolo ADC. Avremo pertanto $AC.AD::AB.FB=\frac{AB, AD}{AC}$.

II. L'angolo AFB si è già provato eguale all'angolo ADC, e l'angolo FGA a cagione del parallelogramo è uguale ad ACD; dunque i triangoli AGF, DCA sono simili; quindi

$$AC.CD::AG\,(BC).FG=\frac{BC, CD}{AC},$$

ed $FB=FG+GB\,(AC)=\frac{BC, CD}{AC}+AC$.

III. Si paragonino i due valori di FB trovati nei due precedenti articoli, e si conseguirà $\frac{AB, AD}{AC}=\frac{BC, CD}{AC}+AC$, e la moltiplicazione per AC porterà immediatamente all'equazione (35). Il che, ec.

Dimostrazione V (fig. 15). — Nella figura 15 non si consideri più la retta AG, ma si prolunghi la AF finchè tagli in E la sottotesa BD prolungata, se bisogna.

Nella quarta dimostrazione si è mostrato l'angolo in F eguale all'angolo ADC, ma per le parallele FB, AC lo stesso angolo in $F=CAE$;

adunque $CAE = ADC$, e il triangolo DCA è simile al triangolo ACE; conseguentemente $CD.CA :: CA.CE = \frac{AC^2}{CD}$; e

$$BE = BC + \frac{AC^2}{CD} = \frac{BC,\ CD + AC^2}{CD}.$$

L'angolo in F (conforme ò già espresso) è uguale all'angolo ADC. Per le parallele l'angolo $FBE = ACD$; adunque sono simili i triangoli FBE, DCA, ed à luogo questa proporzionalità

$$FB\left[\frac{AB,\ BD}{AC}\right].BE\left[\frac{BC,\ CD + AC^2}{CD}\right] :: CD.AC;$$

in vigor della quale uguagliando il prodotto degli estremi a quello de' mezzi, si vede nascere l'equazione (35). Il che, ec.

Dimostrazione VI (fig. 16). — Si conduca dal punto A alla sottotesa BD (prolungata se sia d'uopo) la retta AE, che faccia l'angolo $EAB = ADC$.

Il triangolo DCA è simile al triangolo ACE, e l'angolo

$$AEC = DAC = BAC.$$

Si à perciò, come nella quinta dimostrazione, $CD = \frac{AC^2}{CD}$, e

$$BE = \frac{BC,\ CD + AC^2}{CD}.$$

Col raggio BE dal centro B descrivasi un arco di cerchio, che tagli in H la retta AE prolungata; e l'angolo AEC (eguale come ò provato all'angolo CAD, e conseguentemente all'angolo BAC) sarà eguale all'angolo in H: ma l'angolo BAH è uguale all'angolo ACE, perchè il primo di essi angoli è uguale ad $ABC + AEC$ (BAC), e il secondo è uguale ad $ABC + BAC$; adunque i triangoli HBA, ADC sono simili, e vale questa proporzionalità $AD.CD :: BH\left[\frac{BC,\ CD + AC^2}{CD}\right].BA$; e moltiplicando gli estremi, ed i mezzi, si arriva subito all'equazione (35). Il che, ec.

Dimostrazione VII (fig. 16). — Nella figura 16 non si consideri più nè la retta BH, nè la retta AH.

L'angolo BAE è uguale all'angolo BCA, perchè $BAE = BAC + CAE$, e $BCA = CEA(BAC) + CAE$.

Laonde per l'analogia generalmente conosciuta, che passa tra i seni degli angoli, e i lati opposti ai medesimi angoli, si avrà

$$\frac{sin\, BAE\, (sin BCA)}{sin\, AEC\ (sin\, DAC} = \frac{BE}{AB};$$

attesochè nella sesta dimostrazione l'angolo AEC si è mostrato eguale all'angolo DAC. Si avrà parimente

$$\frac{sin\ DCA\ (sin\, BCA)}{sin\, DCA} = \frac{AD}{CD};$$

dividendo la penultima equazione per l'ultima, si vede $1 = \frac{BE, CD}{AB, AD}$;

adunque $\quad AB,\ AD, = BE, CD = \frac{(BC, CD + AC^2)}{CD} \times DC$:

equazione, che equivale alla (35). Il che, ec.

Dimostrazione VIII (fig. 15). — Piacemi d'inferire dal terzo teorema la dimostrazione del presente; si ripigli la figura 15, e si prolunghi verso F il lato AD del triangolo BAD, ne rimarrà tagliato in Q il lato BG prolungato del parallelogramo $ACBG$.

Ora per le parallele si à l'angolo $DQB = DAC = BAC$ (per l'ipotesi); e per le medesime parallele si à $BAC = ABQ$; cosicchè $BQD = ABQ$, e perciò $AQ = AB$, come pure $QD = AB + AD$.

Col raggio BD dal centro B si descriva un arco di cerchio, che tagli in V la DA prolungata. Gli angoli in D, e in V saranno eguali; ma nella quarta dimostrazione si è veduto, che l'angolo in F è uguale all'angolo in D, e perciò gli angoli in F, e in V sono eguali. Quindi immaginando il triangolo BAF iscritto in un cerchio, il punto V sarà nella circonferenza di esso cerchio; e $\frac{1}{2}BV = \frac{1}{2}BD$ è il seno dell'angolo BAV, come anche del suo complemento BAD, e $\frac{1}{2}AF$ è il seno dell'angolo ABG, e del suo eguale BAC.

Ciò posto; dall'equazione (4), maneggiata avvedutamente, si deduce $AB, AD = (AB + AD) \times AC \frac{sin\, BAC}{sin BAD}$, dove ponendo $\frac{1}{2}AF$ in vece di

$sin\, BAC, \frac{1}{2} BD$ in cambio di $sin\, BAD$, e QD in luogo di $AB + AD$, si scopre $AB, AD = \frac{PD, AC, AF}{BD}$.

Per la similitudine de' triangoli DQB, DAC, si vede $\frac{QD}{BD} = \frac{AQ\,(AB)}{AG}$; adunque $AB, AD = \frac{AB, AC, AF}{AG}$; ma i triangoli FGA, FAB sono simili; poichè per la costruzione (veggasi la dimostrazione IV) FAB è uguale ad ACD, cui pel parallelogramo è uguale FGA; dunque $\frac{AF}{AG}$ è uguale ad $\frac{FB}{AB}$; qual espressione di $\frac{AF}{AG}$ introdotta nell'ultima equazione somministra $AB, AD = AC, FB$; e perciò sostituendo per FB il suo valore $\frac{BC, CD}{AC} + AC$, esposto nel secondo articolo della quarta dimostrazione, apparisce l'equazione (35). Il che, ec.

Dimostrazione IX (fig. 15). — Anche dal primo teorema dedurrò la dimostrazione di questo sesto teorema nel seguente modo:

Dall'equazione (1) trattata a dovere si forma quest'altra:

$$\frac{sin BAD}{BD} = \frac{AC\, sin\, BAC}{AD, BC}.$$

In luogo di $sin\, BAD$ si metta $\frac{1}{2} BD$, e in luogo di $sin\ BAC$ pongasi $\frac{1}{2} AF$ (secondo ciò che si è veduto nell'antecedente ottava dimostrazione); come pure in vece di BC scrivasi AG. L'ultima equazione si cangerà in questa: $1 = \frac{AC, AF}{AD, AG}$.

In luogo di $\frac{FA}{AG}$ (per le cose esposte nella dimostrazione precedente) si surroghi $\frac{FB}{AB}$, e si conseguirà $1 = \frac{AC, FB}{AB, AD}$, cioè $AB, AD = AC, FB$; e continuando come sopra, si giungerà prontamente all'equazione (35). Il che, ec.

Scolio I. — I. Il teorema presente può dimostrarsi mediante il terzo teorema, e ridurne la prova alla nona dimostrazione così:

Sostituendo nell'equazione (4) in cambio di $\frac{sin\, DAC}{AB}$ il suo valore $\frac{CD,\, sin\, BAC}{AD,\, BC}$ si ottiene $\frac{sin BAD}{AC} = \frac{sin\, BAC}{AD} + \frac{CD\, sin\, BAC}{BC,\, AD}$, vale a dire $\frac{sin\, BAD}{AC} = \frac{(BC + CD) \times sin\, BAC}{BC,\, AD}$. Equazione, che non differisce dall'equazione (1) impiegata nella nona dimostrazione, perchè $BC + CD$ è lo stesso, che BD.

II. Valendosi del principio, onde dipende la dimostrazione IX, si potrebbero dimostrare elegantemente il I, il II, e il III teorema nella maniera infrascritta.

S'intenda (fig. 19) circoscritto il cerchio al triangolo BAD, continuata la retta AC fino a tagliare detto cerchio in M, e tirate le corde BM, DM.

La simiglianza dei triangoli MBC, DAC facilissima a dimostrarsi, dà $\frac{BC}{BM} = \frac{AC}{AD}$, cioè $1 = \frac{AC,\, BM}{BC,\, AD}$. Laonde se si pone $2\, sin\, BAC$ in cambio della corda BM, che gli è uguale (conforme è noto), si à

$$1 = \frac{AC\, sin\, BAC}{BC,\, AD}.$$

Ma $\frac{2\, sin\, BAD}{BD} = 1$, come parimente è noto: Adunque

$$\frac{2\, sin\, BAD}{BD} = \frac{2\, AC\, sin\, BAC}{BC,\, AD},$$

e debitamente operando $\frac{sin\, BAD}{AC} = \frac{BD\, sin\, BAC}{BC,\, AD}$, che è il primo teorema.

Essendo la corda DM eguale a $2\, sin\, DAC$, se si farà uso della manifesta simiglianza de' triangoli MDC, BAC, e si procederà nella stessa guisa, si avrà del pari $\frac{sin\, BAD}{AC} = \frac{BD\, sin\, DAC}{BC,\, AB}$.

III (fig. 19). La somiglianza dei suddetti triangoli MDC, BAC fa similmente conoscere $\frac{AB}{AC} = \frac{DM}{CD}$, vale a dire $1 = \frac{AC,\, DM}{CD,\, AB}$. Ma nel secondo articolo di questo scolio si è trovato $1 = \frac{AC,\, BM}{BC,\, AD}$; adunque il confronto di queste due equazioni darà $\frac{BM}{DM} = \frac{BC,\, AD}{DC,\, AB}$. Pongasi $2\, sin\, BAC$ in luogo di BM, che gli è uguale, e $2\, sin\, DAC$ in vece dell'eguale DM,

e sarà $\frac{sin\ BAC}{sin\ DAC} = \frac{BC,\ AD}{DC,\ AB}$; che è il secondo teorema.

IV (fig. 19). Pe' triangoli simili MBC, DAC si à

$$AD . AC :: BM . BC = \frac{AC,\ BM}{AD}.$$

E pe' triangoli simili MBC, BAC si à $AB . AC :: DM . CD = \frac{AC, DM}{AB}$.

Adunque $BD = BC + CD = \frac{AC,\ BM}{AD} + \frac{AC,\ DM}{AB}$.

Sostituendo ora $2\,sin\,BAD$ in vece di BD; $2\,sin\,BAC$ in cambio di BM; e $2\,sin\,DAC$ in luogo di DM, vale a dire quantità eguali ad eguali, l'ultima equazione diventa

$$2\,sin\ BAD = \frac{2\,AC}{AD}\,sin\,BAC + \frac{2\,AC}{AB}\,sin\ DAC;$$

e dividendo per $\frac{1}{2}AC$ $\frac{sin\ BAD}{AC} = \frac{sin\ BAC}{AD} + \frac{sin\ DAC}{AB}$. Che è il terzo teorema.

Dimostrazione X (fig. 19). — Darò un'altra dimostrazione di questo teorema mediante il terzo.

Nell'equazione (4) in cambio di $sin\ BAD$, di $sin\ BAC$, e di $sin\ DAC$ si surroghino respettivamente $\frac{1}{2}BD$, $\frac{1}{2}BM$, e $\frac{1}{2}DM$, che sono eguali ad essi seni e ne proverrà $\frac{BD}{AC} = \frac{BM}{AD} + \frac{DM}{AB}$, cioè

$$BD\ (BC + CD) = \frac{AC, DM}{AD} + \frac{AC,\ DM}{AB}.$$

Ma nel quarto articolo del precedente scolio si è mostrato

$$CD = \frac{AC,\ DM}{AB};$$

dunque $BC + CD = \frac{AC, BM}{AD} + CD$; vale a dire $BC = \frac{AC, BM}{AD}$; il che si era già provato nel quarto articolo dello scolio antecedente colla sola considerazione del cerchio della figura 17. Sarà pertanto $\frac{BC}{BM} = \frac{AC}{AD}$.

Ora i triangoli BMA, CMB, essendo simili (perchè gli angoli BAM,

BDM sono eguali come insistenti agli archi BM, DM eguali per l'ipotesi, e l'angolo in M è comune); essendo, dico, simili essi triangoli, ne segue, che $\frac{AB}{AM}$ è uguale a $\frac{BC}{BM}$: perciò se si porrà la prima di queste due frazioni in vece della seconda nell'ultima equazione, si avrà $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AD}$, ed anche $AB, AD = AC, AM = AC^2 + AC, CM$.

In fine i triangoli simili CAB, CDM dànno $AC.BC::CD.CM$ e quindi $AC, CM = BC, CD$; adunque

$$AB, AD = AC^2 + AC, CM = AC^2 + BC, CD.$$

Che è l'equazione (35). Il che, ec.

SCOLIO II. — I. Senza far uso del teorema III, l'equazione soprascritta $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AD}$ viene dall'ispezione del cerchio della figura 19: imperciocchè i triangoli BAM, CAD simili, a cagione degli angoli BAM, CAD eguali per l'ipotesi, e degli angoli AMB, ADM eguali, perchè insistono al medesimo arco AB; i triangoli, dico, simili BAM, CAD somministrano $AB.AM::AC.AD$.

II. Il mio figliuolo Gio: Francesco nel suo trattato de' Triangoli à trovata indipendentemente da me una dimostrazione di questo teorema VI, sanza aver riguardo al terzo teorema, e considerando totalmente il cerchio della figura 19; qual dimostrazione è similissima a quella, che si deduce dal primo articolo di questo secondo scolio.

DIMOSTRAZIONE XI (fig. 19). — Trarrò dal teorema III anche questa dimostrazione.

Considerando primieramente il triangolo BAD, e collocando nella equazione (4) in vece di $\sin BAC$, e di $\sin DAC$ (che sono eguali per l'ipotesi) il loro equivalente $\frac{1}{2} BM$, ne deriva, purchè si operi convenientemente, $\frac{\sin BAD}{AC} = \frac{1}{2} \frac{BM \times \overline{AB + AD}}{AB.\, AD}$.

Considerando secondariamente il triangolo BMD, si avrà pel terzo teorema $\frac{\sin BMD}{MC} = \frac{\sin BMC}{MD} + \frac{\sin DMC}{MB}$.

Mettasi in questa equazione $\sin BAD$ in cambio di $\sin BMD$, perchè l'angolo BMD è completamento a due retti dell'angolo BAD. Vi si metta

eziandio $\frac{1}{2} AB$ in luogo di $sin\, BMC$; $\frac{1}{2} AD$ in luogo di $sin\, DMC$, come pure MB in vece di MD, che per l'ipotesi gli è uguale, e ne risulterà

$$\frac{sin\, BAD}{MC} = \frac{1}{2} \times \frac{AB + AD}{MB}.$$

Quest'ultima equazione si divida per l'altra registrata di sopra, il di cui primo membro è $\frac{sin\, BAD}{AC}$, e si vedrà $\frac{AC}{MC} = \frac{AB,\, BD}{BM^2}$ vale a dire

$$AB,\, BD = \frac{AB \times BM^2}{CM}.$$

Ora la similitudine de' triangoli BMA, CMB, provata nella decima dimostrazione fa conoscere $CM.BM::BM.AM = \frac{BM^2}{CM}$, e però sostituendo nell'equazione penultima in luogo di $\frac{BM^2}{CM}$ il suo valore AM, si arriverà a quest'altra $AB,\, AD = AC,\, AM$; e nel resto si procederà come nella dimostrazione X. Il che, ec.

Dimostrazione XII (fig. 20). — Sul lato AB prolungato (quando occorra) si pigli la AY eguale all'altro lato AD; dal punto Y al punto C conducasi la retta YC; e dallo stesso punto Y si tiri alla AC prolungata la retta YS, tale, che faccia l'angolo CYR eguale all'angolo BAC, e C sia tra A, ed S.

Essendo l'angolo CAD per l'ipotesi eguale all'angolo CAY, il lato AC comune, ed eguali i lati AD, AY; il triangolo CAY sovrapposto al triangolo CAD si adatterà intieramente ad esso, di modo che l'angolo YCS sarà eguale all'angolo DCS, e conseguentemente all'angolo ACB.

In oltre l'angolo CAB è per la costruzione eguale all'angolo CYS, son dunque simili i triangoli CAB, CYS, e l'angolo ABC è uguale all'angolo in S. Perciò

$$AC.CB::CY\,(CD).CS = \frac{BC,\, CD}{AC}, \text{ ed } AS = AC + \frac{BC,\, CD}{AC}.$$

Di nuovo; sono simili anche i triangoli CAB, YAS, perchè ànno l'angolo CAB comune, e l'angolo ABC si è provato eguale all'angolo in S; adunque $AC.AB::AY\,(AD).AS\,(AC + \frac{BC,\, CD}{AC})$; e prendendo il

prodotto degli estremi, e de'mezzi, si scopre $AB, AD = AC^2 + BC, CD$. Che è l'equazione (35). Il che, ec.

Se il lato AB fosse maggiore dell'altro lato AD, allora il punto Y cadrebbe tra A e B: e in tale ipotesi la medesima costruzione si continuerebbe, si farebbero gl'istessi raziocinj, e si giungerebbe alla medesima conseguenza.

Corollario I del VI Teorema (fig. 11 e 12). — Sia il triangolo ABC, la cui base è AB, dal punto A, estremità del suo lato CA, si cali sull'altro lato BC (prolungato se sia d'uopo) la perpendicolare AR, che taglia in R lo stesso lato BC; io dico, che

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \pm 2CR, BC. \tag{37}$$

Ne' segni doppi di questo corollario, il superiore dee riferirsi al caso della figura 11, e l'inferiore al caso della figura 12.

Sul lato BC prolungato si tiri dal punto A la retta AN, che lo tagli in N, e faccia l'angolo RAN eguale all'angolo RAB, ed anche la retta AM, che lo tagli in M, e faccia l'angolo RAM eguale all'angolo RAC; sussisteranno pel presente teorema queste due equazioni:

$$\begin{aligned} AB, AN &= BR, RN + AR^2 \\ AC, AM &= CR, RM + AR^2 \end{aligned} \tag{38}$$

la seconda delle quali sottratta dalla prima esibisce

$$AB, AN - AC, AM = BR, RN - CR, RM$$

cioè per la manifesta eguaglianza di AN, ed AB, di AM, ed AC, di RN e BR, e di RM e CR

$$AB^2 - AC^2 = BR^2 - CR^2,$$

e questa equazione, ponendo in luogo di BR^2 il suo valore

$$BC^2 \pm 2CR, BC + CR^2,$$

si muta nella seguente:

$$AB^2 - AC^2 = BC^2 \pm 2CR, BC,$$

la quale (ove si trasponga AC^2) somministra l'equazione (37).

Corollario II del VI Teorema (fig. 11 e 12). — Se l'angolo CAR è infinitamente piccolo, vale a dire se il punto R cade prossimo al

punto C, cioè se l'angolo ACB differisce infinitamente poco dall'angolo retto, la quantità $\pm 2CR, BC$ come infinitamente piccola, è trascurabile, e conseguentemente l'equazione (37) fa vedere $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Laonde il precedente corollario comprende, e dimostra in un tratto le celebri proposizioni XII e XIII del secondo libro d'Euclide (che coll'ajuto della XLVII del primo ivi si dimostrano), e insieme la stessa proposizione XLVII. cioè il teorema Pittagorico.

SCOLIO III. — Il medesimo teorema Pittagorico deriva immediatamente anche dall'equazione (38), poichè sostituendo in essa la AB in vece della sua eguale AN, e la BR in cambio della sua eguale RN, si vede subito $AB^2 = BR^2 + AR^2$.

Francesco Schooten nel suo Trattato *de concinnandis Demonstrationibus*, ec., in due maniere dimostra il presente sesto teorema. Ma la sua prima dimostrazione suppone la XIII del secondo libro d'Euclide, e la seconda suppone la XLVII del primo, vale a dire la Pittagorica, che entra in tutte le prove (da me finora vedute) delle proposizioni XII e XIII del secondo libro del prelodato Euclide.

Il medesimo Schooten dice nel citato luogo di aver dimostrato diversamente questo teorema nel suo libro intitolato: *Exercitationes Mathematicae*; ma tale dimostrazione da noi non è stata veduta, e neppure le altre, ch'egli dice essere state esibite da altri di questo bellissimo teorema.

TEOREMA VII (fig. 13 e 14). — Sia qualunque angolo BAR diviso in due BAC, DAC dalla retta AO. Dal punto arbitrario B del lato AB si tirino le due rette BO, BR, le quali taglino respettivamente la retta AO in C, e in O, e il lato AR in D, e in R; io dico in primo luogo che

$$\frac{AO}{AC} = \frac{BD, OR}{BR, DC}; \tag{39}$$

io dico in secondo luogo, che

$$\frac{BC}{CD} = \frac{BO, AR}{OR, AD}. \tag{40}$$

DIMOSTRAZIONE. — Pel primo teorema si à $\frac{sin\ BAD}{AC} = \frac{BD\ sin\ DAC}{DC, AB}$, e per lo stesso teorema si à eziandio

$$\frac{\sin BAR\,(BAD)}{AO}=\frac{BR \sin RAO\,(DAC)}{OR,\,AB}.$$

Dividendo la prima di queste due equazioni per la seconda ne viene l'equazione (39). E questa è la prima parte.

Pel secondo teorema $\frac{\sin BAC}{\sin DAC}=\frac{BC,\,AD}{CD,\,AB}$, ed anche

$$\frac{\sin BAO\,(BAC)}{\sin RAO\,(DAC)}=\frac{BO,\,AR}{OR,\,AB}.$$

Adunque $\frac{BC,\,AD}{CD,\,AB}=\frac{BO,\,AR}{OR,\,AB}$: equazione, che tosto conduce all'equazione (40), e questa è la seconda parte.

Corollario I (fig. 13 e 14). — Assumendo l'equazione (40), e componendo si conseguisce $\frac{BD}{CD}=\frac{BO,\,AR+OR,\,AD}{OR,\,AD}$.

Corollario II (fig. 6). — Nell'interno dell'area del triangolo BAR prendasi ad arbitrio il punto C, per cui passino le rette AO, BD, RP tirate dai vertici degli angoli respettivi A, B, R ai lati opposti, i quali ne rimangano tagliati in O, D, P; io dico che

$$\frac{BD}{CD}=\frac{RP}{PC}\times\frac{BO}{OR}; \tag{41}$$

imperciocchè pel presente teorema $\frac{AO}{AC}=\frac{BD,\,OR}{BR,\,DC}$, ed anche $\frac{AO}{AC}=\frac{RP,\,OB}{RB,\,PC}$; due equazioni, che paragonate insieme dànno l'equazione (41).

Corollario III (fig. 13 e 14). — Se la retta AO divide per metà l'angolo BAR, e nello stesso tempo AD è uguale ad AB, egli è manifesto, che ancora BC è uguale a CD, e BD a $2CD$. Perciò l'equazione (39) diviene $\frac{AO}{AC}=\frac{2OR}{BR}$; e quindi considerando quest'equazione a guisa di proporzionalità, si avrà per quel modo di argomentare, che chiamasi generalmente *conversion di ragione* (e ciò quando il punto O è di là da C rispetto ad A); ovvero per quel modo di argomentare, che il Padre

Clavio chiama *division contraria di ragione* (e questo quando il punto O è tra A e C), si avrà, dico $AO.(\pm AO \mp AC)::2OR.(\pm 2OR \mp BR)$; ovvero facendo valere ne' segni ambigui il superiore, ed è pel primo caso, $AO.OC::2OR.OR-BO$. Ma prendendo nei segni dubbiosi l'inferiore ed è pel secondo caso, $AO.OC::2OR.BO-OR$.

Questo corollario, considerato in ordine al primo caso, forma una proposizione, che Schooten prova diversamente nel citato luogo, e l'adopra nella sua prima dimostrazione dell'antecedente sesto teorema.

TEOREMA VIII (fig. 13 e 14). — Sia l'angolo BAR, e tutto il rimanente esposto nell'enunciazione del teorema precedente. Io dico, che

$$\frac{CO}{AC} = \frac{BO, DR}{BR, DA}. \tag{42}$$

DIMOSTRAZIONE. — Ponendo nell'equazione (39) in luogo di BD il suo equivalente $BC+CD$, ne deriva $\frac{AO}{AC} = \frac{BC, OR}{CD, BR} + \frac{OR}{BR}$. Si à in oltre l'equazione manifesta $\frac{AC}{AC} = \frac{BR}{BR}$: laonde sottraendo una di queste due ultime equazioni dall'altra, si ottiene

$$\frac{\pm AO \mp AC}{AC} = \pm \frac{BC, OR}{CD, BR} \pm \frac{OR}{BR} \mp \frac{BR}{BR};$$

vale a dire $\frac{CO}{AC} = \pm \frac{BC, OR}{CD, BR} \mp \frac{BO}{BR}$.

Il superiore de' segni ambigui serve quando C è tra A, ed O, e l'inferiore à luogo quando C è di là da O in ordine ad A.

Sostituiscasi nella precedente equazione in vece di $\frac{BC}{CD}$ il suo valore preso dall'equazione (40), e si troverà $\frac{CO}{AC} = \pm \frac{BO, AR}{BR, AD} \mp \frac{BO}{BR}$, vale a dire $\frac{CO}{AC} = \frac{BO(\pm AR \mp AD)}{BR, AD}$. Equazione, che non è diversa dall'equazione (42). Il che, ec.

AVVERTIMENTO. — In tutti i corollarj del presente teorema si considera (fig. 6) il triangolo BAR col punto C preso ad arbitrio nell'area

interiore di esso, e le rette AC, BC, RC tirate da detto punto C agli angoli A, B, R, le quali prolungate tagliano in O, D, P i respettivi lati del triangolo.

Corollario I (fig. 6). — Ciò posto, io dico, che

$$\frac{BO}{RO}=\frac{PB,\ DA}{PA,\ DR}; \tag{43}$$

imperciocchè pel presente teorema non solo $\frac{CO}{AC}=\frac{BO,\ DR}{BR,\ DA}$; ma ancora

$$\frac{CO}{AC}=\frac{RO,\ PB}{RB,\ PA}; \tag{44}$$

e la comparazione dei due valori di $\frac{CO}{AC}$ esposti nell'equazione (42), e (44) conduce all'equazione (43).

Corollario II (fig. 6). — Dall'equazioni (42), e (44) risultano

$$CO=\frac{BO,\ DR,\ AC}{BR,\ DA}. \tag{45}$$

$$CO=\frac{RO,\ PB,\ AC}{RB,\ PA}. \tag{46}$$

Corollario III (fig. 6). — Concependo, che la superficie triangolare BAC si rivolga intorno il punto fisso C in modo, che la linea CD subentri nel sito della linea CO, è manifesto, che avran luogo le due infrascritte equazioni:

$$CD=\frac{RD,\ PA,\ BC}{RA,\ PB}. \tag{47}$$

$$CD=\frac{AD,\ OR,\ BC}{AR,\ OB}. \tag{48}$$

Corollario IV (fig. 6). — Continui similmente l'area triangolare il suo giro intorno al punto fisso C in maniera, che la linea CP succeda nel luogo della linea CO, e si avranno del pari le due equazioni, che seguono:

$$CP=\frac{AP,\ OB,\ RC}{AB,\ OR}. \tag{49}$$

(50) $$CP = \frac{BP,\ DA,\ RC}{BA,\ DR}.$$

Corollario V (fig. 6). — I. Per ridurre tutto questo a formole analitiche, e alle più semplici, rappresentino f, g qualunque numero positivo intiero, o rotto, e ancora qualsivoglia proporzione. Sia

(51) $$\frac{PA}{PB} = \frac{f}{1}, \text{ e perciò } \frac{PB}{PA} = \frac{1}{f},$$

e sia

(52) $$\frac{DA}{DR} = \frac{g}{1}, \text{ e quindi } \frac{DR}{DA} = \frac{1}{g}.$$

L'espressioni di $\frac{PB}{PA}$, e di $\frac{DA}{DR}$ poste nell'equazioni (43) dànno

(53) $$\frac{OB}{OR} = \frac{g}{f}, \text{ e conseguentemente } \frac{OR}{OB} = \frac{f}{g}.$$

Si à dunque pel modo di argomentare, che il P. Clavio chiama *composizion contraria di ragione*, $\frac{PA}{PA+PB} = \frac{AP}{AB} = \frac{f}{f+1}$;

$$\frac{PB}{PB+PA} = \frac{PB}{BA} = \frac{1}{f+1};\ \frac{DA}{DA+DR} = \frac{AD}{AR} = \frac{g}{g+1};$$

$$\frac{DR}{DR+DA} = \frac{RD}{RA} = \frac{1}{g+1};\ \frac{OB}{OB+OR} = \frac{BO}{BR} = \frac{g}{f+g};$$

$$\frac{OR}{OR+OB} = \frac{RO}{RB} = \frac{f}{f+g}.$$

Ponendo pertanto nell'equazione (45) $\frac{g}{f+g}$ per $\frac{BO}{BR}$, ed $\frac{1}{g}$ per $\frac{DR}{DA}$, e così nell'equazione (46) $\frac{f}{f+g}$ per $\frac{RO}{RB}$, ed $\frac{1}{f}$ per $\frac{PB}{PA}$, ambe esse equazioni faranno egualmente conoscere

(54) $$CO = \frac{1}{f+g} AC.$$

Introducendo nell'equazione (47) $\frac{1}{g+1}$ per $\frac{RD}{RA}$, ed $\frac{f}{1}$ per $\frac{PA}{PB}$; e si-

milmente nell'equazione (48) $\frac{g}{g+1}$ per $\frac{AD}{AR}$, ed $\frac{f}{g}$ per $\frac{OR}{OB}$, sì l'una, come l'altra di dette equazioni dà

$$CD = \frac{f\,BC}{g+1}. \tag{55}$$

Finalmente collocando nell'equazione (49) $\frac{f}{f+1}$ per $\frac{AP}{AB}$, e $\frac{g}{f}$ per $\frac{OB}{OR}$; come pure nell'equazione (50) $\frac{1}{f+1}$ per $\frac{BP}{BA}$, e $\frac{g}{1}$ per $\frac{DA}{DR}$, ambedue le stesse equazioni mostrano del pari

$$CP = \frac{g\,RC}{f+1}. \tag{56}$$

Esempio I (fig. 6). — Se si vuole, che C sia il centro di gravità del triangolo BAR si consideri, che detto centro dee trovarsi nell'intersezione delle due rette; v. g. AO, BD che dividono per metà il triangolo, e conseguentemente tagliano per mezzo in O, e in C i respettivi lati opposti. Adunque per l'equazione (53) la f è uguale alla g, e nell'equazione (52) la g è uguale all'unità, cui per conseguenza è uguale anche la f; e quindi il lato AB è tagliato anch'esso per metà della retta RP. In virtù poi delle tre equazioni (54), (55), e (56) si trova $CO = \frac{1}{2}AC$, $CD = \frac{1}{2}BC$, e $CP = \frac{1}{2}RC$.

Esempio II (fig. 6). — La m denoti qualsivoglia numero positivo intiero, o rotto, e ancora qualunque proporzione. Sia la base BR del triangolo BAR divisa per mezzo in O dalla retta AO, e sia

$$CO = \frac{1}{m}AC.$$

Per l'equazione (55), e per l'ipotesi $f = g$; per l'equazione (54), e per l'ipotesi $CO = \frac{1}{f+g}AC = \frac{2f}{1}AC = \frac{1}{m}AC$. Adunque $f = g = \frac{1}{2}m$. Questo valore di f, e di g introdotto nell'equazioni (51), (52), (55), e (56) fa scoprire $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{2}m$, e parimente $\frac{DA}{DR} = \frac{1}{2}m$, come anche $CD = \frac{mBC}{m+2}$, e $CP = \frac{mRC}{m+2}$.

COROLLARIO VI (fig. 6). — Dalle sette equazioni (43), (45), (46), (47), (48), (49), e (50) nascono respettivamente queste altre sette, cioè

$$1 = \frac{RO}{BO} \times \frac{PB}{PA} \times \frac{DA}{DR}; \quad 1 = \frac{AC}{CO} \times \frac{BO}{BR} \times \frac{DR}{DA};$$

$$1 = \frac{AC}{CO} \times \frac{RO}{BR} \times \frac{PB}{PA}; \quad 1 = \frac{BC}{CD} \times \frac{RD}{RA} \times \frac{PA}{PB}; \quad 1 = \frac{BC}{CD} \times \frac{DA}{RA} \times \frac{OR}{OB};$$

$$1 = \frac{RC}{CP} \times \frac{AP}{AB} \times \frac{OB}{OR}; \quad 1 = \frac{RC}{CP} \times \frac{PB}{AB} \times \frac{DA}{DR},$$

il primo membro delle quali è l'unità, e il secondo membro è una proporzione composta di tre proporzioni, di maniera che conoscendo in ciascuna delle sette ultime equazioni due delle tre proporzioni componenti, si conosce anche l'altra.

ESEMPIO per l'equazione (43) (fig. 6). — Le rette AO, RP dividano per metà gli angoli respettivi A, ed R del triangolo BAR, tagliando in O, e in P i lati opposti ai detti angoli. Sarà pel corollario del secondo teorema $\frac{RO}{BO} = \frac{AR}{AB}$, e $\frac{PB}{PA} = \frac{RB}{RA}$. Se si mettono nell'equazione (43), o nella sua derivativa $1 = \frac{RO}{BO} \times \frac{PB}{PA} \times \frac{DA}{DR}$ i detti valori di $\frac{RO}{BO}$, e di $\frac{PB}{PA}$, ne viene $1 = \frac{AR}{AB} \times \frac{RB}{RA} \times \frac{DA}{DR}$, e conseguentemente $\frac{DA}{DR} = \frac{BA}{BR}$. Laonde pel citato corollario del secondo teorema, anche l'altro angolo B è diviso in due parti eguali dalla retta, che passa per B, e pel punto C, in cui s'intersecano dentro il triangolo le prime due rette AO, RP dividenti gli angoli A, ed R per metà.

COROLLARIO VII (fig. 6). — Esprimano ora H, ed L qualunque numero positivo intiero, o rotto, ed anche qualunque proporzione. Sia $\frac{AC}{CO} = \frac{H}{1}$, e $\frac{BC}{CD} = \frac{L}{1}$.

Dall'equazione (54) nascerà $\frac{f+g}{1} = \frac{H}{1}$, siccome dall'equazione (55) $\frac{g+1}{f} = \frac{L}{1}$. Facendo il debito uso di queste due ultime equazioni, si troverà

$$\frac{f}{1}\left[\frac{PA}{PB}\right] = \frac{H+1}{L+1}; \quad \frac{g}{1}\left[\frac{DA}{DR}\right] = \frac{HL-1}{L+1}, \quad \text{e} \quad \frac{g}{f}\left[\frac{OB}{OR}\right] = \frac{HL-1}{H+1}.$$

Finalmente i due scoperti valori di f, e di g introdotti nell'equazione (56) manifesteranno $\frac{RC}{CP}=\frac{f+1}{g}=\frac{H+L+2}{HL-1}$.

Sia per cagion d'esempio $H=2$, cioè $\frac{AC}{CO}=\frac{1}{2}$, $L=2$, cioè $\frac{BC}{CD}=\frac{2}{1}$, come nel caso, in cui C è il centro di gravità del triangolo BAR. Allora sarà $\frac{f}{1}\left[\frac{PA}{PB}\right]=\frac{2+1}{2+1}=\frac{1}{1}$; sarà $\frac{g}{1}\left[\frac{DA}{DR}\right]=\frac{4-1}{2+1}=\frac{1}{1}$; sarà

$$\frac{g}{f}\left[\frac{OB}{OR}\right]=\frac{4-1}{2+1}=\frac{1}{1},$$

e in fine sarà $\frac{RC}{CP}=\frac{2+2+2}{4-1}=\frac{2}{1}$. Come si è provato nel primo esempio.

Corollario VIII (fig. 6). — Dinotino adesso M, ed N qualsivoglia numero positivo intiero, o rotto, ed ancora qualsivoglia proporzione. Sia $\frac{AC}{AO}=\frac{M}{1}$, ed $\frac{RC}{CP}=\frac{N}{1}$.

L'equazione (54) dà $\frac{f+g}{1}=\frac{M}{1}$, e l'equazione (56) mostra $\frac{f+1}{g}=\frac{N}{1}$. Dalle ultime due equazioni maneggiate a dovere nasce

$$\frac{f}{1}\left[\frac{PA}{PB}\right]=\frac{MN-1}{N+1};\ \frac{g}{1}\left[\frac{DA}{DR}\right]=\frac{M+1}{N+1},\ \text{e}\ \frac{g}{f}\left[\frac{OB}{OR}\right]=\frac{M+1}{MN-1}.$$

Introducendo poscia i valori di f, e di g nell'equazione (55) si scuopre

$$\frac{BC}{CD}=\frac{g+1}{f}=\frac{M+N+2}{MN-1}.$$

Corollario IX (fig. 6). — In fine P, e Q rappresentino qualsisia numero positivo intiero, o rotto, ed anche qualsivoglia proporzione. Abbiasi $\frac{BC}{CD}=\frac{P}{1}$, ed $\frac{RC}{CP}=\frac{Q}{1}$.

L'equazione (55) somministra $\frac{g+1}{f}=P$, e l'equazione (56), $\frac{f+1}{g}=Q$. Le ultime due equazioni ne' debiti modi trattate fanno conoscere

$$\frac{f}{1}\left[\frac{PA}{PB}\right]=\frac{Q+1}{PQ-1};\ \frac{g}{1}\left[\frac{DA}{DR}\right]=\frac{P+1}{PQ-1},\ \text{e}\ \frac{g}{f}\left[\frac{OB}{OR}\right]=\frac{P+1}{Q+1}.$$

Indi surrogando l'espressioni di f, e di g nell'equazione (54), ritrovasi $\frac{AC}{CO}=\frac{f+g}{1}=\frac{P+Q+2}{PQ-1}$.

Teorema IX (fig. 17 e 18). — Dal punto X, che taglia per mezzo la base BR del triangolo BCR sia tirata al vertice C la retta XC; io dico, che

$$BR^2=2CB^2+2CR^2-4CX^2. \tag{57}$$

Si noti, che ne' segni doppj, i quali entreranno nella dimostrazione di questo teorema, il superiore serve pel caso della figura 17, e l'inferiore pel caso della figura 18.

Dimostrazione. — Dal vertice C si cali sulla base BR la normale CH.

Pel primo corollario del teorema VI sussistono queste due equazioni:

$$CB^2=CX^2+BX^2\pm 2XH,\ BX$$
$$CR^2=CX^2+RX^2\mp 2XH,\ RX$$

le quali aggiunte danno

$$CB^2+CR^2=2CX^2+BX^2+RX^2\pm 2XH\times(BX-RX);$$

ma perchè giusta l'ipotesi tanto la BX, quanto la RX è uguale a $\frac{1}{2}BR$, l'ultima equazione si riduce a quest'altra: $CB^2+CR^2=2CX^2+\frac{1}{2}BR^2$, che moltiplicata per 2, indi trasposta forma l'equazione (57). Il che, ec.

Corollario I (fig. 6). — Il centro di gravità di qualsivoglia triangolo BAR sia C, per cui dai vertici degli angoli B, R, A si tirino le rette BD, RP, AO, che tagliano i tre respettivi lati in D, P, ed O; io dico, che

$$BR^2+RA^2+AB^2=3CB^2+3CR^2+3CA^2; \tag{58}$$

imperciocchè ò già provato di sopra, che i punti O, D, e P dividono per mezzo i lati respettivi BR, RA, AB; laonde pel teorema presente abbiamo le tre infrascritte equazioni:

$$BR^2=2CB^2+2CR^2-4CO^2$$
$$RA^2=2CR^2+2CA^2-4CD^2$$
$$AB^2=2CA^2+2CB^2-4CP^2$$

dalle quali aggiunte risulta

$$BR^2+RA^2+AB^2=4\times(CB^2-CD^2)+4\times(CR^2-CP^2)+4\times(CA^2-CO^2).$$

Ò anche dimostrato di sopra, che le rette CD, CP, e CO sono la metà delle respettive rette CB, CR, e CA, e conseguentemente si fa manifesto, che l'ultima equazione equivale all'equazione (58). Il che, ec.

Corollario II (fig. 21). — Sia il cerchio $PZRZ$, e nel suo diametro PR, o nel prolungamento di esso si prendano i due punti A, B ad arbitrio, purchè distino egualmente dal centro C; io dico, che se dagl'istessi due punti si condurranno a qualunque punto Z della circonferenza le rette AZ, e BZ, la somma de' quadrati di esse sarà una quantità costante.

Imperciocchè per questo teorema $AB^2 = 2AZ^2 + 2BZ^2 - 4CZ^2$, cioè ponendo PR^2 in vece di $4CZ^2$, e debitamente operando

$$\frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}PR^2 = AZ^2 + BZ^2, \tag{59}$$

ed essendo costante il primo membro di quest'equazione, lo è anche il secondo.

Corollario III (fig. 21). — Immaginando, che il punto A cada in P, e il punto B in R; allora l'equazione (59) mostra $PR^2 = PZ^2 + RZ^2$. Ma nella presente ipotesi è chiaro, che l'angolo ABZ è retto, ed è chiaro altresì, che circoscrivendo ad un triangolo rettangolo il cerchio, la base di quello è il diametro di questo: adunque rimane dimostrato d'una nuova maniera il teorema Pittagorico, e questa dimostrazione è legittima, perchè la stessa Pittagorica proposizione non è stata usata da me per giungere alla dimostrazione di questo teorema, e del suo secondo corollario.

Corollario IV (fig. 22). — Se il triangolo BCR si considera come la metà del parallelogramo $BCRH$ tanto BX, quanto XR sono metà della diagonale BR, e CX è metà dell'altra diagonale CH; perciò nell'equazione (57) si surroghi CH^2 in cambio di $4CX^2$, e trasponendo vedrassi

$$BR^2 + CH^2 = 2CB^2 + 2CR^2, \tag{60}$$

che è il teorema del Sig. Lagnì inserto nelle Memorie dell'Accademia delle scienze di Parigi per l'anno 1706; ma ivi dimostrato mediante la proposizione Pittagorica.

Corollario V (fig. 22). — È visibile, che se il parallelogramo $BCRH$ sarà rettangolo, la diagonale CH sarà eguale all'altra BR, e l'equazione (60) divisa per 2 diverrà $BR^2 = CB^2 + CR^2$: altra deduzione del Pittagorico teorema.

Scolio IV. — I. Questo IX teorema, ed anche il teorema VI saranno corollarj del seguente teorema X, ma prima giudico a proposito d'inferire dal teorema III la famosa proprietà del Quadrilatero iscritto nel cerchio, la quale nella sua universalità comprende quella del triangolo rettangolo trovata da Pittagora.

Sia (fig. 23) $BAMD$ questo quadrilatero, colle sue diagonali BD, ed AM, dee provarsi, che

$$(61)\qquad BD,\, AM = MD,\, AB + BM,\, AD.$$

Dal punto A si cali sulla diagonale BD la retta AQ, che faccia l'angolo BAQ eguale all'angolo DAM, e conseguentemente l'angolo DAQ eguale all'angolo BAM.

Essendo anche l'angolo ABQ eguale all'angolo AMD, i triangoli AQB, AMD sono simili, e l'angolo AQB eguale all'angolo ADM.

Il teorema III somministra

$$(62)\qquad \frac{sin\ BAD}{AQ} = \frac{sin\ BAQ}{AD}\,(sin\ MAD) + \frac{sin\ DAQ}{AB}\,(sin\ BAM)$$

ovvero introducendo in vece di $sin\ BAD$, di $sin\ MAD$, e di $sin\ BAM$ i respettivi loro valori $\frac{1}{2}BD$, $\frac{1}{2}MD$, e $\frac{1}{2}BM$; $\frac{BD}{AQ} = \frac{MD}{AD} + \frac{BM}{AB}$ e moltiplicando per AD, AB, $\frac{BD,\, AB,\, AD}{AQ} = MD,\, AB + BM,\, AD$; ma per la simiglianza de' triangoli ABQ, AMD, si à $AQ . AB :: AD . AM = \frac{AB,\, AD}{AQ}$, e ponendo nel primo membro della penultima equazione AM in cambio di questo suo valore, ne risulta l'equazione (61). Il che, ec.

II. Ove l'angolo BAD sia retto, ed uno dei due angoli ABM, ADM sia parimente retto, ambe le diagonali BD, AM sono diametri del cerchio, e perciò tutti e quattro gli angoli del quadrilatero $BADM$ sono retti, ed esso è un parallelogramo rettangolo; laonde le due corde opposte BM, ed AD sono tra loro eguali, come pure le altre due corde opposte MD, ed AB. In questa supposizione la AQ è normale a BD; perchè nel primo articolo si è provato l'angolo AQB eguale all'angolo ADM.

Si sostituiscano ora nell'equazione (61) in cambio di AM, di MD, e di BM le respettive rette eguali BD, AB, ed AD, e si avrà

$$BD^2 = AB^2 + AD^2,$$

che è la proposizione Pittagorica.

La stessa proposizione può dedursi ancora così:

In questa supposizione $DAM = ADQ$ per l'egualità delle corde MD ed AB; adunque BAQ, che per la costruzione è uguale a DAM, sarà eguale all'angolo ADQ.

Così per l'eguaglianza delle corde BM, ed AD l'angolo BAM nell'ipotesi presente è uguale all'angolo ABQ; ma DAQ in virtù della costruzione è uguale a BAM, adunque DAQ è uguale ad ABQ; quindi nella supposizione dell'angolo BAD retto l'equazione (62) può rappresentarsi in questa guisa:

$$\frac{\sin BAD}{AQ} = \frac{\sin BAQ}{AD}(\sin ADQ) + \frac{\sin DAQ}{AB}(\sin ABQ)$$

e risolversi in quest'altra equazione $\frac{BD}{2AQ} = \frac{AB}{2AD} + \frac{AD}{2AB}$; ma per la simiglianza de' triangoli AQB, AMD mostrata nel primo articolo

$$AQ.AB::AD.AM\ (BD)$$

adunque $2BD, AQ = 2AB, AD$; e moltiplicando la penultima equazione per quest'ultima, si ottiene $BD^2 = AB^2 + AD^2$.

III. Ecco un'altra maniera di valersi del teorema III per dimostrare la proprietà suddetta del quadrilatero iscritto nel cerchio (fig. 23).

Sia la corda MD prolungata di là da D, si tiri la retta AV che la tagli in V, e faccia l'angolo DAV eguale all'angolo BAM, e conseguente $MAV = BAD$.

Frattanto si noti, che essendo in oltre l'angolo AMD eguale all'angolo ABD, i due triangoli MAV, BAD sono simili. Si applichi adesso il teorema III al triangolo MAV, e si troverà

$$\frac{\sin MAV}{AD} = \frac{\sin MAD}{AV} + \frac{\sin VAD}{AM}(\sin BAM).$$

Si pongano $\frac{1}{2}MV$, $\frac{1}{2}MD$, e $\frac{1}{2}BM$ in luogo de' respettivi $\sin MAV$, $\sin MAD$, e $\sin BAM$, e ne verrà $\frac{BD}{AD} = \frac{MD}{AV} + \frac{BM}{AM}$, e moltiplicando

l'uno, e l'altro membro per AM, AD, sarà

$$AM, BD = \frac{MD, AM, AD}{AV} + BM, AD.$$

Ma per la similitudine de' triangoli MAV, BAD provata nel principio di questo articolo $AV.AM::AD.AB = \frac{AM, AD}{AV}$; adunque se si surroga nel secondo membro dell'ultima equazione la AB in vece del suo valore espresso nell'ultima, si conseguisce l'equazione (61). Il che, ec.

Teorema X (fig. 23). — La base BD del triangolo BAD sia tagliata in O dalla retta AO, che divide l'angolo del vertice A in due parti; io dico che

$$AO^2 + BO, OD = \frac{AB^2, OD + AD^2, BO}{BD}. \tag{63}$$

Dimostrazione. — I. Al triangolo BAD sia circoscritto il cerchio $BADM$, che dalla retta AO prolungata sia tagliato in M. Dallo stesso punto M si tirino alle estremità della base le corde MB, ed MD, la seconda delle quali prolungata di là da D sia tagliata in V dalla retta AV, che col lato AD fa l'angolo DAV eguale all'angolo BAO.

II. La nota simiglianza dei triangoli AOD, BOM fa conoscere

$$AO.OD::BO.OM = \frac{BO, OD}{AO},$$

come pure $AO.AD::BO.BM = \frac{BO, AD}{AO}$.

La simiglianza egualmente nota de' triangoli AOB, DOM mostra

$$AO.AB::OD.MD = \frac{AB, DO}{AO}.$$

E la simiglianza de' triangoli BAD, MAV notata nell' articolo III del precedente scolio fa vedere $BD.AB::MV(MD+DV).AM$; adunque

$$BD, AM = AB, MD + AB, DV. \tag{64}$$

Nel medesimo terzo articolo dello scolio antecedente si è notata ancora la similitudine de' triangoli BAM, DAV; perciò

$$AB.BM\left[\frac{BO, AD}{AO}\right]::AD.DV = \frac{AD^2, BO}{AB, AO}.$$

III. Si sostituisca nell' equazione (64) in vece di AM il suo valore $AO+OM\left[\frac{BO,\ OD}{AO}\right]$; in vece di MD il suo valore $\frac{AB,\ OD}{AO}$, e in vece di DV il suo valore testè registrato, e ne risulterà la seguente:

$$BD\times AO+\left[\frac{BO,\ OD}{AO}\right]=\frac{AB^2,\ OD}{AO}+\frac{AD^2,\ BO}{AO}$$

che moltiplicata per $\frac{AO}{BD}$ diviene l'equazione (63). Il che, ec.

Corollario I (fig. 23). — Considerando l'equazione (64) alla quale speditamente son pervenuto, e collocando in essa per $AB,\ DV$ il suo valore $AD,\ BM$ preso dalla proporzionalità segnata in fine del secondo articolo della dimostrazione, si vede subito $BD,\ AM=AB,\ MD+AD,BM$; con che resta semplicissimamente dimostrata la proprietà del quadrilatero iscritto nel cerchio, la quale ò diversamente, e in due modi provata nell'antecedente scolio.

Corollario II (fig. 23). — Se il triangolo BAD è isoscele, l'equazione (63) diventa

$$AO^2+BO,\ OD=\frac{AB^2}{BD}\times(OD+BO),$$

vale a dire

$$AO^2+BO,\ OD=AB^2.$$

Corollario III (fig. 25). — Sia BAD qualunque triangolo, che abbia i lati AB, ed AO disuguali; dal punto A come centro, e col raggio AD eguale al maggiore de' lati AB, si descriva un arco di cerchio, che tagli in D la base BO prolungata; io dico che

$$AB^2=AO^2+BO,\ OD. \tag{65}$$

Questo corollario nasce evidentemente dall'altro, che lo precede; attesochè il triangolo BAD è isoscele per la costruzione e la retta AO, che divide in due parti l'angolo BAD, taglia in O la BD base del triangolo BAD.

Corollario IV (fig. 25). — Se il triangolo BAO è rettangolo in O, è manifesto, che OD è eguale a BO, e quindi l'equazione (65) si cangia in questa: $AB^2=AO^2+BO^2$, e prova di bel nuovo il Pittagorico teorema.

Corollario V (fig. 23). — Se la la base BD del triangolo BAD è tagliata per mezzo in O, pongasi nell'equazione (63) $\frac{1}{2}BD$ in cambio di BO, e di OD, e si trasformerà in questa: $AO^2+\frac{1}{4}BD^2=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AD^2$, cioè $BD^2=2AB^2+2AD^2-4AO^2$; e questo è il teorema IX.

Corollario VI (fig. 23). — Se BO, OD, ed AO sono tutte e tre eguali, è chiaro, che il triangolo BAD è rettangolo in A. Si surroghi pertanto nell'equazione (63) in vece di AO^2 il suo eguale $\frac{1}{4}BD^2$, e in vece di BO, o di OD il loro eguale $\frac{1}{2}BD$, e ne proverrà

$$\frac{2}{4}BD^2=\frac{BD}{2\,BD}\times(AB^2+AD^2),$$

vale a dire $BD^2=AB^2+AD^2$. Novella prova della proposizione Pittagorica.

Corollario VII (fig. 23). — Se la retta AO divide per metà l'angolo BAD, allora pel corollario del secondo teorema $AB.AD::BO.OD$, cioè $AB, OD=AD, BO$; cosicchè l'equazione (63) destramente maneggiata si muta nell'infrascritta:

$$AO^2+BO,\ OD=\frac{AB, AD, BO+AB, AD, OD}{BD}=\frac{AB,\ AD}{BD}\times(BO+OD),$$

cioè $AO^2+BO, OD=AB, AD$. Che è il teorema VI.

Corollario VIII (fig. 24). — Da qualunque punto preso nella base del triangolo BAD si tirino ai lati le rette OR, ed OS, che formino il parallelogramo $ORAS$, e al vertice A la retta OA, che sarà la diagonale del parallelogramo; io dico, che

$$AO^2+BO,\ OD=AB,\ OS+AD,\ OR. \tag{66}$$

Imperciocchè per la similitudine de' triangoli BDA, BOR si à $\frac{OB}{BD}=\frac{OS}{AB}$, come pure $\frac{BO}{BD}=\frac{OR}{AD}$, e questi valori di $\frac{OD}{BD}$, e di $\frac{BO}{BD}$ posti nel secondo membro dell'equazione (63) la cangiano nell'equazione (66).

Teorema XI (fig. 26). — Il triangolo BAD sia scritto nel cerchio $BADM$, e il suo angolo A sia diviso per mezzo della retta AM, che

tagli la base in O, e la periferia in M, dal qual punto sian tirate le corde MB, ed MD; io dico, che il valore della retta AM può esprimersi in tre maniere secondo le tre infrascritte equazioni:

$$AM = \frac{BM}{BD} \times (AB + AD) = \frac{DM}{BD} \times (AB + AD). \tag{67}$$

$$AM = \frac{AB, AD}{AO}. \tag{68}$$

$$AM = \frac{BM^2}{OM} = \frac{DM^2}{OM}. \tag{69}$$

Dimostrazione della prima parte. — Delle diverse prove, che dar si possono di questa prima parte, piacemi esporre la seguente:

Nell'articolo III del quarto scolio, valendomi del terzo teorema, e della figura 23, son giunto a questa equazione $\frac{BD}{AD} = \frac{MD}{AV} + \frac{BM}{AM}$; adunque nella presente ipotesi, in cui $MD = BM$, come pure

$$Ang.\,DAV = Ang.\,BAM = Ang.\,MAD,$$

si à $\frac{BD}{AD} = \frac{BM \times (AM + AV)}{AV, AM}$, e moltiplicando per $\frac{AM, AD}{BD}$, ne viene

$$AM = \frac{BM}{BD} \times \frac{(AD, AM + MV)}{AV}.$$

Ma nello stesso articolo III del quarto scolio si è dimostrato, che

$$AB = \frac{AM, AD}{AV};$$

adunque ponendo AB in luogo del suo valore nella penultima equazione, si ottiene l'equazione (67). E questa è la prima parte.

Dimostrazione della seconda parte (fig. 26). — In virtù del teorema VI: $AO^2 + BO, OD = AB, AD$, cioè $AO + \frac{BO, OD}{AO} = \frac{AB, AD}{AO}$; ma dalla simiglianza de' triangoli AOB, DOM si deduce $OM = \frac{BO, OD}{AO}$; adunque $AO + OM$, cioè $AM = \frac{AB, AD}{AO}$. E questa è la seconda parte.

Questa medesima seconda parte del teorema presente sarà il primo corollario del seguente teorema.

Dimostrazione della terza parte (fig. 26). — In virtù del secondo corollario del teorema X: $MO^2 + BO, OD = MB^2$, cioè

$$OM + \frac{BO, OD}{OM} = \frac{BM^2}{OM},$$

ma i triangoli AOB, DOM fan conoscere $AO = \frac{BO, OD}{OM}$; adunque $OM + AO$, cioè $AM = \frac{BM^2}{OM}$. E questa è la terza parte.

Corollario I (fig. 26). — Se sarà iscritto nel cerchio il triangolo equilatero BMD, e dal punto M si tirerà a qualunque punto della circonferenza, v. g. ad A, la retta MA; io dico, che la retta AM sarà eguale alla somma delle due rette AB, ed AD.

Imperciocchè in questo caso l'angolo A del triangolo BAD iscritto nel cerchio $BADM$ è diviso per mezzo della retta AM; essendo eguali le corde MB, ed MD. Adunque à luogo l'equazione (67) la quale nell'ipotesi presente (in cui BM è uguale a BD) si muta in questa:

$$AM = AB + AD.$$

Corollario II (fig. 26). — Nella supposizione di questo teorema sussiste questa equazione:

$$AM^2 = AB, AD + MB^2; \tag{70}$$

imperciocchè aggiungendo insieme l'equazione (68) moltiplicata prima per AO, e l'equazione (69) moltiplicata prima per OM, si à

$$AM, AO + AM, OM = AB, AD + BM \times MD;$$

ma il primo membro di quest'equazione è uguale ad AM^2, ed MB, MD è uguale a BM^2; adunque l'equazione (70) è sussistente.

Corollario III (fig. 26). — Considerando ora il caso, in cui la retta AM è diametro del cerchio $BADM$, ed insieme ipotenusa del triangolo dato ADM rettangolo in D, iscritto nel medesimo cerchio $BADM$; prendasi la corda AB eguale alla corda AD, e la corda BM sarà necessariamente eguale alla corda DM, perchè il diametro divide la circonferenza in due parti ADM, ABM eguali; adunque l'angolo A del triangolo $BADM$ è diviso per mezzo, e quindi à luogo l'equazione (70).

Si sostituisca in essa AD in vece di AB, e DM in vece di MB, e si muterà in quest'altra: $AM^2 = DA^2 + DM^2$, che è una dimostrazione novella della Pittagorica proposizione.

Teorema XII (fig. 27, e 28). — Sia il triangolo BAD iscritto nel cerchio $BADM$, la di cui periferia rimanga tagliata in N dalla retta AN, siccome la base del triangolo (prolungata ove bisogni) resti tagliata in V dalla retta AV in maniera che gli angoli BAV, DAN siano eguali; io dico, che $AV, AN = AB, AD$.

Dimostrazione. — Tirando la corda AD, si vede, che i triangoli ABV, AND sono simili, mentre gli angoli BAV, DAN sono eguali per l'ipotesi, e gli angoli ABV, AND nella figura 27 sono eguali, perchè insistono al medesimo arco AD, come pure sono eguali nella figura 28, perchè in essa son complementi a due retti dello stesso angolo ABD.

Adunque si à $AV . AB :: AD . AN$, e per conseguenza $AV, AN = AB, AD$. Il che, ec.

Egli è manifesto, che se nelle figure 27, e 28 le corde AN si prendessero alla sinistra, e le rette AV allla destra, sussisterebbe sempre il teorema.

Corollario I (fig. 27, e 28). — Se le rette AV, ed AN coincideranno in AM, l'angolo BAD sarà diviso per mezzo dalla stessa retta AM, il punto V cadrà in O, punto d'intersezione di BD, e di AM, e si avrà $AO, AM = AB, AD$, cioè $AM = \frac{AB, AD}{AO}$. Che è la seconda parte del teorema precedente.

Corollario II (fig. 27). — Nel caso del corollario, che precede, si à visibilmente $AO^2 = AO, OM = AB, AD$ e perchè la similitudine de' triangoli AOB, DOM fornisce $AO . OB :: DO . OM$, cioè $AO, OM = BO, OD$; ne segue che $AO^2 + BO, OD = AB, AD$.

Che è il sesto teorema.

Corollario III (fig. 27). — Se la retta AV è normale sopra la base BD del triangolo BAD, il prodotto della stessa AV, e del diametro del cerchio circoscritto $BADM$ è uguale al prodotto de' lati del suddetto triangolo.

Imperciocchè immaginando, che AN sia il diametro, l'angolo ADN del triangolo ADN sarà retto, e perciò eguale all'angolo AVB del triangolo ABV. In oltre l'angolo AND è uguale all'angolo ABD, insistendo ambidue allo stesso arco AD; e conseguentemente anche il terzo angolo DAN del triangolo AND è uguale al terzo angolo BAV del triangolo ABV. Laonde pel presente teorema $AV, AN = AB, AD$.

Corollario IV (fig. 26). — Sia il quadrilatero $BADM$ iscritto al cerchio, e sian tirate le diagonali AM, e BD, che si segano in O; io dico, che $\frac{AB,\, AD}{MB,\, MD} = \frac{AO}{OM}$; imperciocchè AO sta ad OM, come la normale tirata da A sopra BD sta alla normale tirata da M sopra la stessa BD: vale a dire AO sta ad OM, come la prima normale moltiplicata nel diametro del cerchio sta alla seconda normale moltiplicata nel medesimo diametro. Ma pel corollario antecedente il primo di questi due prodotti è uguale ad AB, AD, e il secondo è parimente uguale ad MB, MD; adunque AO sta ad OM, come AB, AD sta ad MB, MD.

Corollario V (fig. 27, e 28) — Il prodotto AV, AN è uguale a qualunque altro prodotto similmente preso;

Imperciocchè ciascuno di tali prodotti è uguale ad AB, AD.

Può questa verità enunciarsi ancora così:

Il prodotto AV, AN è uguale ad una quantità costante.

Scolio V. — Non sarà fuor di proposito, che io dimostri d'una maniera particolare quest'ultimo corollario, e ne faccia un teorema a parte.

Teorema (fig. 29, e 30). — L'angolo A del triangolo BAD iscritto al cerchio $BADM$ sia diviso per mezzo dalla retta AM, che taglia in O la base del triangolo, e in M la circonferenza. Le rette AV, ed AN formino gli angoli eguali MAV, MAN; la prima di esse tagli la circonferenza in S, e la base in V, e la seconda tagli in N la circonferenza medesima; io dico, che il prodotto AV, AN è uguale ad una quantità costante.

Dimostrazione. — Siano concepite come variabili la AV (la quale si chiami z), e la AN (la quale si chiami y). Siano immaginati descritti gli angoli MAu, ed MAn eguali tra loro, e tali che la retta Au sia in-

finitamente vicina alla AV, e la retta An sia infinitamente vicina alla AN: indi coi raggi Au, ed An si descrivano i due respettivi archetti uT, ed NR.

Si consideri, che i triangoli VTu, nRN sono simili; imperciocchè gli angoli in T, e in R sono retti, e gli angoli in V, ed in n eguali: mentre l'angolo in n à per sua misura $\frac{1}{2}$ *arc.* AN, e l'angolo in V à per sua misura $\frac{1}{2}$ *arc.* $AD \pm \frac{1}{2}$ *arc.* SB, cioè $\frac{1}{2}$ *arc.* $AD \pm \frac{1}{2}$ *arc.* ND, attese le supposizioni di $MAB = MAD$, e di $MAV = MAN$ (il segno superiore è per la figura 29, e l'inferiore per la figura 30) si à pertanto $VT\,(dz).Tu :: Rn\,(-dy).RN = -\frac{Tu,\,dy}{dz}$, e si prende $-dy$ perchè al crescere della z la y decresce. Si consideri in oltre, che l'angolo infinitesimo VAu è uguale all'angolo infinitesimo nAN; perchè essendo per l'ipotesi $MAV = MAN$, e per la costruzione $MAu = MAN$, ne siegue, che $MAV - MAu$ (cioè VAu) è uguale ad $MAN - MAn$ (cioè ad nAN). Ma l'espressione analitica di VAu è $\frac{Tu}{Au\,(z)}$, e l'espressione analitica di nAN è $\frac{RN}{AN\,(y)}$; adunque $\frac{Tu}{z} = \frac{RN}{y}$, e se si pone in vece di RN il suo valore $-\frac{Tu,\,dy}{dz}$ trovato di sopra, si à $\frac{Tu}{z} = -\frac{Tu,\,dy}{ydz}$; cioè moltiplicando per $\frac{zydz}{Tu}$, l'uno, e l'altro membro dell'equazione ultima, si conseguisce $ydz = -zdy$, e trasponendo, ritrovasi $zdy + ydz = 0$. Equazione che integrata, fa scoprire zy (cioè AV, AN) eguale ad una quantità costante. Il che, ec.

Corollario I (fig 29, e 30). — Se la $AV\,(z)$ cade in AB, la $AN\,(y)$ in virtù dell'ipotesi di $MAV = MAN$, cadrà in AD; laonde la quantità costante potrà essere il rettangolo AB, AD. E questo è il teorema duodecimo precedente.

Corollario II (fig. 29, e 30). — Se la $AV\,(z)$ cade prossima ad AM, la $AN\,(y)$ per la stessa ipotesi di $MAV = MAN$, cadrà anch'essa prossima ad AM, e la quantità costante potrà essere ancora il rettangolo AO, $AM = zy = AB$, AD. E questo è il secondo corollario del teorema XII.

COROLLARIO III (fig. 29). — Se la AV cadrà prossima alla normale, che dal punto A s'intende scendere sopra BD, allora la AN cadrà prossima al diametro del cerchio $BADM$.

Imperciocchè in questa supposizione è facile a comprendere, che la VT diviene infinitesima del secondo grado, ed essendosi provato nella dimostrazione del teorema, che $VT.Tu :: RN.RN$, ancora Rn sarà una infinitesima del secondo grado; e conseguentemente la AN dovrà cadere prossima al diametro, nel qual solo caso la Rn diventa infinitesima del secondo grado.

Quindi il prodotto della preaccennata normale moltiplicata nel diametro potrà essere la quantità costante. Per lo che il medesimo prodotto sarà eguale a zy, ed anche ad AB, AD. E questo è il corollario III del XII teorema.

Dalle dimostrazioni de' due teoremi infrascritti apparirà vieppiù l'uso de' teoremi I, e II.

TEOREMA XIII (fig. 31). — Dal vertice A del triangolo BAD scendano le due rette AT, ed AR, che taglino la base in T, ed in R, e formino gli angoli BAT, CAR eguali; io dico in primo luogo, che

$$\frac{BR,\ RD}{DT,\ DB} = \frac{AR^2}{AT^2} \tag{71}$$

io dico in secondo luogo, che

$$\frac{RB,\ BT}{TD,\ DR} = \frac{AB^2}{AD^2}. \tag{72}$$

Dimostrazione della prima parte. — Pel teorema primo:

$$\frac{sin\ BAR}{AT} = \frac{BR\ sin\ BAT}{BT,\ AR}$$

e pel corollario del teorema primo:

$$\frac{sin\ TAD}{AR} = \frac{TD\ sin\ DAR}{DR,\ AT}.$$

La prima di queste equazioni divisa per la seconda somministra:

$$\frac{AR}{AT} = \frac{BR,\ DR,\ AT}{BT,\ TD,\ AR},$$

mentre l'angolo BAR è uguale all'angolo TAD, e l'angolo BAT è uguale all'angolo DAR: dall' ultima equazione poi nasce chiaramente l'equazione (71); e questa è la prima parte.

Dimostrazione della seconda parte. — Pel teorema secondo:

$$\frac{sin\ BAR}{sin\ DAR}=\frac{BR,\ AD}{DR,\ AB}$$

e per lo stesso teorema secondo: $\frac{sin\ BAT}{sin\ TAD}=\frac{BT,\ AD}{DT,\ AB}$.

La prima di queste due equazioni venendo moltiplicata dalla seconda mostra: $1=\frac{BR,\ BT,\ AD^2}{DR,\ DT,\ AB^2}$: perchè gli angoli BAR, TAD sono eguali, come pure gli angoli BAT, DAR; e l'ultima equazione conduce subito all'equazione (72). Che è la seconda parte.

Corollario (fig. 31). — Se il triangolo BAD è diviso per metà dalla retta AO, che taglia la base in O, e se le rette AT, ed AR coincideranno nella retta AO; i punti T, ed R si confonderanno in O, la BR, e la BT diverranno BO, e la DR, e la DT saranno DO; cosicchè l'equazione (72) si trasmuterà nell'infrascritta $\frac{BO^2}{OD^2}=\frac{AB^2}{AD^2}$, e si avrà $\frac{BO}{OD}=\frac{AB}{AD}$.

Teorema XIV (fig. 31). — Fermo rimanendo ciò, che si è enunciato nel titolo del teorema antecedente; io dico in primo luogo, che

$$\frac{RD}{TB}=\frac{AR,\ AD}{AT,\ AB}; \tag{73}$$

io dico in secondo luogo, che

$$\frac{RB}{TD}=\frac{AR,\ AB}{AT,\ AD}. \tag{74}$$

Dimostrazione della prima parte. — Pel teorema primo:

$$\frac{sin\ BAD}{AT}=\frac{BD\ sin\ BAT}{BT,\ AD},$$

e pel corollario del teorema primo: $\frac{sin\ BAD}{AR}=\frac{BD\ sin\ DAR}{DR,\ AB}$, se la prima di queste equazioni si divide per la seconda, ne viene:

$$\frac{AR}{AT}=\frac{DR,\ AB}{BT,\ AD}, \tag{75}$$

essendo eguali gli angoli BAT, DAR; e l'ultima equazione porta immediatamente all'equazione (73). Che è la prima parte.

Dimostrazione della seconda parte. — Pel teorema primo:

$$\frac{sin\ BAD}{AR} = \frac{BD\ sin\ BAR}{BR,\ AD},$$

e pel corollario del teorema primo: $\frac{sin\ BAD}{AT} = \frac{BD\ sin\ DAT}{DT,\ AB}$, l'equazione seconda divisa per la prima dà:

$$(76) \qquad \frac{AR}{AT} = \frac{BR,\ AD}{DT,\ AB},$$

attesochè gli angoli DAR, BAT sono eguali; e dall'ultima equazione si passa visibilmente all'equazione (74). Che è la seconda parte.

Altra prova di questo Teorema (fig. 31).

Dimostrazione della prima parte. — Pel teorema secondo:

$$\frac{sin\ BAT}{sin\ DAR} = \frac{BT,\ AR}{RT,\ AB},$$

e pel medesimo secondo teorema: $\frac{sin\ TAR}{sin\ DAR} = \frac{RT,\ AD}{DR,\ AT}$, moltiplicando l'equazioni prima, e seconda, si vede $1 = \frac{BT,\ AR,\ AT}{DR,\ AT,\ AB}$, perchè gli angoli DAR, BAT sono eguali; e dall'ultima equazione nasce l'equazione (73). Che è la prima parte.

Dimostrazione della seconda parte. — Pel teorema primo:

$$\frac{sin\ TAD}{AR} = \frac{TD\ sin\ TAR}{TR,\ AD},$$

e pel corollario del teorema primo: $\frac{sin\ BAR}{AT} = \frac{BR\ sin\ RAT}{RT,\ AB}$, dalla seconda di queste equazioni divisa per la prima si conseguisce

$$\frac{AR}{AT} = \frac{BR,\ AD}{TD,\ AB},$$

per esser eguali gli angoli TAD, BAR; e dall'ultima equazione, che non differisce dall'equazione (76), risulta l'equazione (74). Che è la seconda parte.

Corollario I. — Il teorema precedente potrebb'essere un corollario del teorema presente; imperciocchè moltiplicando tra loro l'equazioni (73), (74), si arriva all'equazione (71); e dividendo l'equazione (74) per l'equazione (73), si ottiene l'equazione (72).

SCOLIO VI. — I. Versa-vice, il teorema presente può esser egli stesso corollario del precedente; perchè l'equazione (71) divisa per l'equazione (72) fa vedere: $\frac{RD^2}{TB^2}=\frac{AR^2\ AD^2}{AT^2,\ AD^2}$, e l'equazioni (71), e (72) fra loro moltiplicate, manifestano $\frac{RB^2}{TD^2}=\frac{AR^2,\ AB^2}{AT^2,\ AD^2}$.

Egli è visibile, che prendendo le radici de' membri dell'ultime due equazioni, si conseguiscono respettivamente l'equazioni (73), e (74).

II. La trasmutazione degli ultimi due teoremi in corollario uno dell'altro, può legittimamente farsi nel metodo da me tenuto; perchè le mie dimostrazioni di essi teoremi non ànno tra loro connession tale, che possa nascerne *petizion di principio.*

III. Potrebbe dedursi il teorema antecedente anche dall'equazioni (75); e (76); conciosiachè moltiplicate tra loro mostrano l'equazione (71), e l'equazione (76) divisa per l'equazione (75) fa conoscere la seguente: $1=\frac{BR,\ BT,\ AD^2}{DR,\ DT,\ AB^2}$, che appunto è quella ritrovata nella dimostrazione della seconda parte del precedente teorema, e porta manifestamente all'equazione (72).

COROLLARIO II. — Nella supposizione del corollario del teorema antecedente, l'equazione (73) diviene $\frac{OD}{OB}=\frac{AD}{AB}$, perchè AR diventa eguale ad AT.

Similmente l'equazione (74) diviene $\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{AD}$; adunque da ambidue l'equazioni (73), e (74) apparisce, che essendo l'angolo A del triangolo BAD diviso per mezzo dalla retta AO, che taglia la base in O; le parti della stessa base stanno tra loro, come i corrispondenti lati del triangolo. Che è la prima parte della proposizione terza del sesto libro d'Euclide.

TEOREMA XV (fig. 26). — Al triangolo BAD sia circoscritto il cerchio $BADM$, l'angolo A del triangolo sia diviso per mezzo dalla retta AM, che tagli la base in O, e la periferia in M, dal qual punto sian tirate le corde MB, ed MD; io dico, che sussiste questa equazione:

(77) $$AB,\ AD=AO^2+BM^2-OM^2,$$

ovvero:

(78) $$AB, AD = AO^2 + DM^2 - OM^2,$$

perchè secondo l'ipotesi le corde BM, e BD sono eguali.

Dimostrazione. — Pel teorema sesto: $BO, OD = AB, AD - AO^2$, e pel II corollario del teorema X: $BO, OD = BM^2 (DM^2) - OM^2$; adunque comparando questi due valori di BO, OD, e operando debitamente, si ottiene quest'equazione: $AB, AD = AO^2 + BM^2 (DM^2) - OM^2$, la quale include ambe l'equazioni (77), e (78). Il che, ec.

Corollario I (fig. 26). — Se l'angolo BAD è retto, sussiste quest'equazione:

(79) $$(AB + AD)^2 = 2BD^2 + 2AO^2 - 2OM^2.$$

Dimostrazione. — Aggiungendo le due equazioni (77), e (78), ritrovasi:

(80) $$2AB, AD = 2AO^2 + BM^2 + DM^2 - 2OM^2,$$

ma nella supposizione presente la base BD del triangolo è il diametro del cerchio circoscritto; adunque pel corollario II del teorema IX, si à quest'equazione: $AB^2 + AD^2 = BM^2 + DM^2$, che aggiunta all'equazione (80), somministra: $AB^2 + AD^2 + 2AB, AD = 2AO^2 + 2BM^2 + 2DM^2 - 2OM^2$, ovvero $(AB + AD)^2$ in luogo del primo membro dell'ultima equazione, che gli è uguale, come mostra speditamente il calcolo:

(81) $$(AB + AD)^2 = 2AO^2 + 2BM^2 + 2DM^2 - 2OM^2,$$

se ora si concepisce, che il punto A cada infinitamente vicino a B, la AB sarà infinitamente piccola, e però trascurabile, e così la AO, ma la AD diverrà equivalente alla BD, e la OM alla corda BM, e per conseguenza alla corda DM; cosicchè dall'equazione (79), proverrà:

(82) $$BD^2 = 2BM^2 = 2DM^2,$$

e quindi sostituendo $2BD^2$ in vece di questo suo valore nell'equazione (81), apparirà l'equazione (79). Il che, ec.

Nella dimostrazione di questo corollario io non ò voluto supporre il teorema Pittagorico, che avrebbe resa più breve, ma meno adattata al mio intento, ed anche meno ingegnosa, la stessa dimostrazione.

Corollario II (fig. 26). — Rimanendo il tutto come nell'enunciazione del teorema: se il triangolo BAD è rettangolo in A; io dico, che

$$AB, AD = \frac{1}{2}BD^2 + AO^2 - OM^2, \tag{83}$$

pongasi nelle due equazioni (77), e (78) in vece di BM^2, e respettivamente di DM^2 il suo valore $\frac{1}{2}$ BD^2 preso dall'equazione (82), e si vedrà provenire da entrambe l'equazione (83).

Corollario III (fig. 26). — Poste le cose suddette: se il triangolo BAD è rettangolo in A; io dico, che

$$(\pm AB \mp AD)^2 = 2OM^2 - 2AO^2, \tag{84}$$

sottraggasi l'equazione (80) moltiplicata per 2 dall'equazione (81), e ne nascerà: $(AB+AD)^2 - 4AB, AD = 2OM^2 - 2AO^2$, ma il calcolo fa veder facilmente, che il primo membro di quest'ultima equazione è uguale ad $AB^2 + AD^2 - 2AB, AD$, cioè ad $(\pm AB \mp AD)^2$; adunque l'equazione (84) sussiste.

Corollario IV (fig. 26). — E perciò se il triangolo BAD è rettangolo in A, la differenza de' due lati AB, e AD è media proporzionale tra il doppio di AM, e la differenza delle due parti di AM, cioè di OM, ed AO; il che siegue dall'equazione (84). Ne' corollarj di questo teorema si contengono nuove, e belle proprietà del triangolo rettangolo, dimostrate senza la proposizione Pittagorica.

Corollario V (fig. 26). — Se il tringolo BAD è rettangolo in A, l'addizione d'ambe l'equazioni (70), e (84), dà:

$$(AB+AD)^2 + (\pm AB \mp AD)^2 = 2BD^2,$$

ma sviluppando il primo membro di quest'equazione, ne viene

$$2AB^2 + 2AD^2;$$

adunque $2AB^2 + 2AD^2 = 2BD^2$, cioè $AB^2 + AD^2 = BD^2$.

Corollario VI (fig. 26). — Nella supposizione del triangolo BAD rettangolo in A, sottraggasi l'equazione (83) moltiplicata per 2 dall'equazione (79), e ne risulterà: $(AB+AD)^2 - 2AB, AD = BD^2$, prendasi

alla distesa il quadrato di $AB+AD$, e l'ultima equazione diventerà $AB^2+AD^2=BD^2$.

Corollario VII (fig. 26). — Supponendo, come sopra, il triangolo BAD rettangolo in A, aggiungasi l'equazione (83) moltiplicata per 2 all'equazione (84), e si avrà: $(\pm AB \mp AD)^2+2AB, AD=BD^2$, se si sviluppa in quest'ultima equazione il quadrato di $\pm AB \mp AD$, si ottiene quest'altra: $AB^2+AD^2=BD^2$.

Ed ecco dimostrata di nuovo in ciascuno de' tre ultimi corollarj la Pittagorica proposizione.

Teorema XVI (fig. 32). — Su la data retta AC divisa in E, prendasi la porzione CS eguale alla porzione AE; dal punto S si alzi una perpendicolare indefinita SD, e da qualunque punto D di questa si tirino alle due estremità della linea data le rette DA, e DC; io dico, che la data retta AC è la minima di quante possono passare pel punto E, e rimaner intercette fra i lati del triangolo ADC prolungati verso A, e verso C.

Dimostrazione. — I principj delle geometria interiore forniranno una spedita dimostrazione di questo teorema.

Passi pel punto dato E la sottotesa PQ infinitamente vicina alla linea data AC, e co' raggi EP, ed EC si descrivano i piccioli archi PG, e CF.

Sarà pertanto $EP . PG :: EC . CF = \frac{EC, PG}{EP}$.

Dai triangoli simili DSA, PGA nasce questa proporzionalità

$$DS . SA :: PG . GA,$$

e perciò $GA = \frac{SA, PG}{DS}$.

I triangoli simili DSC, CFQ danno luogo a quest'altra proporzionalità $DS . SC :: CF \left[\frac{EC, PG}{EP}\right] . FQ$, donde procede

$$FQ = \frac{SC, EC, PG}{DS, EP} = \frac{SC, EC, PG}{DS, EA}.$$

Ma per la costruzione $SC=EA$, ed $EC=SA$; adunque

$$FQ = \frac{SA, PG}{DS} = GA.$$

Laonde la sottotesa prossima PQ, che passa pel punto dato E è uguale alla data AC, e conseguentemente la stessa AC è un minimo. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO (fig. 32). — Se il punto E divide per mezzo la data retta AC, il punto S cade in E, e il triangolo ADC è isoscele. Quindi risulta questo:

TEOREMA. — La base di qualunque triangolo isoscele è la minima di tutte le sottotese, che passano pel punto di mezzo della medesima base, e sono intercette fra i lati prolungati dal canto della base.

TEOREMA XVII (fig. 33). — Pel punto E dentro l'angolo retto ADC passi la sottotesa AC, che sia la minima di quante possono passare pel detto punto E. Da questo medesimo punto si tirino ai lati le perpendicolari EM, ed EN; io dico, che MA è la prima, ed NC la seconda delle due medie proporzionali tra EM, ed EN.

PRIMA DIMOSTRAZIONE. — Dal vertice dell'angolo retto si cali su la sottotesa AC la normale DS, e osservando sempre, che in virtù dell'ipotesi di AC minima, e del teorema precedente la SC è uguale alla AE, e la SA alla EC, si avranno le seguenti proporzionalità.

Pel triangolo ADC retto in D, e per la DS normale sopra la base AS: $AS.DS::DS.SC\ (AE)$; perciò $AE=\frac{DS^2}{AS}=\frac{AS, DS^2}{AS^2}$, ma pei triangoli simili DSA, EMA; $\frac{DS}{AS}=\frac{EM}{MA}$; adunque

$$AE=\frac{AS, EM^2}{MA^2}=\frac{EC, EM^2}{MA^2}.$$

Per la similitudine de' triangoli EAM, CEN:

$$AE\left[\frac{EC, EM^2}{MA^2}\right]\cdot EM::EC.NC=\frac{MA^2}{EM},$$

$$AE\left[\frac{EC, EM^2}{MA^2}\right]\cdot MA::EC.EN=\frac{MA^3}{EM^2}.$$

E la sola ispezione de' valori di NC, e di EN mostra, che sono in

proporzione geometrica continua queste quattro linee EM; MA; NC; EN, vale a dire EM; MA; $\frac{MA^2}{EM}$; $\frac{MA^3}{EM^2}$.

Seconda dimostrazione (fig. 33). — Due cose intendo di provare:

Primo, che MA è media proporzionale tra EM, ed NC, cioè che $MA^2 = EM, NC$.

Secondo, che NC è media proporzionale tra MA, ed EN, cioè che $NC^2 = MA, EN$.

Ora per la similitudine dei tre triangoli AME, ASD, e CEN, per la normale DS, che dal vertice dell'angolo retto D cade sulla base AC, e per essere $AS = EC$, ed $SC = AE$, abbiamo:

$$MA^2 . EM^2 :: AS^2 . SD^2 :: AS . SC :: EC . AE :: NC . EM :: EM, NC . EM^2;$$

adunque $MA^2 . EM^2 :: EM, NC . EM^2$, e conseguentemente $MA^2 = EN, NC$.

Che è la prima parte della dimostrazione.

All'istessa maniera, per la simiglianza dei tre triangoli CNE, CSD, ed EMA, per la normalità di DS, ec., e per l'eguaglianza di CS con EA, e di SA con EC avremo:

$$NC^2 . EN^2 :: CS^2 . SD^2 :: CS . SA :: EA . EC :: MA . EN :: MA, EN . EN^2;$$

adunque $NC^2 . EN^2 :: MA, EN . EN^2$, e per conseguenza $NC^2 = MA, EN$.

Che è la seconda parte della dimostrazione.

Terza dimostrazione (fig. 33):

$$NC, MA . EM, MA :: NC . EM :: EC . AE :: AS . SC :: AS^2 . SD^2 :: MA^2 . EM^2;$$

adunque $NC, MA . EM, MA :: MA^2 . EM^2$, e permutando

$$NC, MA . MA^2 :: EM, MA . EM^2.$$

Dividendo per MA i primi due termini, e per EM i due ultimi di quest'analogia, resta: $NC . MA :: MA . EM$.

Ma $EN . NC :: MA . EM$; adunque $EN . NC :: NC . MA :: MA . EM$.

Dal che apparisce essere MA la prima, ed NC la seconda delle due medie proporzionali tra EM, ed EN. Il che dovea dimostrarsi.

Altra maniera. — Nella serie di proporzioni, che costituiscono questa dimostrazione si assumano le proporzioni terza, ed ultima, e se ne formi quest'equazione: $\frac{NC}{EM} = \frac{MA^2}{EM^2}$.

Riflettasi, che $\frac{NC}{EM}$ è uguale ad $\frac{NC}{MA} \times \frac{MA}{EM}$, e che $\frac{MA^2}{EM^2}$ è uguale ad $\frac{MA}{EM} \times \frac{MA}{EM}$. Adunque $\frac{NC}{MA} \times \frac{MA}{EM} = \frac{MA}{EM} \times \frac{MA}{EM}$; e dividendo per $\frac{MA}{EM}$ l'uno, e l'altro membro, rimane $\frac{NC}{MA} = \frac{MA}{EM}$. Il resto come qui sopra.

Quarta dimostrazione (fig. 33). — Farò uso di questa quarta dimostrazione del secondo teorema, in virtù di cui

$$\frac{sin\ ADS}{sin\ CDS} = \frac{AS, DC}{SC, DA} = \frac{AS}{SC} \times \frac{DC}{DA}.$$

Prendendo AC pel raggio, $sin\ ADS$ è uguale a DA, perchè l'angolo ADS è uguale all'angolo DCS, facendo sì quello, come questo un angolo retto con l'angolo CDS.

$Sin\ CDS$ è uguale a CD, perchè l'angolo CDS è uguale all' angolo DAS, mentre sì l'uno, come l'altro fa un angolo retto con l'angolo ADS.

Perciò $\frac{sin\ ADS}{sin\ CDS}$ è uguale a $\frac{DA}{DC}$, e la precedente equazione si muta in questa: $\frac{DA}{DC} = \frac{AS}{SC} \times \frac{DC}{DA}$, e per conseguenza $\frac{SC}{AS} = \frac{DC^2}{DA^2}$.

Avendosi $SC\,(AE) . AS\,(EC) :: EM . NC$, e $DC . DA :: EM . MA$, si avrà $\frac{SC}{AS}$ eguale ad $\frac{EM}{NC}$; e $\frac{DC^2}{DA^2}$ eguale ad $\frac{EM^2}{MA^2}$; talchè l' ultima equazione diventerà $\frac{EM}{NC} = \frac{EM^2}{MA^2}$, cioè $\frac{EM}{MA} \times \frac{MA}{NC} = \frac{EM}{MA} \times \frac{EM}{MA}$, e dividendo dall'una, e l'altra parte per $\frac{EM}{MA}$, ne verrà $\frac{EM}{MA} = \frac{MA}{NC}$.

Oltre di ciò $\frac{EM}{MA} = \frac{NC}{EN}$. Adunque sono eguali queste tre proporzioni $\frac{EM}{MA}$; $\frac{MA}{NC}$; $\frac{NC}{EN}$, e conseguentemente la MA è la prima, e la NC la seconda delle due medie proporzionali tra EM, ed EN. Il che dovea dimostrarsi.

Quinta dimostrazione. — Si concepisca tirata nella figura 33 la retta DE.

Il triangolo EDC sta al triangolo ADE in ragion composta di $\frac{DC}{DA}$, e di $\frac{EN}{EM}$, perchè il valore del primo triangolo è $\frac{1}{2}DC, EN$, e il valore del secondo è $\frac{1}{2}\ DA, EM$.

Di più il triangolo EDC sta al triangolo ADE in ragion composta di $\frac{DS}{SC}$, e di $\frac{AS}{DS}$, perchè il valore del primo è $\frac{1}{2}EC, DS$, cioè $\frac{1}{2}AS, DS$, e il valore del secondo è $\frac{1}{2}AE, DS$, cioè $\frac{1}{2}SC, DS$.

Si à pertanto $\frac{DC}{DA}\times\frac{EN}{EM}=\frac{DS}{SC}\times\frac{AS}{DS}$. Ma $\frac{DC}{DA}$ è uguale ad $\frac{EM}{MA}$, come pure $\frac{DS}{SC}$ ad $\frac{EN}{NC}$, ed $\frac{AS}{DS}$ ad $\frac{MA}{EM}$. Adunque sostituendo nell'ultima equazione proporzioni eguali ad eguali, ritrovasi

$$\frac{EM}{MA}\times\frac{EN}{EM}=\frac{EN}{NC}\times\frac{MA}{EM}=\frac{MA}{NC}\times\frac{EN}{EM}.$$

E dividendo l'uno, e l'altro membro per $\frac{EN}{EM}$ proporzione comune, si vede $\frac{EM}{MA}=\frac{MA}{NC}$. Perciò $\frac{EM}{MA}=\frac{MA}{NC}=\frac{NC}{EN}$. Il che dovea dimostrarsi.

Sesta dimostrazione (fig. 33). — Primieramente

$$\frac{AE}{EC}=\frac{SC}{AS}=\frac{SC}{DS}\times\frac{DS}{AS}.$$

Secondariamente $\frac{AE}{EC}=\frac{MA}{EN}=\frac{MA}{NC}\times\frac{NC}{EN}$; adunque

$$\frac{SC}{DS}\times\frac{DS}{AS}=\frac{MA}{NC}\times\frac{NC}{EN},$$

e dividendo per $\frac{SC}{DS}$ l'una, e l'altra parte, $\frac{DS}{AS}=\frac{MA}{NC}\times\frac{NC}{EN}\times\frac{DS}{SC}$.

In vece di $\frac{DS}{AS}$, e di $\frac{DS}{SC}$ si pongano i respettivi equivalenti $\frac{EM}{MA}$; ed $\frac{EN}{NC}$, e l'ultima equazione diverrà $\frac{EM}{MA}=\frac{MA}{NC}\times\frac{NC}{EN}\times\frac{EN}{NC}$; cioè $\frac{EM}{MA}=\frac{MA}{NC}$, e conseguentemente sarà come sopra $\frac{EM}{MA}=\frac{MA}{NC}=\frac{NC}{EN}$. Il che dovea dimostrarsi.

Scolio VII. — Questo teorema contiene una bella proprietà dell'angolo retto. Io la trovai molti anni sono, valendomi di un metodo diverso dal presente e la manifestai al P. Abate D. Guido Grandi in-

sieme con lo scioglimento di un problema generale, che à qualche relazione a questa materia, e sarà da me inserito nel fine di questo trattato de' triangoli.

COROLLARIO (fig. 33). — Nella supposizione dell'angolo D retto.

Quando la sottotesa AC è un minimo, anche il quadrato di essa è un minimo. Ma il quadrato della medesima sottotesa AC è uguale alla somma de' quadrati de' lati, cioè a DA^2+DC^2; adunque quando la sottotesa AC è un minimo, la detta somma de' quadrati de' lati è un minimo. Ma quando la sottotesa AC è un minimo, MA è la prima, ed NC la seconda delle due medie proporzionali tra EM, ed EN; adunque quando DA^2+DC^2 è un minimo, MA è la prima, ed NC la seconda delle due medie proporzionali tra EM, ed EN.

TEOREMA XVIII (fig. 31). — Rivolgasi qualsivoglia angolo BAR intorno il proprio vertice A, e i suoi lati AB, ed AR taglino dalla sottoposta retta BO (di qua, e di là prolungata) la porzione BR; io dico, che la minima di tali porzioni sarà quando i lati AB, ed AR diverranno eguali.

Si dimostrerà questo teorema speditamente co' principj dell'interiore geometria nelle seguenti guise. Al qual effetto s'immagini, che l'angolo BAR nel suo rivolgimento faccia gli angoli BAT, DAR infinitamente piccioli. Saranno questi fra loro eguali, cosicchè avranno luogo l'equazioni (71), (72), (73), e (74), le quali competono ai teoremi XIII, e XIV, e ciascuna di esse somministrerà una dimostrazione del presente teorema.

PRIMA DIMOSTRAZIONE (fig. 31). — Dovendo a cagion del minimo la BR esser eguale alla TD, e conseguentemente la differenza infinitesima BT all'altra differenza infinitesima RD; l'equazione (71) diviene $1=\frac{AR^2}{AT^2}$, cioè $AT^2=AR^2$, ovvero $AT=AR$, ma AB prossima ad AT gli è uguale, dunque $AB=AR$, val a dire il triangolo BAR è isoscele. Il che dovea dimostrarsi.

SECONDA DIMOSTRAZIONE (fig. 31). — Per l'accennata egualità di BR, e TD, come pure di BT, ed RD, l'equazione (72) diventa

$$1=\frac{AB^2}{AD^2}=\frac{AB^2}{AR^2},$$

perchè AD differisce infinitamente poco da AR. Adunque $AR^2 = AB^2$, cioè $AR = AB$. Il che dovea dimostrarsi.

TERZA DIMOSTRAZIONE (fig. 31). — Secondo l'esigenza del minimo, RD, e TB sono eguali; laonde l'equazione (73) si muta in questa

$$1 = \frac{AR,\ AD}{AT,\ AB};$$

ma l'infinita esiguità degli angoli RAD, TAB rende AR eguale ad AD, e AT eguale ad AB; adunque l'ultima equazione dà $1 = \frac{AR^2}{AB^2}$, vale a dire $AB = AR$. Il che dovea dimostrarsi.

QUARTA DIMOSTRAZIONE (fig. 31). — Richiedendo la natura del minimo, che BR sia eguale a TD, l'equazione (74) si trasforma nella seguente $1 = \frac{AR,\ AB}{AT,\ AD}$, che dà luogo a quest'altra $\frac{AD}{AR} = \frac{AB}{AT}$. Perlocchè nei due triangoli BAT, DAR equiangoli nel loro vertice A, sono proporzionali i lati respettivi, che comprendono gli angoli eguali in A. Adunque i due medesimi triangoli sono simili, e quindi l'angolo in B è uguale all'angolo in D. Laonde il triangolo AOB rettangolo in O (poichè AO è normale sopra BD) è simile al triangolo AOD rettangolo anche esso in O. Adunque i suddetti triangoli rettangoli simili, che ànno comune il lato AO, sono eguali, ed eguali anche le basi AB, ed AD; ma AD per la più volte espressa ragione potendo reputarsi eguale ad AR, ne segue, che $AB = AR$. Il che dovea dimostrarsi.

QUINTA DIMOSTRAZIONE (fig. 34). — La figura 34 è la stessa, che la figura 31, con questo solo di più, che dai punti T, ed R sono calate le normali TV, ed RQ sulle respettive rette AB, ed AD.

I. I triangoli rettangoli simili AOB, TVB dànno $AO.AB::VT.BT$, cioè

$$BT = \frac{AB,\ VT}{AO}. \tag{85}$$

I triangoli rettangoli simili AOD, RQD dànno

$$AO.AD::RQ.RD = \frac{AD\,.\,RQ}{AO}.$$

I triangoli rettangoli simili AVT, AQR dànno

$$AT . VT :: AR . RQ = \frac{VT, AR}{AT},$$

e questo valore di RQ posto nell'espressione di RD fa apparire

(86) $$RD = \frac{AD, AR, VT}{AO, AT}.$$

II. Finora non ò supposto, che gli angoli BAT, DAR siano infinitamente piccoli, ma soltanto eguali; la supposizione adunque dell'infinita picciolezza di essi angoli renderà AD eguale ed AR, e AT eguale ad AB: talmente che il valore di RD espresso nell'equazione (86) diverrà

$$RD = \frac{AR^2, VT}{AO, AB}.$$

Acciò la differenza RD sia eguale alla differenza BT, [equazione (85)] dee valere quest' altra equazione: $\frac{AR^2, VT}{AO, AB} = \frac{AB, VT}{AO}$, vale a dire $AR^2 = AB^2$, cioè $AR = AB$. Il che dovea dimostrarsi.

Corollario (fig. 34). — Siccome nel primo articolo di questa quinta dimostrazione io son pervenuto all'equazioni (85), e (86) supponendo la sola eguaglianza degli angoli BAT, DAR, e lasciandone arbitraria la grandezza, vale a dire finita, o infinitesima; così la seconda di dette equazioni divisa per la prima, ne porge una, che è la stessa con l'equazione (73) del teorema XIV; à il medesimo significato, ed egualmente si estende.

Teorema XIX (fig. 35). — Se dalle estremità B, ed R della base di qualunque triangolo BAR si tirano ai respettivi lati le rette BD, RP, che si tagliano in C, e fanno co' medesimi lati gli angoli eguali BDR, RPB, e se dal vertice A del triangolo, pel punto d'intersezione C, si conduce la retta AO, che incontra la base in O, io dico, che sussistono queste due equazioni:

(87) $$\frac{BO}{OR} = \frac{BA, BP}{RA, RD}.$$

(88) $$\frac{BO}{OR} = \frac{CP, DA}{CD, PA}.$$

Dimostrazione della prima parte. — I triangoli ADB, APR sono simili, perchè ànno eguali per l'ipotesi gli angoli in D, e in P, e comune l'angolo in A. Perciò $\frac{BA}{AD}=\frac{RA}{AP}$, e $\frac{BA,\ AP}{RA,\ AD}=1$; adunque moltiplicando pel primo membro di quest'ultima equazione il secondo membro dell'equazione (43), la quale è $\frac{BO}{RO}=\frac{PB,\ DA}{PA,\ DR}$, il valore di $\frac{BO}{RO}$ rimane il medesimo, e trovasi l'equazione (87). Il che dovea dimostrarsi.

Dimostrazione della seconda parte. — La sopraccennata equazione (43) equivale alla seguente:

$$\frac{BO}{OR}=\frac{PB}{PC}\times\frac{PC}{PA}\times\frac{DA}{DC}\times\frac{DC}{DR}; \tag{89}$$

ma la supposta egualità degli angoli in D, e in P rende simili i triangoli CDR, CPB, attesa l'eguaglianza degli angoli al vertice C; adunque $\frac{PB}{PC}=\frac{DR}{DC}$: e questo valore di $\frac{PB}{PC}$ posto nell'equazione (89) la riduce all'infrascritta $\frac{BO}{OR}=\frac{PC}{PA}\times\frac{DA}{DC}$, che equivale all'equazione (88). Il che dovea secondariamente dimostrarsi.

Corollario I (fig. 35). — Se il triangolo BAR è acutangolo, e se le rette BD, ed RP sono perpendicolari sopra i lati respettivi AR, ed AB, sarà questo un caso del teorema, perchè gli angoli in P, e in D sono eguali, essendo retti.

S'immagini ora tirata pel punto O la retta uz, che sia normale sulla retta AO, e incontri in u la BD prolungata, se bisogna, e in z la PR, prolungata, quando occorra.

I triangoli CPA, COz saranno simili, perchè ànno gli angoli al vertice C eguali, e parimente i triangoli CDA, COu saranno simili a cagione dell'egualità degli angoli al vertice C; laonde la prima coppia di triangoli darà $\frac{PC}{PA}=\frac{CO}{Oz}$, e la seconda coppia di triangoli darà $\frac{DA}{DC}=\frac{Ou}{OC}$. Perciò surrogando nell'equazione (88) i valori di $\frac{PC}{PA}$, e di $\frac{DA}{DC}$, ne verrà $\frac{BO}{OR}=\frac{Ou}{Oz}$, e permutando $\frac{BO}{Ou}=\frac{OR}{Oz}$.

È cospicuo, che quest'ultima proporzione non può sussistere, fuorchè quando il punto u cade in B, e il punto z in R, cioè quando la retta uz si confonde con la retta BR. Avvegnachè è facilissimo a dimostrarsi,

che la proporzione $\frac{BO}{Ou}$ è di maggior inegualità, e la proporzione di $\frac{RO}{Oz}$ è di minore inegualità, allorchè il punto u cade tra D, e B, e conseguentemente il punto z cade oltre R per rapporto a P: come pure, che la proporzione $\frac{BO}{Ou}$ è di minore inegualità, e la proporzione $\frac{RO}{Oz}$ è di maggiore inegualità, quando il punto u cade oltre B relativamente a D, e per conseguenza il punto z cade tra P, ed R.

Adunque la retta AO è normale sopra la BR, la quale si è provata essere la medesima, che la retta uz.

Rimane pertanto dimostrato in questo corollario il seguente

Teorema. — Se da tutti e tre gli angoli di un triangolo acutangolo si tirano delle perpendicolari ai lati, elleno si taglieranno nel medesimo punto dentro il triangolo.

Corollario II (fig. 35). — Allorchè gli angoli in P, e in D sono retti, la simiglianza dei triangoli BPC, BDA somministra $\frac{PB}{PC}=\frac{BD}{DA}$, e questo valore di $\frac{PB}{PC}$ posto nell'equazione (89), la trasforma (debitamente esprimendo) nell'infrascritta:

$$\frac{BO}{OR}=\frac{BD,\ PC}{DR,\ PA}. \tag{90}$$

Corollario III (fig. 35). — Nella medesima supposizione degli angoli P, e D retti, i triangoli simili RDC, RPA dànno $\frac{DC}{DR}=\frac{PA}{RP}$, il qual valore di $\frac{DC}{DR}$ sostituito nell'equazione (89) fa conoscere, valendosi di opportuna espressione,

$$\frac{BO}{OR}=\frac{PB,\ DA}{RP,\ DC}. \tag{91}$$

Corollario IV (fig. 35). — L'equazioni (88), e (90), comparate insieme mostrano $\frac{CP,\ DA}{CD,\ PA}=\frac{BD,\ PC}{DR,\ PA}$, vale a dire $\frac{DA}{CD}=\frac{BD}{DR}$, e l'equa-

zioni (88), e (91), fra loro paragonate, esibiscono $\frac{CP,\ DA}{CD,\ PA}=\frac{PB,\ DA}{RP,\ DC}$, cioè $\frac{CP}{PA}=\frac{PB}{RP}$.

Scolio VIII. — E così appunto dev'essere, perchè dai triangoli simili ADB, CDR nasce $\frac{DA}{BD}=\frac{CD}{DR}$, e permutando $\frac{DA}{CD}=\frac{BD}{DR}$, come sopra. Medesimamente dai triangoli simili CPB, APR viene $\frac{CP}{PB}=\frac{PA}{RP}$, e permutando $\frac{CP}{PA}=\frac{PB}{RP}$, pur come sopra.

Che poi sian simili i triangoli ADB, CDR tra loro, e i triangoli CPB, APR tra loro, si fa manifesto, considerando primieramente, che il triangolo ADB è simile al triangolo APR, e questo al triangolo CDR: Secondariamente, che il triangolo CPB è simile al triangolo ADB, e questo al triangolo APR.

Corollario V (fig. 35). — Il confronto delle due equazioni (91), e (90) fornisce questa: $\frac{PB,\ DA}{RP,\ DC}=\frac{BD,\ PC}{DR,\ PA}$, la quale venendo moltiplicata di qua, e di là per $\frac{DC,\ DR}{DA,\ BD}$, si trasforma in quest'altra:

$$\frac{BP,\ DR}{BD,\ RP}=\frac{PC,\ DC}{PA,\ DA}.$$

Laonde nella presente ipotesi degli angoli in P, e in D retti, sussiste questa proporzionalità: $AP,\ AD.CP,\ CD :: BD,\ RP.BD,\ RD$.

Corollario VI (fig. 35). — Se il triangolo acutangolo BAR è isoscele, e gli angoli in P, e in D retti; $AP=AD$; $CP=CD$; $BD=RP$; $BP=RD$. Quindi dalla proporzionalità registrata in fine del precedente corollario nascono queste altre due: $\frac{AP^2}{PC^2}=\frac{BD^2}{BP^2}$, ed $\frac{AD^2}{DC^2}=\frac{RP^2}{RD^2}$, cioè $\frac{AP}{PC}=\frac{BD}{BP}$, ed $\frac{AD}{DC}=\frac{RP}{RD}$.

Corollario VII (fig. 35). — I. Quando poi oltre l'esser isoscele il triangolo BAR, gli angoli RPB, BDR sono in qualunque modo fra loro

eguali, allora si ripigli l'equazione (88), e si consideri, che essendo (come testè si è accennato) $PA = DA$, e $CP = CD$, la stessa equazione (88) diventa $\frac{BO}{OR} = 1$, cioè $BO = OR$; ed essendo ancora i lati AB, e BO intorno l'angolo ABO respettivamente eguali ai lati AR, ed RO intorno l'angolo ARO, come pure eguali per la supposizione questi due angoli, ne segue, che i triangoli parziali ABO, ARO sono simili, ed eguali; laonde l'angolo AOB è uguale all'angolo AOR, e conseguentemente la retta AO, che passa pel punto d'intersezione C, è normale sulla base del triangolo BAR.

II. La medesima cosa può dedursi dall'equazione (87) attesochè per la supposizione del triangolo BAR isoscele $BA = RA$, e $BP = RD$. Adunque l'equazione (87) diviene $\frac{BO}{OR} = 1$, e il rimanente procede come nel primo articolo.

Scolio IX (fig. 35). — I. La dimostrazione di quel teorema, che ò esposto nel primo corollario, serve a far conoscere la fertilità de' miei principj.

Un'altra dimostrazione dello stesso teorema si trae dalla proporzionalità $\frac{DA}{CD} = \frac{BD}{DR}$, ovvero dall'altra $\frac{CP}{PA} = \frac{PB}{RP}$, dedotte ambedue nel corollario IV, e diversamente provate nell'ottavo scolio. Imperciocchè, essendo proporzionali i lati che abbracciano gli angoli retti CDA, BDR, sono simili i triangoli CDA, BDR, e perciò eguali gli angoli DAC, DBR, o sia OBC: laonde i triangoli DAC, OBC, che in oltre ànno eguali gli angoli al vertice C, sono simili anch'essi. Adunque l'angolo COB è retto come l'angolo CDA. Il che dovea dimostrarsi.

Una simile prova darebbe l'altra proporzionalità: $\frac{CP}{PA} = \frac{PB}{RP}$.

II. Può dimostrarsi il teorema medesimo anche senza considerare le proporzioni, nella guisa infrascritta.

Si descriva (fig. 36) sul diametro BR il cerchio $BIRL$, che taglia in I, e in L la AO prolungata: egli è chiaro, che questo cerchio passerà pe' punti P, e D a cagione degli angoli retti in P, e in D. Si tiri la corda PD, e s'immagini descritto sul diametro AC un cerchio minore, che per la medesima cagione dovrà passare per gli stessi punti P, e D.

Ora l'angolo PAC è uguale all'angolo PDC, perchè ambidue si appoggiano alla corda PC del cerchio minore immaginato. Ma si sa per

gli elementi di geometria, che l'angolo PAC, o sia PAL, à per sua misura la metà dell'arco BL, meno la metà dell'arco PI nel cerchio maggiore, e che l'angolo PDC, o sia PDB, à per sua misura la metà dell'arco BP, vale a dire la metà dell'arco BI meno la metà dell'arco PI.

Adunque $\frac{1}{2} Arc.\ BL - \frac{1}{2} Arc.\ PI = \frac{1}{2} Arc.\ BI - \frac{1}{2} Arc.\ PI$; e conseguentemente l'arco BL è uguale all'arco BI. Talmentechè la retta RB, che essendo il diametro del cerchio maggiore, passa pel centro, divide per mezzo l'arco IBL dello stesso cerchio, e quindi per gli elementi di geometria è manifesto, che la medesima RB è perpendicolare sopra la AO, e viceversa. Il che dovea dimostrarsi.

III. Ovvero così (fig. 36).

Si è provato in quest'ultima dimostrazione, che l'angolo PAC, o sia BAO è uguale all'angolo PDC, o sia PDB; ma quest'angolo PDB è uguale all'angolo PRB, perchè si appoggiano entrambi all'arco PB, adunque l'angolo BAO è uguale all'angolo PRB: laonde avendo i due triangoli BAO, PRB comune l'angolo in B, ed eguali gli angoli in A, e in R, ànno eguali ancora gli angoli in P, e in O: ma l'angolo in P è retto per l'ipotesi; adunque anche l'angolo in O. Il che dovea dimostrarsi.

IV. Oppure in quest'altro modo (fig. 37).

Sul diametro AC descrivasi il cerchio $CPAD$, che dee passare pei punti P, e D, come ò provato nel secondo articolo. Si tirino le due rette PD, e PM, la seconda delle quali tagli perpendicolarmente in N la retta AC. Consta per gli elementi di geometria, che l'arco PCM sarà diviso per mezzo in C; cosicchè l'angolo MPC sarà eguale all'angolo PDC, insistendo ambi sopra gli archi eguali CM, e CP. Ò provato nel terzo articolo, che l'angolo PDC, o sia PDB è uguale all'angolo PRB; adunque l'angolo MPC, o sia MPR, è uguale all'angolo alterno PRB, e perciò le rette PM, e BR sono parallele. Ma per la costruzione la retta AO è normale su la PM; adunque lo è anche su la BR. Il che dovea dimostrarsi.

Definizione. — Tra i parallelogrami iscritti in un triangolo, chiamo similmente posti quelli, i lati de' quali, incontranti la base di detto triangolo, son paralleli tra loro.

Teorema XX (fig. 39 num. 1, e 2). — Nel triangolo dato BAC sia iscritto il parallelogramo $EGHF$, tale che il suo lato EG tagli per

mezzo in E, ed in G i lati del medesimo triangolo; io dico, che il parallelogramo $EGHF$ è il massimo de' parallelogrami iscritti, e similmente posti nel triangolo dato.

PRIMA DIMOSTRAZIONE (fig. 39 num. 1). — Dal vertice A si tiri su la base del triangolo dato la retta AD parallela ad EF. S'iscriva nello stesso triangolo il parallelogramo $eghf$ prossimo all'altro $EGHF$, e similmente posto; si segnino i punti m, O, ed V, ne' quali i lati del detto parallelogramo $eghf$ tagliano respettivamente le rette AD, ed EG; e si segni anche il punto M, in cui EG sega per mezzo la AD.

Secondo i principj della geometria interiore sarà provato il teorema, qualora si provi, che il parallelogramo prossimo $eghf$, è uguale ad $EGHF$.

Il triangolo eOE è simile al triangolo AME, siccome il triangolo gVG al triangolo AMG; quindi abbiamo $eO.AM\ (Of)::OE.ME\ (MO)$; adunque per la proposizione XIV del VI libro d'Euclide il piccolo parallelogramo $eOMm$ è uguale al piccolo parallelogramo $OEFf$; e aggiungendo ad entrambi il parallelogramo $OfDM$, si vede essere il parallelogramo $efDm$ eguale al parallelogramo $EFDM$.

È manifesto, che similmente si proverà l'eguaglianza de' due parallelogrami $ghDm$, e $GHDM$: laonde aggiungendo respettivamente ai due parallelogrami eguali tra loro $efDm$, ed $EFDM$, i due parallelogrami eguali tra loro $ghDm$, e $GHDM$, rimane provata l'egualità de' due parallelogrami prossimi $eghf$, $EGHF$; adunque, ec. Il che dovea dimostrarsi.

SECONDA DIMOSTRAZIONE (fig. 39 num. 2). — Dalla cima A del dato triangolo si cali su la base la normale AN, che incontra la eg, la EG, e la base BC (prolungata, se sia d'uopo) in l, in L, e in N respettivamente. Il parallelogramo poi $eghf$ rappresenti adesso qualsivoglia parallelogramo iscritto nel triangolo dato BAC, e similmente posto in ordine al parallelogramo $EGHF$.

I due triangoli simili ALE, Ale, e gli altri due triangoli simili AGE, Age, mostrano: $AL.Al::AE.Ae::EG.eg$; adunque $AL\left[\frac{1}{2}AN\right]$ sta ad $Al\left[\frac{1}{2}AN\mp LI\right]$, come $EG\left[\frac{1}{2}BC\right]$ad eg; cosicchè la stessa

$$eg=\frac{1}{2}BC\mp\frac{BC,\,Ll}{AN}.$$

Nel segno doppio si prenderà il superiore, quando l è tra D, ed A, e si prenderà l'inferiore, quando l è tra L, ed N.

Ma $NL=\frac{1}{2}AN\pm Ll$; adunque eg, Nl è uguale ad

$$\frac{1}{4}BC, AN\mp\frac{1}{2}BC, Ll\pm\frac{1}{2}BC, Ll-\frac{BC\times Llq}{AN};$$

vale a dire il parallelogramo $eghf$ è sempre uguale ad

$$\frac{1}{4}BC, AN-\frac{BC\times Llq}{AA}:$$

laddove il parallelogramo $EGHF$ è uguale ad EG, LN, cioè ad $\frac{1}{4}BC, AN$. Adunque lo stesso parallelogramo $EGHF$ è il massimo degl'iscritti, e similmente posti nel triangolo dato BAC. Il che dovea dimostrarsi.

Darò due altre dimostrazioni di questo teorema dopo il suo VII corollario.

Corollario I. — Da ambedue queste dimostrazioni, ed anche più visibilmente dalla seconda, si deduce, che il dato triangolo BAC è duplo del parallelogramo $EGFH$ massimo degl'iscritti, e similmente posti in esso triangolo.

Corollario II (fig. 39 num. 2). — Siano due parallelogrami iscritti nel dato triangolo BAC, tali, che il lato di uno di essi (prolungato, se bisogna) tagli la normale AN sopra il di lei punto medio L, e un lato dell'altro parallelogramo (prolungato ove occorra) tagli la stessa normale sotto il medesimo punto L, in modo che i detti lati de' due parallelogrami distino egualmente dal punto L; io dico, che ambidue gli accennati parallelogrami sono eguali.

Imperciocchè l'espressione di ciascuno di essi, che si vede nella seconda dimostrazione del teorema è $\frac{1}{4}BC, AN-\frac{BC\times Llq}{AN}$; ed Ll qui rappresenta le distanze eguali suddette sotto, e sopra il punto L.

Corollario III (fig. 39 num. 1, e 2). — Se dal vertice A del triangolo dato BAC s'immagina tirata di qua, e di là una parallela infinita alla base BC, e se alla retta EG si circoscrive qualunque altro triangolo, che abbia il vertice in qualsivoglia punto della parallela immagi-

nata, e la base nella retta *BC* prolungata; il parallelogramo *EGHF* sarà eguale al parallelogramo massimo, ec. iscritto nel secondo triangolo immaginato.

Imperciocchè in virtù dell'immaginata parallela la *EG* taglierà per mezzo anche i lati di detto secondo triangolo, e il parallelogramo massimo, ec. iscritto in esso avrà la *EG* per uno de' suoi lati, e la sua base sarà nella *BC* prolungata.

Corollario IV (fig. 39 num. 1, e 2). — Il triangolo dato *BAC* sarà eguale al nuovo triangolo immaginato.

Imperciocchè pel I corollario il triangolo *BAC* è duplo del parallelogramo *EGHF*. Per lo stesso corollario il triangolo immaginato è duplo del parallelogramo massimo, ec., cui è circoscritto; e a questo parallelogramo massimo è uguale il suddetto parallelogramo *EGHF* pel precedente corollario.

Tal verità si conosce ancora, riflettendo che le basi tanto dell'uno, quanto dell'altro triangolo sono doppie della retta *EG*; perchè questa divide per mezzo i respettivi lati de' due triangoli; i quali triangoli sono tra due parallele.

Corollario V (fig. 39 num. 1, e 2). — Dal vertice *A* del triangolo dato *BAC* si concepisca, come sopra, condotta una parallela infinita alla base *BC*; io dico, che tutti quei triangoli circoscritti alla retta *EG*, i quali ànno le loro basi nella retta *BC* prolungata, e non ànno il loro vertice nella parallela immaginata, ma l'ànno sotto, o sopra di essa in qualsivoglia punto del medesimo piano; quei triangoli, dico, sono tutti maggiori del triangolo dato.

Imperciocchè non essendo i lati di tali triangoli tagliati per mezzo della retta *EG*, apparisce in virtù del teorema, e del III corollario, che nè il parallelogramo *EGHF*, nè qualunque parallelogramo, che abbia la retta *EG* per uno de' suoi lati, e la sua base nella retta *BC* prolungata; possono essere il parallelogramo massimo, ec. iscritto in veruno de' suddetti nuovi triangoli, che sono circoscritti alla retta *EC*, che ànno le loro basi nella retta *BC* prolungata, e che non ànno il vertice nella parallela immaginata.

Adunque i parallelogrami massimi, ec., che s'iscriveranno ne' medesimi nuovi triangoli condizionati come sopra, e circoscritti alla retta *EG*, saranno maggiori del parallelogramo *EGHF*, e di qualunque paralle-

logramo, che abbia la retta *EG* per uno de' suoi lati, e la sua base nella retta *BC* prolungata.

Ma pel I corollario gl'istessi nuovi triangoli, che si concepiscono circoscritti alla retta *EG*, che ànno le loro basi nella retta *BC* prolungata, e che non ànno il vertice nella parallela immaginata; gl'istessi triangoli, dico, sono dupli de' parallelogrami massimi, ec., che s'iscriveranno in essi. E pel medesimo primo corollario il triangolo dato *BAC* è duplo del parallelogramo *EGHF*, e conseguentemente di qualunque parallelogramo, che abbia la retta *EG* per uno de' suoi lati, e la sua base nella retta *BC* prolungata.

Adunque ciascuno de' suddetti nuovi triangoli condizionati come sopra, e circoscritti alla retta *EG*, è maggiore del triangolo dato *BAC*.

Corollario VI (fig. 39 num. 1, e 2). Teorema. — I lati del triangolo dato *BAC* siano divisi per mezzo in *E*, ed in *G* dalla retta *EG* parallela alla base *BC*.

Si concepisca una retta mobile nello stesso piano intorno al vertice, o sia polo, *A*, e infinita dall'una, e dall'altra parte.

Io dico, che il triangolo dato *BAC* è il minimo di tutti i triangoli, che sono circoscritti alla retta *EG*, che ànno le loro basi sulla retta *BC* prolungata, e che ànno i loro vertici in qualunque punto della retta mobile; sia pur essa in qualsivoglia sito, purchè non sia parallela alla retta *BC*.

Questo teorema è un'immediata, e chiarissima conseguenza dei corollario precedente.

È facile a conoscere, che gli ultimi due corollarj non concernono quei triangoli, i quali ànno i loro vertici nella retta *EG* prolungata di qua, e di là in infinito, ovvero sotto di essa.

Corollario VII (fig. 39 num. 1). — Il dato triangolo *BAC*, nel quale è scritto il parallelogramo *EGHF* massimo, ec., è il minimo dei triangoli circoscritti al detto parallelogramo massimo, e tali, che abbiano il loro vertice sulla retta *AD* prolungata di là dal punto *A*, ovvero sulla porzione *AM* di essa.

Questo corollario deriva prossimamente dal corollario V; ed è un caso del teorema esposto nell'antecedente corollario.

Terza Dimostrazione del Teorema XX (fig. 39 num. 1). — Sia il tutto come nella figura suddetta, e di più si conduca la *eP* parallela

al lato AC, e incontrante in P la EG. Indi facciasi passare pel punto P la SQ parallela ad EF, e incontrante la eg in S, e la base BC in Q.

Il parallelogramo $eghf$ costa dei due parziali $OVhf$ *finito*, ed $egVO$ *infinitesimo*; e così il parallelogramo $EGHF$ costa dei due parziali $PGHQ$ *finito*, ed $EPQF$ *infinitesimo*. I due parallelogrami parziali *finiti* $OVhf$, e $PGHQ$ sono tra loro eguali, perchè in virtù delle parallele ànno eguali le altezze, ed eguali le latitudini. Rimane pertanto a dimostrare l'egualità dei due parallelogrami parziali *infinitesimi* $egVO$, ed $EPQF$; e allora secondo gli allegati principj dell'interiore geometria sarà provata la maggioranza del parallelogramo $EGHF$ in ordine a tutti i suoi simili, ec.

La similitudine dei due triangoli eOE, AME, e quella degli altri due eEP, AEG fanno conoscere $eO.AM::eE.AE::EP.EG$; e perciò $eO\,(SP).AM\,(PQ)::EP.EG\,(PV)$. Onde per la proposizione XIV del VI d'Euclide il parallelogramo *infinitesimo* $SPVg$ (cioè l'altro equivalente $egVO$) è uguale al parallelogramo $EPQF$. Adunque, ec. Il che dovea dimostrarsi.

PREPARAZIONE per la IV Dimostrazione (fig. 39, n. 1). — Si noti, che quando uno de' lati del parallelogramo $EGHF$ è parallelo ad uno de' lati del triangolo dato BAC (v. g. EF ad AC), che è il caso semplicissimo; allora la terza dimostrazione, e la prima divengono una medesima: perchè in tal caso il punto P cade in O, la retta QS si confonde colla ef, e la retta AD col lato AC del triangolo dato. Di maniera che nella dimostrazione di questo caso non vi sarà bisogno che della similitudine d'una sola coppia di triangoli; e basta la prima parte della prima dimostrazione per provare il teorema interamente nel caso medesimo.

QUARTA DIMOSTRAZIONE del Teorema XX (fig. 39 num. 3). — Nel triangolo dato BAC s'iscriva come nella figura 39 num. 1 il parallelogramo $eghf$ prossimo, e similmente posto all'altro $EGHF$. Si conduca una parallela ad uno de' lati del triangolo, v. g. ad AC (e sia la retta ET) la quale compia il parallelogramo iscritto $EGCT$; prossimo a questo, e posto similmente a lui, iscrivasi il parallelogramo $egCt$.

Facilmente si proverà, conforme testè ò notato, che i due parallelogrami prossimi, e similmente posti tra loro $egCt$, $EGCT$, sono eguali. Ma il parallelogramo $egCt$ è uguale al parallelogramo $eghf$, e il paralle-

logramo $EGCT$ è uguale al parallelogramo $EGHF$; onde i due parallelogrami prossimi, e similmente posti tra loro $eghf$, ed $EGHF$, sono anch' essi eguali. Adunque secondo i più volte allegati principj tanto il parallelogramo $EGCT$, quanto il parallelogramo $EGHF$ sono massimi tra i loro simili. Il che dovea dimostrarsi.

Riflessione sopra la generalità delle dimostrazioni da me date di questo teorema (fig. 39 num. 1). — Essendo arbitrarie le definizioni dei nomi, potrebbe il parallelogramo $EGHF$ chiamarsi iscritto nel triangolo BAC, anche quando i suoi lati EF, GH (o uno, o tutti e due) incontrano la base BC prolungata oltre B, ovvero oltre C. E a questa più larga definizione star si dovrebbe, se si volesse iscrivere il rettangolo massimo in qualsivoglia triangolo.

Tal definizione dunque supposta, le dimostrazioni seconda, terza, e quarta, senza essere punto alterate, provano il teorema XX, ancora concepito secondo questo senso di maggiore generalità. Non così la prima dimostrazione, la quale dovrebbe modificarsi nella seguente guisa: (fig. 39 num. 1).

Quando la parallela AD cade tra B, e C, vale la stessa prima dimostrazione, come si è registrata di sopra.

Ma nel caso, in cui la parallela AD cade sulla BC prolungata verso C; sottraendo respettivamente dai due parallelogrami eguali $efDm$, ed $EFDM$ i due parallelogrami eguali $ghDm$, e $GHDM$, rimarrà dimostrata l'eguaglianza dei due parallelogrami $eghf$, ed $EGHF$.

E nel caso, in cui la parellela AD cade sulla BC prolungata verso B; se si sottraggono respettivamente dai due parallelogrami eguali $ghDm$, e $GHDM$ i due parallelogrami eguali $efDm$, ed $EFDM$, si dimostrerà parimente l'egualità dei due parallelogrami $eghf$, ed $EGHF$.

Sono facili a supplirsi le figure pe' due ultimi casi.

Teorema XXI (fig. 40). — Esprima n qualunque numero intiero, o rotto, positivo, o negativo.

Di tutti i triangoli (v. g. X, ed Y), che ànno eguali gli angoli al vertice, e le basi eguali; io dico, che all'isoscele compete la massima, ovvero la minima somma delle potestà n de' lati.

Avvertimento. — Nel seguente scolio si esporrà un caso, che deve eccettuarsi da questo teorema.

Dimostrazione (fig. 40, e 41). — Si concepisca, che il cerchio $BACE$ (fig. 41) sia quello, cui sono iscritti i triangoli X, ed Y, ec. i quali abbiano per base comune la corda BC, e s'immagini quel lato Aa infinitamente piccolo del poligono infinitilatero, che è la medesima cosa col cerchio $BACE$, s'immagini, dico, quel lato Aa infinitesimo, che è parallelo alla corda BC. Si tirino le rette BA, e Ba; CA, e Ca. I triangoli BAC, BaC della figura 41 (che ànno la loro base, e il loro angolo al vertice eguali alla base, e all'angolo al vertice de' triangoli X, ed Y della figura 40) sono infinitamente vicini: adunque in virtù de' principj della geometria interiore sarà provato, che nel triangolo BAC (fig. 41) la quantità $AB^n + AC^n$ è un massimo, ovvero un minimo, se si proverà, che $aB^n + aC^n$ è uguale ad $AB^n + AC^n$; mentre allora la differenziale infinitesima di $AB^n + AC^n$ sarà nulla, come esiggono i suddetti principj dell'interiore geometria, acciò $AB^n + AC^n$ sia un massimo, ovvero un minimo.

Ora ciò si dimostra speditamente nell'infrascritta maniera:

Imperciocchè (fig. 41) essendo parallele per la costruzione le corde Aa, e BC, l'arco AB è uguale all'arco aC, e conseguentemente la corda AB (uno dei lati del triangolo BAC) è uguale alla corda aC (uno dei lati del triangolo BaC).

Di più l'arco AC (cioè l'$Arc.\ Aa + Arc.\ aC$) è uguale all'arco aB (cioè all'$Arc.\ aA + Arc.\ AB$): adunque la corda AC (altro lato del triangolo BAC) è uguale alla corda aB (altro lato del triangolo BaC).

Si à pertanto quest'equazione: $AB^n + AC^n = aB^n + aC^n$, poichè essendosi dimostrato AB eguale ad aC, ne segue, che aC^n è uguale ad AB^n; ed essendosi dimostrato, che AC è uguale ad aB, parimente ne segue, che aB^n è uguale ad AC^n. Resta dunque provato, che nel triangolo BAC la quantità $AB^n + AC^n$ è un massimo, ovvero un minimo.

In fine è visibile (fig. 41), che lo stesso triangolo BAC è isoscele, perchè tanto l'angolo ABC, quanto l'angolo ACB possono reputarsi aver per misura la metà della metà dell'arco BAC; adunque il teorema è intieramente dimostrato.

Scolio X. — Se l'esponente n significa 2, e nel tempo stesso la corda BC si confonde col diametro, allora l'angolo al vertice de' triangoli X, ed Y, ec. iscritti nel cerchio $BACE$, è retto; ed è noto, che la somma delle potestà 2 dei lati, cioè la somma dei loro quadrati è uguale in tutti i suddetti triangoli. In questo caso adunque non à luogo il teorema.

Corollario I (fig. 41). — Se n rappresenta l'unità positiva, la somma $AB+AC$ è un massimo. Imperciocchè considerando la corda CI infinitamente vicina alla corda CB: il triangolo BIC sarà uno di quelli rappresentati dai triangoli X, ed Y della fig. 40, e la quantità $IB+IC$ sarà evidentemente minore di $AB+AC$; adunque la medesima somma di $AB+AC$ è un massimo.

Corollario II (fig. 41). — Quando n denota qualunque esponente negativo intiero, o rotto, la somma AB^n+AC^n è un minimo. Imperciocchè allora IB^n+IC^n è una quantità infinita, essendo in tali casi IB^n infinito; adunque AB^n+AC^n in tale significazione di n è un minimo.

Corollario III (fig. 41). — Allorchè n esprime l'unità positiva, $AB+AC$ è un massimo; adunque anche $AB+AC+BC$ è un massimo, mentre la base BC è uguale per la supposizione in tutti i triangoli rappresentati dalla figura 40.

È facile ancora a conoscere, che di tutti quanti i triangoli, i quali possono iscriversi nel cerchio $BACE$, ed aver per base la corda BC, il triangolo BAC à l'area massima. Adunque di tutti i triangoli, che ànno la base eguale, e l'angolo al vertice eguale, quello, che è isoscele à la maggior area, e il maggior contorno.

Teorema XXII (fig. 42). — In tutti i triangoli BAC, che ànno l'istessa base BC si possono considerar tre cose, cioè l'angolo al vertice A, l'area, e la somma delle potestà n de' lati, vale a dire

$$AB^n+AC^n,$$

(la n rappresenta come sopra qualunque esponente positivo, o negativo); io dico pertanto, che se una di queste tre cose è costante, e l'altre due variabili, le medesime due altre cose sono un massimo, ovvero un minimo nel triangolo isoscele, che à la stessa base BC.

Prima di venire alla dimostrazione potrà notarsi, che la somma degli angoli $B+C$ alla base à tal connessione con l'angolo al vertice A, che se questo è costante, ovvero un massimo, oppure un minimo, quella è respettivamente costante, ovvero un minimo, oppure un massimo.

Dimostrazione (fig. 42, e 41). — Su la base BC (fig. 42) s'immagini dalla parte sinistra verso B una serie di tutti i triangoli BAC, nei

quali è costante una delle tre cose espresse nel titolo del teorema. Questa serie proceda da sinistra a destra, e i triangoli, che la compongono, siano disposti in modo, che le quantità variabili, le quali ad essi ànno rapporto, passino gradatamente dal più al meno, o dal meno al più con aumentazioni, o diminuzioni infinitesime.

Su la stessa base BC dalla parte destra verso C s'immagini una simigliante serie de' medesimi triangoli, la quale proceda da destra a sinistra, ma i triangoli vi stiano situati in modo inverso, come si rappresenta nella figura 42, dove il triangolo BaC è simile, ed eguale al triangolo BAC, ma è situato inversamente. Cosicchè il triangolo BAC sarà da me chiamato triangolo *diretto*, e il triangolo BaC, triangolo *inverso*.

Concepiscasi ora, che ambe le serie sinistra, e destra siano continuate, finchè s'incontrino, e che queste due serie parziali formino una serie totale, il di cui principio sia verso B, e il fine verso C. È chiaro che nel mezzo della serie totale si troveranno due triangoli tra loro infinitamente vicini, uno de'quali a sinistra sarà diretto, e l'altro a destra sarà inverso, come son quelli inscritti nel cerchio della figura 41, ai quali abbiasi presentemente riguardo.

È altresì chiaro (fig. 41):

Primo, che gli angoli al vertice A, ed a de'due triangoli prossimi BAC, e BaC sono eguali.

Secondo, che sono eguali anche le loro aree, poichè per la supposizione l'angolo inverso aCB è simile ed uguale al diretto ABC.

Terzo (e per la stessa ragione), che il lato AB del triangolo diretto è uguale al lato aC dell'inverso, e l'altro lato AC del primo è uguale all'altro lato aB del secondo: talmentechè AB^n+AC^n è uguale ad aC^n+aB^n, o sia ad aB^n+aC^n.

Laonde ne'due triangoli prossimi della serie intiera, BAC, BaC (fig. 41) la differenza degli angoli al vertice, cioè $A-a$; la differenza dell'aree, cioè $BAC-BaC$; e la differenze delle somme delle potestà de' lati, cioè $(AB^n+AC^n)-(aB^n+aC^n)$ tutte e tre, dico, queste differenze sono eguali a zero.

E perciò in virtù de'principj dell'interiore geometria (fig. 42), se ne'triangoli BAC, che ànno la medesima base una di queste tre cose: angolo al vertice A, area del triangolo, ed AB^n+AC^n; è costante, e l'altre due variabili, ne siegue, che nel triangolo BAC della figura 41 l'altre due cose sono un massimo, ovvero un minimo.

In oltre nell'istesso triangolo BAC della figura 41 l'angolo ABC è uguale all'angolo aCB del triangolo prossimo BaC, che è inverso, e questo medesimo angolo aCB può supporsi eguale all'altro angolo ACB del triangolo BAC a cagione dell'infinita tenuità dell'angolo aCA. Adunque il triangolo BAC della figura 41 può reputarsi isoscele; e quindi rimane intieramente dimostrato il teorema.

Corollario I. — Il teorema precedente è compreso nel presente, con questo di più, che di tutti i triangoli, i quali ànno eguale la base, ed eguale l'angolo al vertice, quello, ch'è isoscele, non solo à la massima, ovvero la minima somma delle potestà n de'lati, ma di più la sua area à la prerogativa di essere un massimo, o un minimo, come nel corollario III dell'antecedente teorema si è provato essere in un caso particolare del teorema medesimo.

Corollario II. — I. Sia il triangolo isoscele BAC (fig. 41), e dal suo vertice A s'immagini condotta la parallela alla sua base BC, la qual parallela si stenda di qua, e di là in infinito. Io dico, che il medesimo triangolo isoscele à la massima, o la minima somma delle potestà n de' lati, e il massimo angolo al vertice rispetto a tutti i triangoli, che ànno la stessa base BC, e il loro vertice nella preaccennata parallela.

II. Imperciocchè tutti questi triangoli ànno la loro area costante, cioè in tutti eguale per cagione delle parallele, tra le quali sono compresi.

Se poi si considera uno di questi triangoli, il di cui vertice incontri la parallela infinitamente lungi dal punto A; è certo, che la somma delle potestà n de' lati di questo triangolo sarà una quantità infinita, allorchè la n significa qualunque esponente positivo; ma sarà una quantità infinitesima quando la n rappresenta un esponente negativo; adunque la somma delle potestà n de' lati del triangolo isoscele, cioè $AB^n + AC^n$ (fig. 41) nel primo caso è un minimo, e nel secondo è un massimo.

III. Quel triangolo infinitamente disteso tra le due parallele, che si è considerato nel secondo articolo, à il suo angolo al vertice infinitamente piccolo; adunque l'angolo al vertice A del triangolo isoscele BAC (fig. 41) è sempre un massimo o denoti la n un esponente positivo, o lo esprima negativo.

Corollario III. Teorema. — Di tutti i triangoli isoperimetri, che ànno l'istessa base, l'isoscele à l'area massima, ed à massimo l'angolo al vertice.

Questo teorema è un caso speciale di un caso generale del teorema XXII.

Imperciocchè in virtù di esso general teorema, quando è costante la somma delle potestà n dei lati, ec. il triangolo isoscele BAC (fig. 41) à l'area massima, ovvero minima, e l'angolo al suo vertice A è un massimo, o un minimo rispetto a tutti i triangoli, che ànno la stessa base BC. Perciò la n significa l'unità positiva, e la somma de' lati è uguale in tutti i suddetti triangoli, essi sono isoperimetri, e l'isoscele à l'area massima, e l'angolo al vertice, massimo.

Si noti, che il luogo de' vertici di tutti i triangoli del teorema speciale esposto nel precedente corollario è un'elisse, i fuochi della quale sono i due punti estremi della base comune di tutti i suddetti triangoli.

Corollario IV. — Dal tenore della dimostrazione di questo teorema XXII, apparirà agl'intendenti, che se delle tre cose espresse nel titolo di esso teorema non solo una, ma due fossero costanti, e la residua variabile; allora questa variabile sarebbe un massimo, ovvero un minimo nel triangolo isoscele.

Esempio. — Il caso espresso nel decimo scolio può essere un esempio di questo corollario; imperciocchè in tutti i triangoli, che ànno per base comune il diametro del cerchio, ed ànno il vertice nella circonferenza, l'angolo al vertice è uguale, perchè sempre retto, ed è parimente eguale la somma de' quadrati de' lati in virtù della proposizione Pittagorica da me in tante maniere dimostrata in questo trattato. Di modo che ora l'esponente n significa $+2$. Abbiamo pertanto costanti due delle tre cose espresse nel titolo di questo teorema XXII; la residua, cioè l'area de' triangoli è variabile. Adunque in vigore del corollario presente, fra tutti questi triangoli rettangoli, quello, che è isoscele, à l'area massima.

Definizione. — Chiamo funzione similare di due variabili u, e z qualunque funzione, dove entrano u, z, e costanti, in maniera che ponendo z in luogo di u, ed u in luogo di z, la funzione ritiene il medesimo aspetto.

V. g. $f \times (au^n + az^n + bu^t z^t)^m + g \times (bu^q + bz^q)^p + cu^r z^r$ sarà una delle funzioni similari di u, e di z. Le lettere m, n, p, q, r, t rappresentano qualunque esponente intiero, o rotto, positivo, o negativo, ed a, b, c, f, g, h significano qualsivoglia quantità costante col suo segno, ed anche zero.

Corollario. — È cospicuo, che le funzioni similari di u, e z sono infinite.

Teorema XXIII (fig. 42). — In tutti i triangoli BAC, che ànno la stessa base BC, considerar si possono infinite cose, cioè l'angolo al vertice A, l'area, e le infinite specie delle funzioni similari di AB, ed AC. Ora io dico, che se una di tutte le sopraddette infinite cose è costante, e le altre son variabili, ciascuna di tutte le altre cose è un massimo, ovvero un minimo nel triangolo isoscele, che à la stessa base BC.

Dimostrazione (fig. 42, e 41). — La dimostrazione di questo teorema è similissima a quella dell'antecedente.

Imperciocchè immaginando, come ivi si è fatto, dalla parte sinistra verso B una serie di tutti i triangoli BAC, ne' quali è costante una delle infinite cose espresse nel titolo del teorema, e immaginando dalla parte destra verso C una serie di tutti i medesimi triangoli, ma inversi. Procedano queste serie parziali una contro l'altra, e siano continuate, finchè s'incontrino: indi concepiscasi la serie totale costituita dalle due serie parziali descritte. Il tutto in somma, come ò distintamente spiegato, dimostrando il teorema XXII.

Con pari chiarezza dunque si conoscerà, che in mezzo di questa serie totale saran situati i due triangoli infinitamente vicini BAC, BaC espressi nella figura 41, il primo de' quali è il diretto, e il secondo l'inverso.

Nell'accennata dimostrazione del precedente teorema ò già provato, che la differenza dell'aree dei due triangoli prossimi BAC, BaC (fig. 41) è nulla. E che è nulla eziandio la differenza degli angoli al vertice degl'istessi due triangoli. Di più sarà evidente ad ogni attento Geometra, che nulla è la differenza di ciascuna specie delle funzioni similari di AB, ed AC (abbiasi riguardo alla fig. 41), e di aB, ed aC, mentre nei due triangoli BAC, BaC simili, ed eguali per l'ipotesi, il lato AB del diretto è uguale al lato aC dell'inverso, e l'altro lato AC di quello è uguale

all'altro lato aB di questo: di modo che sostituendo in ciascuna specie delle funzioni similari di AB, ed AC, la aC in luogo della AB e la aB in luogo della AC, ciascuna di esse funzioni similari serba il medesimo valore di prima.

Adunque pe' più volte allegati principj dell'interiore geometria: se di tutte le infinite cose accennate nel titolo di questo teorema una è costante, e le altre sono variabili: ciascuna di tutte le altre cose è un massimo, ovvero un minimo nel triangolo BAC della figura 41.

In fine ò provato nella dimostrazione del teorema precedente, che il triangolo BAC della figura 41 è isoscele. Adunque il presente teorema è provato intieramente.

Corollario I. — L'antecedente teorema è contenuto nell'immensa ampiezza di questo; perchè $AB^n + AC^n$ è una specie delle infinite funzioni similari di AB, e di AC.

Corollario II. — Se considerar si volessero in particolare diverse specie delle funzioni similari di AB, ed AC potrebbero dedursi de' corollarj ad imitazione di quelli, che ò dedotti dal teorema precedente.

Corollario III. — Chiamando Au, ed Az due qualsivogliano funzioni uniformi di u, e di z, cioè tali, che nell'espressione algebraica denotata da Az entrino le z, e le costanti, come per l'appunto nell'espressione algebraica denotata dalla Au entrano le u, e le medesime costanti.

E similmente chiamando Bu, e Bz; Cu, e Cz; Eu, ed Ez, ec. altrettante coppie di qualsivogliano funzioni uniformi di u, e di z, la seguente formola per cagion d'esempio:

$$f \times (aAu + aAz + hBu \times Bz)^m + g \times (bCu + bCz)^n + cEu + cEz$$

è una delle funzioni similari di u, e di z, e così in infinito.

Laonde tal formola è soggetta al presente teorema, purchè la u significhi le AB, ed aB, e la z esprima le AC, ed aC delle figure 41, e 42, e si rifletta in virtù di quanto ò spiegato di sopra, che rispetto ai due triangoli della figura 41. la $aC\,(z)$ può sostituirsi nella funzione similare in vece della $AB\,(u)$, e la $aB\,(u)$ può in essa funzion similare surrogarsi in cambio di $AC\,(z)$ senza alterare il valore della funzione medesima nel caso dei due triangoli della figura 41, posciachè nello stesso caso $aC\,(z)$ è uguale ad $AB\,(u)$, ed $aB\,(u)$ è uguale ad $AC\,(z)$.

Nell' ultima formola gli esponenti m, ed n, e i coefficienti a, b, c, f, g, h conservano il significato, che ànno nell'altra formola registrata di sopra, come un esempio della definizione.

COROLLARIO IV. — Medesimamente, e per somiglianti ragioni, possono aver luogo nelle funzioni similari soggette al teorema presente anche le coppie di qualsivogliano funzioni trascendenti, ma tra loro uniformi di u, e di z, come per esempio sarebbero $\int Udu$, e $\int Zdz$. Le lettere majuscole V, e Z rappresentano qualsisiano funzioni uniformi, la prima di u, e la seconda di z.

$\int Udu$ adunque denota l'area di una curva, la di cui ordinata è V, ed u l'abscissa, come pure $\int Zdz$ esprime egualmente l'area della medesima curva, la quale à Z per ordinata, e z per abscissa.

Le u si prendano (fig. 42) dalla parte di B, dove ànno l'origine continuando a prenderle da B verso C, e le z si prendano similmente dalla parte di C dove ànno l'origine, continuando a prenderle da C verso B.

Ora nei due triangoli della figura 41, $aC(z) = AB(u)$, ed $aB(u) = AC(z)$. Perciò nel medesimo caso dei due triangoli della figura 41, potrà surrogarsi la $aC(z)$ in vece di $AB(u)$ nell'espressione dell'ordinata V, e dell'abscissa u: così anche potrà sostituirsi $aB(u)$ in luogo di $AC(z)$ nell'espressione dell'ordinata Z, e dell'abscissa z, senza che in detto caso si muti il valore di $\int Udu + \int Zdz$, ovvero di $\int Udu \times \int Zdz$. Imperciocchè rispetto al presente caso dei due triangoli della fig. 41 si dee considerare, che *nella serie totale composta di triangoli diretti, ed inversi spiegata di sopra*, precedono la aC tante z, principiando dalla parte di C, e seguendo verso B, quante u precedono la AB, cominciando dalla parte di B, e proseguendo verso C: come pure, che ciascuna delle z precedenti la aC è uguale a ciascuna delle u, che precedono la AB, ad esse z corrispondono: di maniera che l'area curvilinea rappresentata da $\int Udu$ si trasforma nell'area curvilinea rappresentata da $\int Zdz$.

Parimente (fig. 41) debbono nella serie totale precedere la aB tante u, cominciando dalla parte di B, e continuando verso C, quante z precedono la AC principiando dalla parte di C, e continuando verso B; e ciascuna delle u, che precedono la aB, è uguale a ciascuna delle z corrispondenti ad esse u, e precedenti la AC: cosicchè l'area curvilinea espressa da $\int Zdz$ si trasforma nell' area curvilinea espressa da $\int Udu$.

Quindi si fa manifesto, che per qualunque numero di coppie delle funzioni trascendenti, e uniformi di u, e di z, essa funzion similare rimane inalterata nel più volte mentovato caso della figura 41.

Scolio XI. — I. Nell'esempio del quarto corollario antecedente in vece di $\int Udu$ può assumersi $\int Udu \pm K$, e in vece di $\int Zdz$ può assumersi $\int Zdz \pm Q$.

Le lettere K, e Q significano quantità costanti eguali, e può avvenire, che le medesime costanti eguali K, e Q esprimano aree curvilinee infinite.

II. Il logaritmo di u, e il logaritmo di z sono compresi nell'esempio dello stesso corollario IV, perchè $log. u = \int \frac{du}{u}$, e $log. z = \int \frac{dz}{z}$; talchè in questo caso $U = \frac{1}{u}$, e $Z = \frac{1}{n}$.

III. Possono concepirsi infinite specie di funzioni trascendenti, e uniformi della u, e della z, il *trascendentismo* (dirò così) delle quali sia sempre più composto in modo, che esse potrebbero appellarsi *sopratrascendenti*, v. g. $\int Mdu \times Udu$, e $\int Ndz \times Zdz$; ovvero $\int Fdu \times \int Mdu \times Udu$, e $\int Gdz \times \int Ndz \times Zdz$, ec., ec.

M, ed N sono funzioni uniformi di u, e respettivamente di z, e così F, e G, ec., ec.

È facile a comprendersi, che la dimostrazione esposta nel corollario IV si estende anche alle coppie di tali funzioni *sopratrascendenti*, e uniformi di u, e di z, le quali possono aver luogo nelle funzioni similari soggette al teorema XXIII.

IV. È altresì agevole a conoscersi, che le funzioni trascendenti, o *sopratrascendenti* di u, e di z possono essere collocate nella funzion similare delle stesse u, e z anche sotto esponenti intieri, o rotti, positivi, o negativi, e starvi incluse entro il vincolo dell'esponente, e fuori, sole, o frammischiate (per mezzo de' segni dell'addizione, o della sottrazione, della moltiplicazione, o della divisione) con altre funzioni algebraiche uniformi di u, e di z, e con altre funzioni trascendenti, o *sopratrascendenti* delle medesime u, e z; purchè rimanga illesa l'essenza della funzion similare, vale a dire, purchè ponendo in essa z, e dz in cambio di u, e di du, e versa-vice u, e du in luogo di z, e di dz, non si muti l'aspetto della stessa funzion similare.

V. Ciò che si è spiegato sinora basterà per dare un saggio ai lettori della generalità del teorema XXIII. Io con piacere ò ritrovati, e dimo-

strati sì esso, come gli altri due, ond'è immediatamente preceduto, non solo per la loro estensione, e bellezza, ma ancora pel metodo singolare, che ò tenuto, in virtù di cui la cognizione di dette verità si rende quasi intuitiva agl'intendenti.

Teorema XXIV. — Di tutti i triangoli iscritti nel medesimo cerchio, l'equilatero à il massimo contorno, e l'area massima.

Di tutti i triangoli, che sono fra loro di egual contorno, l'equilatero à l'area massima.

Dimostrazione della prima parte. — I. I triangoli iscritti nel medesimo cerchio non ànno costante il loro contorno, nè costante l'area loro; e tra essi ve ne son di quelli, che ànno il contorno infinitamente piccolo; come pur di quelli, che ànno l'area infinitamente piccola. Adunque fra i triangoli iscritti nel medesimo cerchio vi è qualche triangolo, che à il massimo contorno, e vi è ancora qualche triangolo, che à l'area massima.

II. In ciascuno di tutti quanti i triangoli non-equilateri, che sono iscritti nel medesimo cerchio, si può considerar come base un lato in modo, che gli altri due lati di esso non siano eguali tra loro. E quindi in virtù del III corollario del teorema XXI, si può iscrivere nello stesso cerchio, e sopra la medesima base di ciascuno de' suddetti triangoli (in tal guisa considerati) un triangolo, che abbia maggior contorno; come pure un triangolo, che abbia maggior area.

E in effetti, il triangolo isoscele descritto su la base istessa di ognuno degli accennati triangoli, ed iscritto nel medesimo cerchio, à l'una, e l'altra di queste maggioranze.

Perciò di tutti quanti i triangoli non-equilateri, che sono iscritti nel medesimo cerchio, niuno è il triangolo del massimo contorno, e niuno è il triangolo dell'area massima.

III. Adunque dovendo esservi, pel primo articolo, fra i triangoli nel medesimo cerchio iscritti, qualche triangolo, che abbia il massimo contorno, e qualche triangolo, che abbia l'area massima; al triangolo equilatero iscritto nel medesimo cerchio competono amendue queste prerogative. Il che dovea primieramente dimostrarsi.

Dimostrazione della seconda parte simile a quella della prima.

I. I triangoli tra loro isoperimetri, vale a dire di egual contorno, non ànno l'area costante; e tra essi ve ne sono, che ànno l'area infinitamente piccola. Adunque fra i triangoli, che sono tra loro di egual contorno, qualche triangolo vi è, che à l'area massima.

II. In ciascuno di tutti i triangoli non-equilateri, che son tra loro di egual contorno, prendasi per base un lato in maniera, che gli altri due lati di esso non siano tra loro eguali. Egli è visibile pel IV corollario del teorema XXII, che rispetto ad ognuno de' triangoli così considerati, può assegnarsi un triangolo di egual contorno, che abbia l'area maggiore. E tale è il triangolo isoscele descritto sulla base istessa dei suddetti triangoli.

III. Adunque de' triangoli non-equilateri di egual contorno, niuno à l'area massima. Resta pertanto il solo triangolo equilatero, cui fra i triangoli di egual contorno possa competere sì fatta prerogativa. Adunque in vigore del primo articolo gli compete. Il che dovea secondariamente dimostrarsi.

XIV.

PROBLEMA CONCERNENTE IL CALCOLO DIFFERENZIALE

RELATIVO AL TRATTATO DE' TRIANGOLI.

Vengo ora al problema, che ò accennato nel settimo scolio.

PROBLEMA (fig. 43). — Dato qualsivoglia angolo rettilineo D, e tirata da qualunque punto M di uno de' suoi lati DA la retta ME parallela all'altro lato DC, trovare la curva v. g. MGg, di cui le abscisse abbiano per origine il punto M, le ordinate v. g. HG siano parallele a DA, e le tangenti v. g. GC seghino i lati DA, DC, e la ME in maniera, che di tutte le rette, le quali possono passare pel punto E, la sottotesa AC porzione della tangente GC tagli la minima, o la massima somma delle potestà n de' lati, cioè in maniera che DA^n+DC^n sia un minimo, ovvero un massimo.

La lettera n significa qualsivoglia numero intiero, o rotto, positivo, o negativo, a riserva dell'unità negativa.

AVVERTIMENTO. — Prima di tentar la soluzione di questo problema, convien sciorre il seguente.

Altro problema, che serve di preparazione (fig. 38). — Supposto il medesimo significato di n: Dato qualsivoglia angolo D, e dentro esso il punto E, tirare la sottotesa AC tale, che passi pel detto punto E, e tagli i lati DA, e DC in modo, che DA^n+DC^n sia un minimo, ovvero un massimo.

SOLUZIONE. — Suppongo, che la retta AC soddisfaccia alla questione, tiro la parallela ME al lato DC, e chiamo

$$MA\ (z),\ ME\ (h),\ \text{ed}\ MD\ (c).$$

La similitudine de' triangoli AME, ADC mi dà

$$AM\ (z).ME\ (h)::AD\ (z+c).DC=\frac{h}{z}\times(z+c).$$

Dunque l'espressione del minimo è questa: $(z+c)^n+\frac{h^n}{z^n}\times(z+c)^n$, che differenziata, ed eguagliata a zero produce

$$ndz\times(z+c)^{n-1}+ndz\times(z+c)^{n-1}\times\frac{h^n}{z^n}-ndz\times(z+c)^n\times\frac{h^n}{z^{n+1}}=0.$$

Dividendo quest'equazione per $ndz\times(z+c)^{n-1}$ ne risulta

$$1+\frac{h^n}{z^n}-\frac{h^n}{z^{n+1}}\times(z+c)=0,$$

e moltiplicando per z^{n+1}, abbiamo $z^{n+1}+h^nz-h^nz-ch^n=0$, donde si deduce $z=\sqrt[n+1]{ch^n}$, vale a dire $z=h^{\frac{n}{n+1}}c^{\frac{1}{n+1}}$, ovvero $z=h^{\frac{n}{n+1}}q$, ponendo $q=c^{\frac{1}{n+1}}$. Il che dovea ritrovarsi.

Corollario I (fig. 38). — Se n esprime un numero intiero positivo, la linea ricercata $MA\,(z)$ è la prima di tante medie proporzionali tra $ME\,(h)$ ed $MC\,(c)$, quante unità contiene il numero n.

Corollario II (fig. 38). — Posta la significazione dell'esponente n espressa nel precedente corollario, si conduca la EN parallela al lato DC, la quale tagli in N l'altro lato DC; io dico, che la retta NC è la prima di tante medie proporzionali tra MD, o sia $EN\,(c)$, ed $ME\,(h)$, quante unità contiene il numero n.

Imperciocchè per la simiglianza de' triangoli AME, ENC si ottiene

$$AM\left(\sqrt[n+1]{h^nc}\right).ME\,(h)::EN\,(c).NC=\frac{hc}{\sqrt[n+1]{h^nc}},\ \text{ma}\ \frac{hc}{\sqrt[n+1]{h^nc}}=\frac{\sqrt[n+1]{h^{n+1}c^{n+1}}}{\sqrt[n+1]{h^nc}},$$

e questa quantità equivale a $\sqrt[n+1]{c^nh}$; adunque $NC=\sqrt[n+1]{c^nh}$.

Scolio XII. — I. Per discernere quando la somma DA^n+DC^n sia un minimo, ovvero un massimo, fa d'uopo considerare, che l'infrascritta quantità

$$\text{(V)}\qquad ndz\times(z+c)^{n-1}+ndz\times(z+c)^{n-1}\times\frac{h^n}{z^n}-ndz\times(z+c)^n\times\frac{h^n}{z^{n+1}}$$

è l'espressione della differenziale infinitesima di

$$DA^n\,(z+c)^n+DC^n\left[\frac{h^n}{z^n}\times(z+c)^n\right];$$

e che l'espressione (V) si riduce all'infrascritta (X) quando n è negativa, cioè quando $n=-m$.

$$(X)\quad -mdz\times(z+c)^{-m-1}-mdz\times(z+c)^{-m-1}\times\frac{z^m}{h^m}+mdz\times(z+c)^{-m}\times\frac{z^{m-1}}{h^m}\,.$$

II. S'immagini, che AM (z) sia infinitamente esigua, e quando n è positiva la quantità (V) diverrà $-nc^n dz\times\frac{h^n}{z^{n+1}}$, perchè tutte le altre quantità, che entrano nell'espressione (V) sono incomparabilmente minori di questa, la quale per essere negativa, palesa, che le somme variabili DA^n+DC^n procedono decrescendo; e perchè in un caso scoperto nella soluzione del problema la differenza della somma DA^n+DC^n è nulla, se ne desume l'indizio, che nello stesso caso la medesima somma è un minimo.

III. All'istesso modo, applicando la supposizione di AM (z) infinitamente piccola all'espressione di (X), quando la m è maggiore dell'unità, essa espressione diventa $-mdz\times c^{-m-1}$; attesochè tutte le altre quantità dell'espressione di (X) sono come nulle rispetto a questa, la quale, come negativa, mostra, che le somme variabili $DA^{-m}+DC^{-m}$ procedono anche in questa ipotesi decrescendo, laonde essendosi nel scioglimento del problema trovato il caso, che la differenza della somma $DA^{-m}+DC^{-m}$ è uguale a zero, questo è il contrassegno, che nel caso medesimo la stessa somma è un minimo.

IV. Ma quando la m è minore dell'unità, la supposizione di AM (z) infinitesima cangia l'espressione (X) nella seguente $+\frac{mdz\times c^{-m}\times z^{m-1}}{h^m}$; poichè tutte l'altre quantità dell'espressione (X) si annullano rispetto a questa, la quale perciò fa conoscere, che le somme variabili $DA^{-m}+DC^{-m}$ vanno in questa supposizione crescendo, e perchè mediante la soluzion del problema già si è trovato il caso, in cui la differenza di $DA^{-m}+DC^{-m}$ è nulla, ciò indica, che nello stesso caso la medesima somma è un massimo.

V. Nell'ipotesi di n positiva può conoscersi con più spedita maniera, che la somma DA^n+DC^n è un minimo; attesochè quando il punto A è prossimo al punto M la quantità DA^n+DC^n diviene equivalente a DM^n+DC^n, vale a dire infinitamente grande a cagione della DC, che allora diventa infinita.

Corollario III (fig. 38). — Se n significa 1, AM sarà $\sqrt{hc}$, e la NC sarà parimente $\sqrt{ch}$, vale a dire $AM=NC$, e per cagione dei triangoli simili AME, ENC, sarà $AE=EC$.

Corollario IV (fig. 38). — Se n denota 2, la AM sarà $\sqrt[3]{h^2 c}$, e la NC sarà $\sqrt[3]{c^2 h}$; vale a dire AM sarà la prima, ed NC la seconda delle due medie proporzionali tra $MD\,(h)$, ed EN, o sia $MD\,(c)$; poichè la quattro rette infrascritte $ME\,(h).AM\,(\sqrt[3]{h^2 c}) :: NC\,(\sqrt[3]{h\,c^2}).EN\,(c)$ sono in proporzione geometrica continua.

Le verità di questo, e del precedente corollario nascono immediatamente dai corollarj I, e II senza nuova ispezione d'espressioni litterali.

Corollario V (fig. 33, e 38). — Quando l'angolo dato è retto, alla minima somma de'quadrati de' lati, cioè a DA^2+DC^2 minimo, corrisponde il minimo quadrato AC^2 della sottotesa, che passa pel punto E dato dentro l'angolo medesimo, e conseguentemente a DA^2+DC^2 minimo corrisponde la minima sottotesa AC, che passi pel punto E.

Adunque la minima sottotesa, che passi pel punto E dato dentro l'angolo retto D taglia in A, e in C i due lati di esso in guisa, che AM è la prima, ed NC la seconda delle due medie proporzionali tra ME, ed EN, o sia MD.

E questa è un'altra dimostrazione del teorema XVII.

Teorema XXV (fig. 43). — Salva la significazione dell'esponente n espressa nel problema antecedente.

Sia dentro l'angolo dato ADC il punto E, per cui si concepisca passare la retta AC segante in A, e in C i lati dell'angolo dato, e tale, che AE stia ad EC, come DC^n sta a DA^n; io dico, che la somma DA^n+DC^n è un minimo, ovvero un massimo.

Dimostrazione. — Poichè si à quest'equazione:

$$\text{(Z)} \qquad \frac{AE}{EC}=\frac{DC^n}{DA^n}$$

se in luogo di $\frac{AE}{AC}$ si pone il suo valore $\frac{AM}{MD}$, e in luogo di $\frac{DC}{DA}$ il suo valore $\frac{ME}{MA}$ (i quali valori si traggono dalla simiglianza de' triangoli AME, ADC), l'equazione suddetta prende questa sembianza:

$\frac{AM}{MD}=\frac{ME^n}{AM^n}$, e però $AM^{+n+1}=MD\times ME^n$, e quindi

$$AM=\sqrt[n+1]{MD\times ME^n},$$

cioè $z=\sqrt[n+1]{ch^n}$. Adunque per quello, che si è trovato nel scioglimento del problema, DA^n+DC^n è un minimo, ovvero un massimo. Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I. — Se la n fosse negativa, cioè se fosse $n=-m$, in virtù dell'equazione (Z) si avrebbe

$$\text{(Y)}\qquad \frac{AE}{EC}=\frac{DA^m}{DC^m},$$

e la somma $DA^{-m}+DC^{-m}$ sarebbe un minimo, ovvero un massimo.

Corollario II. — Se nell'equazione (Z) la n è positiva, la quantità DA^n+DC^n è un minimo. Se nell'equazione (Y) la m è maggiore dell'unità, $DA^{-m}+DC^{-m}$ è un minimo:

Ma è un massimo, se nell'istessa equazione (Y) la m è minore dell'unità.

L'intelligenza di questo corollario dipende dalle osservazioni fatte nello scolio XII.

Soluzione del problema principale (fig. 43). — Passando allo scioglimento del problema principale, io continuerò a chiamare AM (z), ME (h), ed MD (c); supporrò ancora $q=c^{\frac{1}{n+1}}$, e il problema si ridurrà a trovare una curva, v. g. MGg tale, che ciascuna delle sue tangenti, v. g. GC tagli AM eguale a $q\sqrt[n+1]{ME^n}$, cioè tale, che sia

$$z=c^{\frac{1}{n+1}}\times h^{\frac{n}{n+1}}=q\times h^{\frac{n}{n+1}}.$$

Ora abbiamo la suttangente $\frac{ydx}{dy}$ eguale ad $h+x$, donde nasce

$$\text{(A)}\qquad \frac{dy}{y}=\frac{dx}{h+x}.$$

Per la similitudine de' triangoli EMA, EHG avremo $EM(h).MA(z)$ o sia $qh^{\frac{n}{n+1}}::EH\,(h+x).HG\,(y)$, e perciò $y=\frac{qh^{\frac{n}{n+1}}}{h}\times(h+x)$, oppure:

$$\text{(B)}\qquad y=qh^{\frac{-1}{n+1}}\times(h+x).$$

Adunque avremo eziandio:

$$Log.\, y = log.\, qh^{\frac{-1}{n+1}} \times (h+x),$$

e conseguentemente:

$$Log.\, y = log.\, h^{\frac{-1}{n+1}} + log.\, q + log.\, h+x;$$

differenziando quest'ultima equazione, si à:

$$\frac{dy}{y} = \frac{-1}{n+1} \times \frac{dh}{h} + \frac{dh}{h+x} + \frac{dx}{h+x}.$$

E questo valore di $\frac{dy}{y}$ paragonato con quello dell'equazione (A) produce la seguente:

$$\frac{-1}{n+1} \times \frac{dh}{h} + \frac{dh}{h+x} + \frac{dx}{h+x} = \frac{dx}{h+x},$$

cioè togliendo dall'una, e l'altra parte $\frac{dx}{h+x}$, e dividendo per dh l'uno, e l'altro membro: $\frac{-1}{n+1} \times \frac{1}{h} + \frac{1}{h+x} = 0$, equazione, che trasposta, e trattata a dovere partorisce quest'altra: $h+x=nh+h$, vale a dire:

(C) $$h = \frac{x}{n}.$$

Da questa equazione derivano le due infrascritte:

$$h^{\frac{-1}{n+1}} = n^{\frac{1}{n+1}} \times x^{\frac{-1}{n+1}}, \text{ ed } h+x = \frac{n+1}{n} \times x,$$

i quali valori di $h^{\frac{-1}{n+1}}$, e di $h+x$ surrogati nell'equazione (B) dànno

$$y = (n+1) \times n^{-1+\frac{1}{n+1}} \times q \times x^{1-\frac{1}{n+1}},$$

cioè:

$$y = (n+1) \times n^{\frac{-n}{n+1}} \times q \times x^{\frac{n}{n+1}},$$

oppure con espressione più semplice:

(D) $$y = (n+1) \times q \times \left[\frac{x}{n}\right]^{\frac{n}{n+1}}.$$

Quest'equazione esprime la natura della curva, quando l'esponente n è positivo, ma allorchè è negativo, vale a dire quando $n = -m$,

dee considerarsi l'equazioni (C), e osservare, che le abscisse (x) possono divenir negative, e prendersi sulla linea ME prolungata; la ME però dovendo conservare la sua situazione, e stendersi sempre verso una banda, il valore di ME (h) sempre à da essere positivo nell'equazione (C); adunque allorchè $n = -m$, è forza, che la x sia negativa anch'essa, acciò il valore di h sia $\frac{x}{m}$, cioè positivo.

Perciò quando $n = -m$, la curva ricercata avrà da estendersi dentro l'angolo DME, ovvero dentro l'angolo AME.

Si noti adesso, che quando essa curva si estende dentro l'angolo DME, non solo le sue abscisse (x), ma anche le sue ordinate (y) sono negative, perchè in questo caso le y si estendono dalla parte opposta alla HG, ordinata dalla curva MGg.

Quando poi le curva richiesta si estende dentro l'angolo AME, le sue ordinate (y) saranno positive, mentre si estenderanno dalla stessa banda di HG.

Si noti in fine, che in tutti quanti i casi $\frac{x}{n}$ è sempre una quantità positiva, attesochè nel caso di n positiva, la x pure è positiva, e nel caso di $n = -m$, la x è negativa, conforme si è già osservato, e si à

$$\frac{-x}{-m} = \frac{x}{m}.$$

Dopo tutto questo comprenderanno gl'intendenti, che ponendo $-m$ in vece di n dell'equazione (D), essa prende questa forma:

$$\text{(E)} \qquad \mp y = (1-m) \times q \times \left[\frac{x}{m}\right]^{\frac{-m}{1-m}}.$$

Nel segno doppio il superiore è pel caso, in cui la curva si estende dentro l'angolo DME, e l'inferiore pel caso, in cui la curva si estende dentro l'angolo AME.

Dunque nel primo di questi due casi dell'equazione (E) nasce questa:

$$\text{(F)} \qquad y = (m-1) \times q \times \left[\frac{x}{m}\right]^{\frac{m}{m-1}},$$

che serve quando m è maggiore dell'unità.

E nel secondo di essi due casi dall'equazione (E) deriva quest'altra:

(G) $$y=(1-m)\times q\times\left[\frac{x}{m}\right]^{\frac{-m}{1-m}},$$

che serve quando m è minore dell'unità.

Prendendo in vece di q il suo valore $c^{\frac{1}{n+1}}$ è manifesto:

Primo, che se si alzano alla potestà $n+1$ i due membri dell'equazione (D), ne viene

(H) $$y^{n+1}=\frac{1}{n^n}\times(n+1)^{n+1}\times c\times x^n.$$

Secondo, che elevando alla potestà $m-1$ i due membri dell'equazione (F), si à

(I) $$y^{m-1}=\frac{1}{m^m}\times(m-1)^{m-1}\times\frac{1}{c}x^m.$$

Terzo, che erigendo alla potestà $1-m$ i due membri dell'equazione (G), si conseguisce $y^{1-m}=m^m\times(1-m)^{1-m}\times c\times x^{-m}$, ovvero

(K) $$y^{1-m}x^m=m^m\times(1-m)^{1-m}\times c.$$

È altresì manifesto:

Primo, che l'equazione (H) è pel caso di n positiva, e rappresenta una specie di linea parabolica, che si estende dentro l'angolo HMA.

Secondo, che l'equazione (I) è pel caso di n negativa, allorchè $n=-m$, ed m è maggiore dell'unità. E la stessa equazione (I) rappresenta anch'essa una curva del genere parabolico, che però si estende dentro l'angolo DME.

Terzo, che l'equazione (K) è pel caso di n negativa, quando $n=-m$, ed m è minore dell'unità.

E la medesima equazione (K) rappresenta una specie di linea iperbolica, la quale si estende dentro l'angolo AME, ed à i lati di esso per asimptoti.

Ecco dunque pienamente risoluto il problema principale.

Corollario I. — Per l'osservazione fatta nel secondo, e quinto articolo dello scolio XII, la curva parabolica dell'equazione (H) (supposto l'esponente n positivo) taglia colle sue tangenti la minima somma DA^n+DC^n.

Per l'osservazione del terzo articolo dello stesso scolio, la curva parabolica dell'equazione (I) (supposto m maggiore dell'unità) taglia colle sue tangenti la minima somma $DA^{-m}+DC^{-m}$.

E finalmente per l'osservazione del quarto articolo del medesimo scolio XII la curva iperbolica dell'equazione (K) (supposto m minore dell'unità) taglia colle sue tangenti la massima somma $DA^{-m}+DC^{-m}$.

Esempio I (fig. 43). — Se $n=1$, l'equazione (H) diviene $y^2=4cx$, ed è alla parabola conica, che si estende dentro l'angolo HMA, le tangenti della quale tagliano la minima somma de' lati DA, e DC dell'angolo dato D, cioè il minimo $DA+DC$.

Esempio II (fig. 43). — Se $n=-2$, la m sarà eguale a 2, e l'equazione (I) diverrà $y=\frac{1}{4c}\times x^2$, vale a dire $x^2=4cy$; che parimente è alla parabola conica, la quale si estende dentro l'angolo DME, e le di cui tangenti tagliano la minima somma delle potestà -2 de' lati DA, e DC dell'angolo dato D, cioè il minimo $\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DC^2}$.

In questi due esempj si contengono due belle proprietà della parabola Apolloniana.

Esempio III (fig. 43). — Se $n=-\frac{1}{2}$, vale a dire se $m=\frac{1}{2}$, l'equazione (K) diventa $\sqrt{yx}=\frac{1}{2}c$, ovvero $yx=\frac{1}{4}c^2$, ed è all'iperbola conica, la quale à per asimptoti i lati dell'angolo AME, e le sue tangenti tagliano la massima somma delle potestà $-\frac{1}{2}$ de' lati DA, e DC dell'angolo dato D, cioè il massimo $\frac{1}{\sqrt{DA}}+\frac{1}{\sqrt{DC}}$.

E questa è una bella proprietà dell'iperbola Apolloniana.

Esempio IV (fig. 43). — Se $n=\frac{1}{2}$, e l'equazione (H) fa conoscere $y^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}cx^{\frac{1}{2}}$, cioè $y^3=\frac{1}{4}c^2x$, che appartiene alla parabola cubica primaria, le di cui tangenti tagliano la minima somma della potestà $\frac{1}{2}$ de' lati, vale a dire $\sqrt{DA}+\sqrt{DC}$ è un minimo, e la curva si estende dentro l'angolo HMA.

Esempio V (fig. 43). — Se $n = -\frac{1}{3}$, cioè se $m = \frac{1}{3}$, l'equazione (K) mostra $y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{4}{27}} \times c$, vale a dire $y^2x = \frac{4c^3}{27}$ che spetta all'iperbola solida, la quale per conseguenza è dotata della proprietà, che le sue tangenti tagliano la massima somma delle potestà $-\frac{1}{3}$ de' lati, cioè $\frac{1}{\sqrt[3]{DA}} + \frac{1}{\sqrt[3]{DC}}$ è un massimo. E la curva à per asimptoti i lati dell'angolo AME.

Esempio VI (fig. 43). — Se $n = -\frac{2}{3}$, vale a dire se $m = \frac{2}{3}$ l'equazione (K) esibisce $y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{4}{27}} \times c$, cioè $yx^2 = \frac{4c^3}{27}$, appartenente all'iperbola solida, le tangenti della quale tagliano la massima somma delle potestà $-\frac{2}{3}$ de' lati, vale a dire $\frac{1}{\sqrt[3]{DA^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{DC^2}}$ è un massimo.

Potranno i lettori dedurre dall'equazioni (H), (I), e (K) quanti esempj vorranno.

Corollario II. — Quando $n = -t - 1$, cioè quando $m = t + 1$, l'equazione (I) maneggiata a dovere dà $x^{t+1} = \frac{1}{t^t} \times (t+1)^{t+1} \times cy^t$ per la curva parabolica, che si estende dentro l'angolo DME, alla quale corrisponde il minimo $\frac{1}{DA^{t+1}} + \frac{1}{DC^{t+1}}$.

Corollario III (fig. 43). — E quando $n = t - 1$, cioè quando $m = 1 - t$, l'equazione (K) somministra $x^{1+t}y^t \times (1-t)^{1-t} \times c$ per la curva iperbolica, che à per asimptoti i due lati dell'angolo AME, alla quale corrisponde il massimo $DA^{t-1} + DC^{t-1}$.

Dee notarsi, che nel secondo corollario la lettera t esprime qualunque numero positivo intiero, o rotto.

Ma nel terzo corollario la t rappresenta qualsivoglia numero rotto positivo, e minore dell'unità.

XV.

CONTINUAZIONE
DEL TRATTATO DE' TRIANGOLI RETTILINEI.

Teorema XXVI (fig. 44). — Sia dato qualunque triangolo BAC, e sui lati BA, ed AC di esso sieno formati i respettivi parallelogrami equilateri simili $BADH$, e $CAEG$, talmente disposti, che i loro angoli alla comune cima A non siano ambidue acuti, nè ambidue ottusi; congiungasi poscia la retta DE; io dico, che il nuovo triangolo DAE è uguale al dato triangolo BAC.

Dimostrazione. — S'immagini, che il triangolo DAE si rivolga intorno il punto A, finchè uno de' lati di esso v. g. AE si adatti ad uno de' lati del triangolo dato BAC v. g. al lato AC; egli è visibile, che l'altro lato DA del triangolo DAE si adatterà alla continuazione del lato BA del triangolo BAC; attesochè l'angolo DAE è il complemento a due retti dell'angolo BAC; come apparisce a chi riflette, che essendo $ang. BAC + ang. BAD + ang. DAE + ang. EAC$ eguali a quattro retti, ed essendo in oltre simili i due parallelogrami equilateri BD ed AG, e disposti come nell'esposizione del teorema, si ànno $ang. BAD + ang. HBA$ (EAC) eguali a due retti, cosicchè sottraendo questa seconda equazione dalla prima, rimangono $ang. BAC + ang. DAE$ eguale a due retti.

Pertanto il triangolo DAE, giunto che sia nella posizione immaginata, diverrà il triangolo CAF, il quale per conseguente avrà il suo lato AF eguale al lato BA del triangolo dato BAC.

Considerando ora le rette eguali BA, ed AF come basi de' respettivi triangoli BAC, e CAF, è manifesta l'eguaglianza di questi medesimi due triangoli, a' quali competono basi eguali, e una stessa perpendicolare dal comun vertice C.

Laonde è manifesta del pari l'eguaglianza dei due triangoli BAC, e DAE. Il che dovea dimostrarsi.

Senza immaginarsi il rivolgimento del triangolo DAE intorno al punto A, basta prolungare, e raddoppiare uno de' lati del triangolo

dato BAC, v. g. il lato AB, prendendo sul prolungamento di esso la AF eguale alla AB, e conseguentemente alla AD, e poi congiungere la retta CF.

Imperciocchè si proverà in simil guisa, che l'angolo CAF è uguale all'angolo DAE, vale a dire, che ciascuno di questi due angoli è il complemento a due retti dell'angolo BAC, e quindi che i due triangoli DAE, CAF sono simili, ed eguali.

Si proverà pur come sopra che il triangolo CAF è uguale al triangolo dato BAC; adunque, ec.

Corollario I (fig. 44). — Il triangolo dato BAC è il triangolo CAF, vale a dire il triangolo DAE sono metà di due respettivi parallelogrami simili, ed eguali.

Corollario II (fig. 45). — Se si forma anche sulla base BC del triangolo dato BAC il terzo parallelogramo equilatero $BCIL$ simile agli altri due parallelogrami equilateri (tra loro simili) BD, ed AG, e disposto come essi, cioè in modo che gli angoli alla comune cima C non siano nè ambidue acuti, nè ambidue ottusi, e parimente non siano ambidue acuti, nè ambidue ottusi gli angoli alla comune cima B; e se di più si congiungono le rette GI, ed LH; egli è chiaro, che il lato AB del triangolo dato BAC farà figura di base rispetto ai due lati AC, e CB dello stesso triangolo dato, e rispetto ai due parallelogrami equilateri simili AG, e BI, ed è egualmente chiaro, che il lato AC del triangolo dato BAC farà figura di base rispetto ai due lati AB, e BC del medesimo triangolo dato, e rispetto ai due parallelogrami equilateri simili CL, e BD.

Si vedrà dunque manifestamente, che ciascuno de' nuovi triangoli GCI, ed LBH è uguale al triangolo dato BAC. Per lo che tutti e quattro i triangoli BAC, DAE, GCI, ed LBH sono eguali tra loro.

Corollario III. — Quando i parallelogrami equilateri simili $BADH$, e $CAEG$ della fig. 44 sono rettangoli, cioè quando essi sono due quadrati, è evidente, che i loro angoli alla comune cima A non sono nè ambidue acuti, nè ambidue ottusi, vale a dire $ang.\,BAD + ang.\,CAE$ sono eguali a due retti, e conseguentemente anche in questo caso il triangolo DAE è uguale al dato triangolo BAC in virtù del teorema.

Corollario IV. — E quando ciascuno dei tre parallelogrami equilateri simili BD, AG, e CI della fig. 45 sono tre quadrati, in questo

caso ancora i quattro triangoli BAC, DAE, GCI, e LBH della stessa figura sono tra loro eguali in virtù del II corollario.

Corollario V (fig. 45). — I. Allorchè il triangolo dato BAC è rettangolo in A, e i parallelogrami equilateri simili BD, AG, CL sono tre quadrati, i quattro triangoli BAC, DAE, GCI, e LBH presi insieme sono eguali a $2AB \times AC$; perchè essendo essi eguali tra loro, i due ultimi triangoli sono eguali ai due primi, che presi insieme equivagliono visibilmente al rettangolo $AB \times AC$.

II. Se dall'esagono $LHDEGIL$ si toglie il quadrato $BCIL$, la figura otto-latera $BLHDEGICB$, che rimane, è uguale al quadrato $(AB+AC)^2$.

Attesochè tal figura consta di $AB^2+AC^2+BAC+DAE+GCI+LBH$, vale a dire (a cagione dell'articolo precedente) è uguale ad

$$AB^2+AC^2+2AB \times AC=(AB+AC)^2.$$

III. Se si prolungano (fig. 46) le rette HD, GE, HB, e GC, finchè s'incontrino nei respettivi punti N, e P, è chiaro, che si compiranno i rettangoli $ADNE$, $ABPC$ tra loro eguali, e si formerà il quadrato $HNGP$ eguale al quadrato $(AB+AC)^2$, e in virtù del precedente articolo alla figura ottolatera $LHDEGICBL$.

IV. Se si prolunga il lato AB del triangolo rettangolo dato finchè BM sia eguale all'altro lato AC; e se si prolunga similmente il lato AC di esso triangolo, finchè CO sia eguale all'altro lato AB, se oltre di ciò si congiungono le rette ML, OI, e si prolungano, finche s'incontrino in K, è facile a conoscere: Che ciascuno dei tre triangoli LBM, ICO, ILK è simile, ed eguale al triangolo dato BAC; cosicchè la somma di questi quattro triangoli è uguale a $2AB \times BC$; perchè nel triangolo LBM l'angolo in B, complemento a due retti dell'angolo ABC, è uguale all'angolo ACB, e le respettive basi LB, BC, siccome per la costruzione i respettivi lati MB, AC, sono eguali.

Parimente nel triangolo ICO l'angolo in C, complemento a due retti dell'angolo ACB, è uguale all'angolo ABC, e sono eguali le respettive basi CO, AB per la costruzione.

In fine nel triangolo LIK l'angolo in L, complemento a due retti dell'angolo MLB (ABC), è uguale all'angolo ACB; come pure l'angolo in I, complemento a due retti dell'angolo OIC (ACB), è uguale all'angolo ABC, e la base LI è uguale alla base BC.

Laonde il quadrilatero $MAOK$ à retti tutti i suoi angoli in M, in A, in O, e in K; e quindi i suoi lati son paralleli tra loro; ed essendo di

più il lato AM eguale al lato AO, cioè ambidue eguali ad $AB+AC$ per la costruzione, detto quadrilatero è un quadrato eguale al quadrato $(AB+AC)^2$.

V. Perciò anche il quadrato $MAOK$ è uguale alla figura ottolatera $LHDEGICBL$ per l'articolo II, siccome è uguale all' altro quadrato $HNGP$ per l'articolo III.

Corollario VI (fig. 46). — L' esagono $LHDEGIL$ è eguale ad $AB^2+AC^2+(AB+AC)^2$.

Imperciocchè quest'esagono è uguale alla figura ottolatera $LHDE$ $GICBL$ più il quadrato $BCIL$; ma la detta figura ottolatera è uguale al quadrato $HNGP$ per l'articolo III del corollario precedente, e il quadrato $BCIL$ è uguale al quadrato $MAOK$ meno i quattro triangoli BML, LKI, IOC, CAB: adunque l'esagono $LHDEGIL$ è uguale al quadrato $HNGP$ più il quadrato $MAOK$ meno i quattro triangoli BML, LKI, IOC, CAB; ed essendo la somma di questi quattro triangoli eguale a $4\,CAB$ (cioè a $2\,AB\times AC$) pel quarto articolo del corollario V, sarà eziandio $LHDEGIL=HNGP+MAOK-2\,AB\times AC$; ponendo pertanto in quest'equazione la quantità $AB^2+AC^2+ADNE+ABPC$ (vale a dire $AB^2+AC^2+2\,AB\times AC$) in vece di $HNGP$, cui equivale, ne risulterà $LHDEGIL=AB^2+AC^2+MAOK$, cioè l'esagono

$$LHDEGIE=AB^2+AC^2+(AB+AC)^2.$$

Il che dovea dimostrarsi.

Corollario VII (fig. 46). *Nuovo modo di dimostrare il teorema di Pittagora.* — Il quadrato della base BC del triangolo rettangolo dato è uguale all'esagono $LHDEGIL$ meno la figura ottolatera $LHDEGICBL$. Si è veduto nel secondo articolo del quinto corollario, che figura

$$LHDEGICBL=(AB+AC)^2.$$

Detraggasi quest'equazione dall' ultima del corollario antecedente, e si avrà il quadrato $BCIL=AB^2+AC^2$.

Corollario VIII (fig. 46). — Oppure in quest'altro modo.

Per l'articolo V del corollario V il quadrato $MAOK$ è uguale al quadrato $HNGP$. Ma il quadrato $MAOK$ è uguale al quadrato

$$BCIL+4\,BAC$$

pel quarto articolo del corollario V, e il quadrato $HNGP$ è uguale ad AB^2+AC^2+4BAC, come è visibile; adunque

$$BCIL+4BAC=AB^2+AC^2+4BAC,$$

vale a dire $BC^2=AB^2+AC^2$.

COROLLARIO IX (fig. 46). — Ovvero così

$$BCIL=MAOK-4BAC=MAOK-2AB\times AC,$$

si surroghi in cambio di $MAOK$ il suo valore $(AB+AC)^2$ pel quarto articolo del corollario V, e si vedrà $BCIL=(AB+AC)^2-2AB\times AC$; equazione, che sviluppata somministra

$$BCIL=AB^2+2AB\times AC+AC^2-2AB\times AC,$$

vale a dire $BC^2=AB^2+AC^2$.

TEOREMA XXVII (fig. 47). — Sia il triangolo BAC rettangolo in A, e dal vertice di esso cada sopra la base BC la normale AD; io dico, che sussiste questa proporzionalità.

L'area del triangolo BAC sta ai tre quadrati de' lati, come la normale AD al quadruplo della base BC.

PRIMA DIMOSTRAZIONE. — È visibile la giustezza di quest' equazione $\frac{BC\times AD}{2}=\frac{2BC^2\times AD}{4BC}$. Perciò si à la proporzionalità seguente:

$$\frac{BC\times AD}{2}.2BC^2::AD.4BC;$$

ma $\frac{BC\times AD}{2}$ è uguale all'area del triangolo BAC, e per l'angolo retto A si à $2BC^2=BC^2+AB^2+AC^2$; adunque collocando nell'ultima proporzionalità, in luogo dei due primi termini le due suddette corrispondenti espressioni, si conseguisce quest'altra analogia.

L'area del triangolo ACB sta a $BC^2+AB^2+AC^2$, come AD sta a $4BC$. Il che dovea dimostrarsi.

SECONDA DIMOSTRAZIONE. — Essendo AB media proporzionale tra BC, e BD, ed AC similmente tra BC, e DC; AB^2 è uguale

a $BC \times BD$, ed AC^2 è uguale a $BC \times DC$; cosicchè i tre quadrati de' lati del triangolo BAC sono eguali a $BC\,(BC+BD+DC)$, cioè a $BC \times 2BC$, ed anche a $\frac{4BC \times BC}{2}$: e quindi l'area del triangolo BAC, vale a dire $\frac{AD \times BC}{2}$ sta alla somma dei tre quadrati de' lati, come AD sta a $4\,BC$. Il che dovea dimostrarsi.

Annotazione. — Chi vorrà riflettere al tenore di questa seconda dimostrazione, conoscerà, che essa non suppone, come la prima, la previa notizia del teorema Pittagorico; ma piuttosto conduce alla prova del teorema medesimo.

Teorema XXVIII (fig. 48). — Sia il triangolo BAC rettangolo C, e dal suo vertice A si conduca la retta AD al lato opposto BC prolungato, quando sia d'uopo, dall'una, e l'altra parte di C; io dico, che la somma dei due quadrati AB^2, e DC^2 è uguale alla somma dei due quadrati AD^2, e BC^2.

Prima Dimostrazione (fig. 49). — Sul lato BC prolungato di là da C si prendano ad arbitrio i due punti b, e d, ai quali dal vertice A si conducano le rette Ab, Ad. Colla retta AM si tagli per mezzo l'angolo BAb, e colla retta AN si tagli per mezzo l'angolo DAd.

Ciò fatto si consideri, che il teorema VI mostra

$$AB \times Ab = BM \times Mb + AM^2,$$

ed anche $DN \times Nd + AN^2 = AD \times Ad$; l'addizione delle quali equazioni fa vedere

$$\text{(a)} \qquad AB \times Ab + DN \times Nd + AN^2 = AD \times Ad + BM \times Mb + AM^2.$$

S'immagini ora, che C sia tanto distante da B, quanto da b, e da D quanto da d. Allora i punti M, ed N coincideranno in C, la retta Ab sarà eguale ad AB, e la retta Ad ad AD, talchè l'equazione (a) diverrà $AB^2 + DC^2 + AC^2 = AD^2 + BC^2 + AC^2$, cioè togliendo AC^2 dall'una, e l'altra parte, $AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2$. Il che dovea dimostrarsi.

Seconda Dimostrazione (fig. 49). — Si consideri qui la stessa figura, che à servito per la prima dimostrazione, con questo solo divario,

che le rette AM, AN in vece di tagliar per mezzo gli angoli respettivi BAb, DAd, ora dividono per metà le respettive rette Bb, Dd.

Pel teorema IX, o sia pel corollario V del teorema X si conosce $Dd^2 = 2AD^2 + 2Ad^2 - 4AN^2$.

Similmente in vigore di ciascuna delle citate proposizioni si vede eziandio $Bb^2 = 2AB^2 + 2Ab^2 - 4AM$; e sottraendo quest'ultima equazione dalla penultima si trova

$$\text{(b)} \qquad Dd^2 - Bb^2 = 2AD^2 + 2Ad^2 - 2AB^2 - 2Ab^2 - 4AN^2 + 4AM^2.$$

Immaginando adesso, che C tanto disti da b, quanto da B, e tanto da d quanto da D; ambidue i punti N, ed M si confondono in C, si à $Dd^2 = 4DC^2$, e $Bb^2 = 4BC^2$; sono tra loro eguali le due rette Ad, AD, come pure tra loro le altre due Ab, AB, e l'equazione (b) diventa

$$4DC^2 - 4BC^2 = 4AD^2 - 4AB^2;$$

laonde dividendo per 4, e trasponendo si rileva $AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2$. Il che dovea dimostrarsi.

Terza Dimostrazione (fig. 48). — AC^2 à due valori, cioè $AB^2 - BC^2$, ed $AD^2 - DC^2$; adunque $AB^2 - BC^2 = AC^2 - DC^2$, e per trasposizione

$$AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2.$$

Il che dovea dimostrarsi.

Quarta dimostrazione (fig. 48):

$$AC^2 + BC^2 + DC^2 = AC^2 + DC^2 + BC^2$$

è un'equazione identica. Nel primo membro di essa pongasi AB^2 in cambio di AD^2 in luogo di $AC^2 + DC^2$, e apparirà di nuovo

$$AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2.$$

Il che dovea dimostrarsi.

Annotazione. — Se la retta AD tagliasse la base BC tra B, e C, oppure di là da C per rapporto a B; si comprende facilmente, che in tali casi sussisterebbero sempre il teorema presente, e le quattro dimostrazioni di esso.

Corollario I. — Ove si abbia riguardo alla prima, e alla seconda dimostrazione di questo teorema, prescindendo dalle altre due, è chiaro,

che nè esso teorema, nè il seguente secondo corollario suppongono la previa notizia del teorema di Pittagora; perchè non la suppongono punto le dimostrazioni da me date del teorema VI, di cui è un corollario la equazione (a). Nemmen suppongono detto Pittagorico teorema le dimostrazioni mie de' teoremi IX, e X, e del corollario V di detto teorema X, del qual corollario V l'equazione (b) è pure un corollario.

Perciò (fig. 49) se s'immagina, che il punto D cada infinitamente vicino al punto C, l'equazione del presente teorema, la quale è

$$AB^2+DC^2=AD^2+BC^2,$$

diviene $AB^2=AC^2+BC^2$. Imperciocchè essendo D prossimo a C, si trascura DC^2 come un infinitesimo, e AD^2 diventa eguale ad AC^2. Quindi la motivata Pittagorica proposizione è un corollario del teorema presente, in quanto egli è provato colla prima, o colla seconda dimostrazione.

Corollario II (fig. 50). — Sia qualunque triangolo BAC, e da uno de' suoi angoli alla base, v. g. da B, si tiri al lato opposto la normale BD; su questa normale si prenda il punto O tra B, e D, ovvero di là da B per rapporto a D, oppure di là da D per rapporto a B, e si conducano dal punto O agli angoli in A, e in C le rette AO, OC.

In oltre rappresenti ognuna delle due lettere m, ed n qualunque numero intiero, o rotto, positivo, o negativo; io dico, che sussiste quest'equazione, o sia formola

$$(c) \qquad mAB^2+nBC^2+(m+n)\,OD^2=mAO^2+nCO^2+(m+n)\,BD^2;$$

imperciocchè in virtù del presente teorema si à

$$mAB^2+mOD^2=mAO^2+mBD^2,$$

ed anche $nCB^2+nOD^2=nCO^2+nBD^2$: e dall'aggiunta di queste due equazioni vien costituita la soprascritta formola.

Avvertimento. — Dee notarsi, che se la significazione particolare, che si fosse già data alla lettera m, si dasse poi alla lettera n, e versavice la significazione particolare, che si fosse data ad n, si desse ad m; allora sarebbe per l'appunto come se la formola (c) si mutasse in quest'altra, che è vera anch'essa:

$$mBC^2+nAB^2+(m+n)\,OD^2=mCO^2+nAO^2+(m+n)\,BD^2,$$

di maniera che nell'accennato baratto delle significazione di m, e di n

le rette AB, BC, AO, CO diverrebbero respettivamente le rette BC, AB, CO, AO.

Piacemi di addurre i seguenti esempj di questo secondo corollario per la loro eleganza.

Esempio I. — Se $m=1$, ed $n=1$, la formola (c) diventa:

$$AB^2+BC^2+2OD^2=AO^2+OC^2+2BD^2.$$

Esempio II. — Se $m=\pm 1$, ed $n=\mp 1$, la formula (c) mostra:

$$\pm AB^2\mp BC^2=\pm AO^2\mp CO^2,$$

e trasponendo, e poi dividendo per ± 1: $AB^2+OC^2=BC^2+OA^2$.

Barattando le significazioni di m, e di n, sarà per l'avvertimento $BC^2+OA^2=AB^2+OC^2$, equazione non diversa da quella, che la precede.

Esempio III. — Se $m=2$, ed $n=1$, la formola (c) diviene

$$BC^2+2BA^2+3OD^2=OC^2+2OA^2+3BD^2. \quad \text{(d)}$$

Barattando le significazioni di m, e di n, sarà per l'avvertimento $BA^2+2BC^2+3OD^2=OA^2+2OC^2+3BD$.

Esempio IV. — Se $m=\pm 3$, ed $n=\mp 1$, abbiamo in virtù della formola (c) $\pm 3BA^2\mp BC^2\pm 2OD^2=\pm 3AO^2\mp OC^2\pm 2BD^2$, e trasponendo, e poi dividendo per ∓ 1: $OC^2+2OD^2+3BA^2=BC^2+2BD^2+3OA^2$.

Barattando le significazioni di m, e di n, sarà per l'avvertimento $OA^2+2OD^2+3BC^2=BA^2+2BD^2+3OB^2$.

Esempio V. — Se $m=\pm 3$, ed $n=\pm 2$, la formola (c) manifesta

$$\pm 3BA^2\mp 2BC^2\pm OD^2=\pm 3OA^2\mp 2OC^2\mp BD^2,$$

e trasponendo, e poi dividendo per ± 2:

$$OD^2+2OC^2+3BA^2=BD^2+BC^2+3OA^2.$$

Barattando le significazioni di m, e di n, sarà per l'avvertimento $OD^2+2OA^2+3BC^2=BD^2+2BA^2+3OC^2$.

Teorema XXIX. (fig. 50). — Sia il triangolo isoscele BAC, e da uno de' suoi angoli eguali, v. g. da B, sia tirata al lato opposto la normale BD; io dico, che i tre quadrati de' lati del triangolo BAC sono

eguali ad una volta il quadrato di DC, più due volte il quadrato di DA, più tre volte il quadrato di DB.

Prima Dimostrazione. — A cagione dell'angolo retto in D si à $2AB^2 = 2DA^2 + 2DB^2$; cioè per l'egualità de' due lati AB, ed AC si à $AB^2 + AC^2 = 2DA^2 + 2DB^2$.

Similmente $BC^2 = DC^2 + DB^2$; e l'addizione di queste due equazioni fa conoscere:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = DC^2 + 2DA^2 + 3DB^2. \tag{e}$$

Il che dovea dimostrarsi.

Seconda Dimostrazione (fig. 50). — Da qualunque punto O della retta BD prolungata oltre B, e oltre D, si conducano ai due angoli in A, e in C le rette OA, ed OC. Pongasi nell'equazione (d) del corollario precedente $AB^2 + AC^2$ in luogo di $2AB^2$, e si troverà essere

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 + 3OD^2 = CO^2 + 2AO^2 + 3DB^2, \tag{f}$$

surrogando qui $DC^2 + OD^2$ in vece di CO^2, e $2OD^2 + 2DA^2$ in cambio di $2AO^2$, si ottiene:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 + 3OD^2 = 3OD^2 + DC^2 + DA^2 + 3DB^2,$$

e togliendo $3OD^2$ dall'una, e l'altra parte, rimane l'equazione (e). Il che dovea dimostrarsi.

Terza Dimostrazione (fig. 50). — S'immagini, che il punto O cada infinitamente vicino al punto D, allora $3OD^2$, come quantità infinitamente piccola si potrà togliere dall'equazione (f), dove si porrà ancora DC^2 in vece del suo equivalente OC^2, come pure DA^2 in luogo di OA^2, cui equivale, e così l'equazione (f) diverrà l'equazione (e). Il che dovea dimostrarsi.

Quando nel triangolo isoscele BAC l'angolo in A è ottuso, il punto A cade tra D e C; nientedimeno è agevole a conoscersi, che in tal caso rimangono senza alterazione questo teorema, e le sue tre dimostrazioni.

Annotazione. — Prescindendo dalla terza, e quarta dimostrazione del precedente teorema, e attendendo alla prima, o alla seconda delle sue dimostrazioni: come pure prescindendo dalla prima, e seconda dimostrazione del teorema presente, questo medesimo presente teorema, in

quanto è provato con la sua dimostrazione terza, non suppone punto la notizia della proposizione Pittagorica.

Egli in virtù della sua seconda, e terza dimostrazione è un corollario del secondo corollario del teorema antecedente.

Teorema XXX (fig. 51, e 52). — Dal vertice A di qualunque triangolo BAD si alzino sui lati AB, e AD le due normali indefinite AP, ed AR, e si tiri sulla base BD (prolungata se si vuole) la retta AC.

Da qualunque punto Q di questa retta, situato di là da A per rapporto a C, si cali sopra AP la normale QP, e sopra AR la normale QR.

Dalle estremità B, e D della base si conducano le rette BM, e DN parallele ad AQ, e sopra di esse cada la normale MN, che taglia in A ad angoli retti la AQ; io dico, che $AQ, MN = AR, AD \pm AP, AB$.

Nel segno doppio vale il superiore per la fig. 51, e l'inferiore per la fig. 52; e così nel tratto successivo.

Avvertimento. — Se AC incontrasse la base BD di là dal punto D per rapporto al punto B; allora si dovrebbe immaginare la figura 52 rovesciata in maniera, che ciò, che sta alla parte destra di B, stasse alla sinistra, e ciò, che sta alla parte sinistra di B, stasse alla destra.

Dimostrazione. — I due triangoli rettangoli APQ, AMB sono simili; poichè per la costruzione BA, e PQ son parallele; onde l'angolo PQA è uguale all'angolo BAC, cui è uguale l'angolo MBA.

Parimente i due triangoli rettangoli ARQ, AND sono simili anch'essi, mentre essendo per la costruzione parellele DA, ed RQ, l'angolo RQA è uguale all'angolo DAC, cui è uguale NDA.

Abbiam pertanto queste due analogie:

$$AQ . AP :: AB . AM; \quad AQ . AR :: AD . AN.$$

Dalla prima nasce $AQ, AM = AP, AB$, e dalla seconda viene

$$AQ, AN = AR, AD.$$

Aggiugendo per la fig. 51 la prima equazione alla seconda; e sottraendo per la fig. 52 la prima equazione dalla seconda, si conosce

$$AQ, AM \pm AQ, AN,$$

cioè per l'una, e per l'altra figura, $AQ, MN = AR, AD \pm AP, AB$. Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I. — Se nella fig. 51 la AC è normale sopra la base BD, la medesima BD diviene parallela, ed eguale alla retta MN, e perciò à luogo quest'equazione: $AQ, BD = AR, AD + AP, AB$ bella proprietà del triangolo, dalla quale deriva nella seguente guisa il teorema di Pittagora.

Corollario II (fig. 51). — Poste le cose antedette, se l'angolo al vertice del triangolo BAD è retto; allora tanto PAD, quanto RAB saranno in diretto; PQ sarà parallela ad AR, come pure RQ ad AP; talchè la AQ sarà diagonale del rettangolo $PARQ$.

Laonde se di più AP è uguale ad AB, ed AR ad AD; allora la diagonale AQ diventa eguale alla base BD, e in virtù della precedente equazione si à quest'altra: $BD^2 = AD^2 + AB^2$.

Teorema XXXI (fig. 53, e 54). — Dal vertice A di qualsivoglia triangolo BAD si tiri sulla base BD (prolungata, se si vuole) la retta AC. Sulla stessa base BD si costruisca il parallelogramo $BVXD$, i di cui lati (di grandezza arbitraria) siano paralleli ad AC. Indi si compiscano gli altri due parallelogrami $VBAQ$, $XDAQ$.

Io dico, che il parallelogramo $BVXD$ è uguale alla somma, ovvero alla differenza dei due parallelogrami $VBAQ$, $XDAQ$, cioè alla somma nel caso della fig. 53, e alla differenza nel caso della fig. 54.

Avvertimento. — Se la retta AC incontrerà la base BD di là dal punto D per rapporto al punto B, abbiasi qui per replicato l'avvertimento che ò posto dopo l'enunciazione del precedente teorema.

Dimostrazione. — I triangoli VQX, BAD sono simili, ed eguali, attesochè per cagione de' parallelogrami si à $VX = BD$; $VQ = BA$, ed $XQ = DA$. Pongasi pertanto da una parte il triangolo VQX, e dall'altra il triangolo BAD. Poi tolgasi dall'una, e dall'altra parte quello spazio, che i due triangoli suddetti ànno di comune (quando l'ànno), e aggiungasi all'una, e all'altra parte quello spazio, o spazj, che i due triangoli VQX, BAD non contengono in ciascuna delle due figure $BVQXD$, e $BAQXDB$, e in tal guisa si avrà la dimostrazione intuitiva, e immediata del teorema. Il che, ec.

Esempio I (fig. 53). — $Tri.\ VQX = Tri.\ BAD.$

Si tolga dall'uno, e dall'altro membro di quest'equazione lo spazio EAK comune ai due triangoli VQX, BAD, e si aggiungano di qua, e di là i due spazj BVE, DXK, che non si contengono negli accennati due triangoli, si vedrà:

$$Tri.\ VQX - EAK + BVE + DXK = Tri.\ BAD - EAK + BVE + DXK.$$

Il primo membro è uguale a *Parallelog.* $BVQA$ + *Parallelog.* $DXQA$, e il secondo membro è uguale a *Parallelog.* $BVXD$; adunque

$$BVQA + DXQA = BVXD.$$

Il che dovea dimostrarsi.

Esempio II (fig. 54). — Di nuovo, $Tri.\ VQX = Tri.\ BAD.$

Si tolga dall'uno, e dall'altro membro lo spazio VRK comune ad ambi i triangoli VQX, BAD, e si aggiungano all'una, e all'altra parte i due spazj ARQ, KDX non contenuti nei detti due triangoli: ne risulterà

$$Tri.\ VQX - VRK + ARQ + KDX = Tri.\ BAD - VRK + ARQ + KDX.$$

Il primo membro è uguale a *Parallelog.* $DXQA$, e il secondo membro è uguale a *Parallelog.* $BVQA$ + *Parallelog.* $BVXD$. Adunque

$$DXQA = BVQA + BVXD,$$

e trasponendo $DXQA - BVQA = BVXD$. Il che dovea dimostrarsi.

Quando nella fig. 53 il punto A è tra le due parallele VX, e BX, allora non solamente lo spazio triangolare EAK svanisce, ma gli altri due spazj triangolari BVE, DXK diventano due trapezj contigui tra loro dalla parte di A.

Così quando nella fig. 54 il punto V è tra le due parallele DA, ed XQ, allora non solo svanisce lo spazio triangolare VRK, ma gli altri due spazi XDK, ARQ divengono due trapezj tra loro contigui dalla parte di V.

Corollario I. — Il caso dell'esempio II (fig. 54) può ridursi al primo, purchè si consideri il triangolo XVQ, il suo vertice V, e la sua base XQ, sopra la quale è costrutto il parallelogramo $XDAQ$; attesochè i lati XD, e QA di questo parallelogramo son paralleli alla retta BV, che prolungata incontra la base XQ tra X, e Q.

È chiaro, che lo stesso dee valere, se la fig. 54 si concepisce rovesciata in modo, che ciò, che sta alla destra di B stia alla sinistra, e ciò, che sta alla sinistra di B stia alla destra.

Corollario II (fig. 53). — La retta AC incontri normalmente la base BD, e dagli angoli, V, ed X del parallelogramo $VBXD$ (in questo caso rettangolo) si calino sui lati AB, e AD del triangolo BAD le respettive perpendicolari VO, e XZ; si avrà quest'equazione:

$$VB, BD = XZ, AD \pm VO, AB.$$

E se di più VB (XD) sarà eguale alla base, si otterrà:

$$BD^2 = XZ, AD \pm VO, AB.$$

Nel segno doppio di questo corollario, e del quarto corollario infrascritto il superiore concerne la figura 53, e l'inferiore la figura 54.

Dal presente corollario proviene la proposizione di Pittagora nel modo, che segue.

Corollario III (fig. 55). — Se in oltre è retto l'angolo A vertice del triangolo; allora i tre triangoli rettangoli BAD, DZX, VOB sono simili, ed eguali, perchè sono eguali gli angoli ABD, ZXD, facendo ciascuno di essi un angolo retto con l'angolo XDZ; e gli angoli ABD, OVB sono parimente uguali, facendo ciascuno di essi un angolo retto con l'angolo VBO, come pure perchè sono eguali le tre basi respettive BD, DX, BV a cagione del quadrato $BVXD$.

Sarà pertanto eguale il lato XZ al lato AD, e il lato VO al lato AB. Perlocchè siccome nel precedente corollario si è trovato

$$BD^2 = XZ, AD + VO, AB;$$

così ora si conosce $BD^2 = AD^2 + AB^2$.

Corollario IV (fig. 53, e 54). — Si concepiscano costrutti sopra le AB, ed AD, e compresi tra le respettive parallele QV, e QX due qualsivogliano nuovi parallelogrami. Io dico, che il nuovo parallelogramo sopra $AB \pm$ il nuovo parallelogramo sopra AD è uguale al parallelogramo $BVXD$.

Teorema XXXII (fig. 56, e 57). — Sulla base di qualunque triangolo BAD si descriva il parallelogramo $BXAD$; tra i lati di questo AD,

ed XB anche prolungati, prendasi a volontà sopra, o sotto BD il punto I, da cui si tirino le rette IA, ed IX; io dico, che sussiste questa equazione:

(g) $$Tri.\, BAD = tri.\, DIA + tri.\, BIX\,.$$

Dimostrazione. — Si conduca la IG parallela ad XB, e ad AD, la quale tagli in F, ed in G le altre due parallele XA, e BD.

La metà del parallelogramo parziale $DAGF$ è uguale al triangolo DIA; e la metà dell'altro parallelogramo parziale $BXGF$ è uguale al triangolo BIX. Perciò la metà del parallelogramo totale $BXAD$ è uguale a $Tri.\, DIA + Tri.\, BIX$. Ma la stessa metà del parallelogramo $BXAD$ è uguale anche al triangolo BAD; adunque sussiste l'equazione (g). Il che dovea dimostrarsi.

Avvertimento. — Nei due primi infrascritti corollarj faranno uso i lettori della propria immaginazione; perchè non si è voluto moltiplicar le figure.

Corollario I. — Se fuori delle parallele XB, ed AD, anche prolungate, si prenderà il punto I in modo, che la parallela XB scorra tra il punto I, e l'altra parallela AD; allora è facile ad immaginare, che il parallelogramo parziale $BXGF$ muta situazione, e sta collocato alla parte opposta divenendo in tal guisa *negativo*. Di più $DAGF$ diviene parallelogramo totale, $BXAD$ diventa parallelogramo parziale.

Ciò posto la metà del parallelogramo totale $DAGF$ è uguale al triangolo DIA, e la metà del parallelogramo parziale $BXGF$ è uguale al triangolo BIX. Laonde la metà dell'altro parallelogramo parziale $BXAD$ essendo uguale alla metà del parallelogramo $DAGF$ meno la metà del parallelogramo $BXGF$, è conseguentemente uguale a $Tri.\, DIA - Tri.\, BIX$. Ma la stessa metà del parallelogramo $BXAD$ è uguale anche al triangolo BAD; adunque presentemente à luogo quest'equazione:

(h) $$Tri.\, BAC = tri.\, DIA - tri.\, BIX\,.$$

Corollario II (fig. 56, e 57). — Similmente, se il punto I si prenderà fuori delle parallele XB, ed AD in maniera, che la AD scorra tra il punto I, e l'altra parallela XB; allora s'immaginerà facilmente, che il parallelogramo parziale $DAGF$ sarà situato alla parte opposta, e diventerà *negativo*. In oltre $BXGF$ diviene in questo caso parallelogramo totale, e $BXAD$ diventa parallelogramo parziale.

Ora la metà del parallelogramo totale $BXGF$, è uguale al triangolo BIX, e la metà del parallelogramo parziale $DAGF$ è uguale al triangolo DAI. Quindi la metà dell'altro parallelogramo parziale $BXAD$ essendo uguale alla metà del parallelogramo $BXGF$ meno la metà del parallelogramo $DAGF$, è per conseguenza eguale a $Tri. BIX - Tri. DIA$. Ma la stessa metà del parallelogramo $BXAD$ è uguale ancora al triangolo BAD; adunque nel caso presente vale quest'equazione:

(i) $$Tri. BAD = tri. BIX - tri. DIA.$$

Corollario III. — Dall'ispezione dell'equazioni (g), ed (h), e dalla considerazione de' raziocinj fatti nella dimostrazione del teorema, e nei due corollarj antecedenti; si raccoglie, che nell'analisi geometrica un triangolo diviene di positivo negativo, e versa-vice, quando la base di esso triangolo muta sito rispetto al di lui vertice, cioè se prima stava alla destra del vertice, e poi passa alla sinistra, e se prima stava alla sinistra del vertice, e poi passa alla destra:

Questo accade al triangolo BIX dell'equazione (h) rispetto al triangolo BIX dell'equazione (g): come pure al triangolo DAI dell'equazione (i) rispetto al triangolo DAI dell'equazione (g).

Il presente corollario serve per non ripetere i raziocinj, e le figure.

Corollario IV. — Riflettendo attentamente a quanto si espone nel precedente corollario, si comprenderà, che nell'analisi geometrica un triangolo divien *nullo* prima di diventar negativo di positivo, che era, e versa-vice.

Scolio. — Voglio qui aggiungere un'altra maniera di dimostrare questo teorema coi due primi suoi corollarj. Veggansi le figure 56, e 57.

I. Passi pel punto I la retta MN normale alle due parallele XB, ed AD prolungate: Si à $IM = MN - IN$, ed $\frac{1}{2} XB = \frac{1}{2} AD$. Si moltiplichi la seconda equazione per la prima e ne viene:

$$\frac{1}{2} XB, IM = \frac{1}{2} AD, MN - \frac{1}{2} AD, IN.$$

Il triangolo BIX è uguale a $\frac{1}{2} XB, IM$; il triangolo BAD è uguale

a $\frac{1}{2}AD, MN$; e il triangolo DIA è uguale a $\frac{1}{2}AD, IN$. Adunque

$$Tri.\, BIX = tri.\, BAD - tri.\, DIA,$$

e trasponendo, ec.

II. Qui conviene immaginarsi le figure, che non sono delineate.

Se la parallela AN scorrerà tra i punti I, ed M (*caso primo*): ovvero se la parallela XM scorrerà tra i punti I, ed N (*caso secondo*) allora è facile a conoscere, che $IM = IN \pm MN$ comprendendo ambidue i casi in uno; mentre il segno superiore vale pel primo caso, e l'inferiore pel secondo. Ma è sempre $\frac{1}{2}XB = \frac{1}{2}AD$. Adunque moltiplicando l'ultima equazione per la penultima, si vede:

$$\frac{1}{2}XB, IM = \frac{1}{2}AD, IN \pm \frac{1}{2}AD, MN,$$

si à come nel primo articolo il triangolo BIX eguale a $\frac{1}{2}XB, IM$; il triangolo DIA eguale a $\frac{1}{2}AD, IN$, e il triangolo BAD eguale a $\frac{1}{2}AD, MN$. Laonde $Tri.\, BIX = tri.\, DIA \pm tri.\, BAD$, e trasponendo, ec. Le quali cose dovevano dimostrarsi.

Corollario V (fig. 58). — Sulla base di qualsivoglia triangolo BAD si descrivano i due parallelogrami $BDAX$, e $BDZA$, e le rette XB, e ZD convengano in O.

Io dico, che, se dal punto I preso dentro l'area del triangolo BOD si condurranno le rette IX, ed IZ, si avrà questa equazione:

$$Tri.\, BAD = tri.\, BID + tri.\, BIX + tri.\, DIZ. \qquad \text{(k)}$$

Dimostrazione. — Pel teorema si ànno le due seguenti equazioni:

$$Tri.\, BAD = tri.\, BIX + tri.\, DIA.$$
$$Tri.\, BAD = tri.\, DIZ + tri.\, BIA.$$

Queste due equazioni aggiunte producono

$$2\, Tri.\, BAD = tri.\, BIA + tri.\, DIA + tri.\, BIX + tri.\, DIZ,$$

e togliendo una volta il triangolo BAD da ciascun membro di questa equazione resta l'equazione (k). Il che dovea dimostrarsi.

Questa è una leggiadra, e novella proprietà del triangolo.

Avvertimento. — Ne' corollarj, che seguono, io farò uso del terzo corollario; e secondo i casi dovranno immaginarsi le figure; il che non sarà difficile.

Corollario VI (fig. 58). — Se il punto I si prende *sopra* la retta BD, e dentro l'angolo XOZ, i di cui lati si concepiscano stesi in infinito; il triangolo BID diventa negativo, e i triangoli BIX, DIZ rimangono positivi; adunque l'equazione (k) somministra

$$Tri.\,BAD = -tri.\,BID + tri.\,BIX + tri.\,DIZ,$$

ovvero trasponendo $Tri.\,BAD + tri.\,BID = tri.\,BIX + tri.\,DIZ$.

Corollario VII (fig. 58). — Se il punto I si prende dentro l'angolo XBS, i di cui lati si concepiscano stesi in infinito; i triangoli BID, e BIX diventano negativi, e resta positivo il triangolo DIZ; adunque l'equazione (k) fa conoscere $Tri.\,BAD = -tri.\,BID - tri.\,BIX + tri.\,DIZ$, ovvero trasponendo $Tri.\,BAD + tri.\,BID = tri.\,DIZ - tri.\,BIX$.

Corollario VIII (fig. 58). — Se il punto I si prende dentro l'angolo ZDT, i di cui lati si concepiscano stesi in infinito, i triangoli BID, e DIZ divengono negativi, e il triangolo BIX rimane positivo; adunque dall'equazione (k) si deduce $Tri.\,BAD = -tri.\,BID + tri.\,BIX - tri.\,DIZ$, ovvero trasponendo $Tri.\,BAD + tri.\,BID = tri.\,BIX = tri.\,DIZ$.

Corollario IX (fig. 58). — Se il punto I si prende sotto la retta BO, e dentro l'angolo SDQ, i di cui lati si concepiscano stesi in infinito, i triangoli BID, e DIZ rimangono positivi, e diventa negativo il triangolo BIX; adunque dall'equazione (k) risulta

$$Tri.\,BAD = tri.\,BID - tri.\,BIX + tri,\,DIZ,$$

ovvero trasponendo $Tri.\,BAD - tri.\,BID = tri.\,DIZ - tri.\,BIX$. Bella, e nuova proprietà del triangolo.

Corollario X (fig. 58). — Se il punto I si prende sotto la retta DO, e dentro l'angolo TBR, i di cui lati si concepiscano stesi in infinito; i triangoli BID, e BIX restano positivi, e il triangolo DIZ divien negativo; adunque l'equazione (k) mostra

$$Tri.\,BAD = tri.\,BID + tri.\,BIX - tri.\,DIZ,$$

ovvero trasponendo $Tri.\,BAD - tri.\,BID = tri.\,BIX - tri.\,DIZ$. Altra nuova, e bella proprietà del triangolo.

COROLLARIO XI (fig. 58, e 59). — Finalmente, se il punto I si prende dentro l'angolo QOR, i di cui lati si concepiscano stesi in infinito, il triangolo BID rimane positivo, e diventano negativi i triangoli BIX, e DIZ; adunque in virtù dell'equazione (k) si vede

$$Tri.\, BAD = tri.\, BID - tri.\, BIX - tri.\, DIZ,$$

ovvero trasponendo $Tri.\, BID = tri.\, BAD + tri.\, BIX + tri.\, DIZ$. Novella proprietà del triangolo, che non cede in bellezza a quella, che ò trovata nel quinto corollario.

COROLLARIO XII (fig. 60, e 61). — Sulla base di qualsivoglia triangolo BAD si descriva il parallelogramo $BDAX$, e si tiri la sua diagonale XD. Si prolunghino le parallele XB, e AD, e dentro l'angolo BDH, i di cui lati si concepiscano prolungati in infinito, si prenda il punto I. Indi da questo medesimo punto si conducano ai quattro angoli del parallelogramo le rette IB, IX, IA, ed ID.

Io dico, che sussiste quest'equazione:

$$Tri.\, XID = tri.\, BID + tri.\, DIA. \tag{l}$$

AVVERTIMENTO. — Se l'angolo BDA fosse ottuso, allora per evitare la moltiplicità delle figure, dovrebbe immaginarsi la fig. 60 rovesciata in modo, che ciò, che sta alla destra di B, stasse alla sinistra, e versa-vice.

Nel segno doppio il superiore si riferisce alla figura 60, e l'inferiore alla figura 61, e ciò in ambedue le dimostrazioni seguenti.

DIMOSTRAZIONE. — In virtù del parallelogramo $BXAD$ è evidente quest'equazione: $Tri.\, BAD + tri.\, BID = tri.\, BXD + tri.\, BID$.

Per l'equazione (g) nella fig. 60, e per l'equazione (i) nella 61, si à $Tri.\, BAD = tri. DIA \pm tri.\, BIX$.

Sottraggasi quest'equazione dall'altra, che la precede; ne deriva $Tri.\, BID = - tri.\, DIA + tri.\, XID$, e trasponendo si perviene all'equazione (l). Il che dovea dimostrarsi.

ALTRA DIMOSTRAZIONE (fig. 60, e 61). — Si conduca la retta IG parallela ai lati XB, e AD del parallelogramo $BXAD$, e ne rimangano tagliati in F, e in G gli altri due lati di quello BD, ed XA prolungati, se occorre. Si congiunga XF, e si segni colla lettera O l'intersezione delle rette XI, e BD.

$$Tri.\, XID = tri.\, XOD + tri.\, OID, \quad Tri.\, XOD = tri.\, DIA \pm tri.\, OIB;$$

perchè da una parte *tri.* XOD è uguale alla metà del parallelogramo $ADGF \pm$ *tri.* XOF: dall'altra parte *tri.* DIA è uguale alla metà dello stesso parallelogramo $ADGF$, e *tri.* OIB è uguale a *tri.* XOF, essendo ambidue uguali alla metà del parallelogramo $XBGF$ diminuito dal triangolo comune XBO.

Pongasi dunque nella prima delle due ultime equazioni il valore di *tri.* XOD tratto dalla seconda, e ne risulterà

$$Tri.\, XID = tri.\, DIA + tri.\, OIB + tri.\, OID = tri.\, BID + tri.\, DIA.$$

Il che dovea dimostrarsi.

Dopo il corollario XXIV, darò una terza dimostrazione del corollario presente, e consisterà nell'esporre l'espressioni analitiche del triangolo XID, e del triangolo BID.

Anche nei corollarj, che seguono io farò uso del terzo corollario, lasciando, che i lettori si rappresentino all'immaginazione le figure secondo l'esigenze de' casi.

Corollario XIII (fig. 60, e 61). — Se il punto I si prende dentro l'angolo BDX, i di cui lati si concepiscano prolungati in infinito, i triangoli XID, e DIA restano positivi, e il triangolo BID diventa negativo; adunque per l'equazione (l) si à $Tri.\, XID = tri.\, DIA - tri.\, BID$.

Corollario XIV (fig. 60, e 61). — Se il punto I si prende dentro l'angolo ADX, i di cui lati si concepiscano stesi in infinito, i triangoli XID, e BID diventano negativi, e il triangolo DIA rimane positivo; adunque l'equazione (l) fa vedere $-tri.\, XID = tri.\, DIA - tri.\, BID$, ovvero trasponendo $Tri.\, XID = tri.\, BID - tri.\, DIA$.

Corollario XV (fig. 60, e 61). — Se il punto I si prende dentro l'angolo EDH, i di cui lati si concepiscano stesi in infinito (DE è la continuazione di XD, come DQ di BD); i triangoli XID, e BID restano positivi, e il triangolo DIA divien negativo; adunque mediante l'equazione (l) apparisce $Tri.\, XID = tri.\, BID - tri.\, DIA$.

Corollario XVI (fig. 60, e 61). — Se il punto I si prende dentro l'angolo QDE, i di cui lati si concepiscano stesi in infinito; i triangoli XID, e DIA diventano negativi, e l'angolo BID resta positivo; adunque l'equazione (l) esibisce $-tri.\, XID = tri.\, BID - tri.\, DIA$, ovvero trasponendo $Tri.\, XID = tri.\, DIA - tri.\, BID$.

Corollario XVII (fig. 60, e 61). — Finalmente, se il punto I si prende dentro l'angolo ADQ, i di cui lati si concepiscano stesi in infinito; i triangoli XID, BID, e DIA divengono tutti e tre negativi; adunque l'equazione (1) manifesta $-Tri.\, XID = -tri.\, BID - tri.\, DIA$, ovvero trasponendo $Tri.\, XID = tri.\, BID + tri.\, DIA$ come nel corollario XII, e nella preaccennata equazione (1).

Corollario XVIII (fig. 61, e 62). — *Maniera di dedurre dal corollario XII il teorema Pittagorico.* — Sia il triangolo BAD rettangolo in D, si descriva sopra BD il rettangolo $BDAX$ colla sua diagonale XD, e prolungando i lati AD, e XB di questo rettangolo si costruisca il quadrato $XAKE$. Si prolunghi poscia KE fino ad I in modo che EI sia eguale ad AD, e si congiungano IX, IB, IA, ed ID.

Essendo per la costruzione XE eguale ad XA, cioè a BD, ed EI eguale ad AD, cioè ad XB, il triangolo XEI rettangolo in E è simile, ed eguale al triangolo DBX rettangolo in B; cosicchè $XI = XD = AB$, e l'angolo IXE è uguale all'angolo XDB. Perciò siccome $ang.\, XDB + ang.\, BXD$ è uguale ad un retto, così anche $ang.\, IXE + ang.\, BXD$ è uguale ad un retto, e quindi la retta IX è perpendicolare sopra XD.

Ora per l'equazione (1) abbiamo $Tri.\, XID = tri.\, BID + tri.\, DIA$, vale a dire $\frac{1}{2}IX,\, XD = \frac{1}{2}BD,\, BE + \frac{1}{2}AD,\, IK$.

Moltiplicando per 2, e sostituendo AB in vece di XD, e di IX, che gli sono uguali, come pure surrogando $AD+BD$ in luogo della retta eguale IK, cioè di $IE+EK$; l'equazione assumerà questo aspetto:

$$AB^2 = BD,\, BE + AD^2 + AD,\, BD;$$

cioè $AB^2 = AD^2 + BD\,(AD + BE)$; ma $AD + BE$ è uguale ad AK, cioè a BD; adunque $AB^2 = AD^2 + BD^2$.

Corollario XIX (fig. 61). — Allorchè AD è maggiore di BD, si porrà in opra il corollario XIII, e con la stessa costruzione, e un raziocinio simile all'esposto nel corollario antecedente si dimostrerà la proposizione Pittagorica.

Corollario XX (fig. 61). — Negli ultimi due corollarj la normale XI scende dal punto X, e scorre *sotto* la diagonale XD.

Ma alzando dal punto X *sopra* la stessa XD una perpendicolare eguale ad XD, e valendosi del corollario XVII; allora con una costru-

zione, e raziocinio simile agli usati nel corollario XVIII, si dimostrerà la medesima proposizione di Pittagora: e ciò quando BD è maggiore di AD.

Corollario XXI (fig. 61). — Ma quando AD è maggiore di BD, si farà uso del corollario XIV, e con la medesima costruzione, e con raziocinio simile a quello, che si è semplicemente accennato nel precedente corollario, si dimostrerà la Pittagorica proposizione.

Corollario XXII (fig. 63, e 64). *Altra maniera di dedurre dal corollario XII, ed anche dal corollario XVII il teorema di Pittagora.* — Su la base di qualsivoglia triangolo BAD rettangolo in D si costruisca il rettangolo $BDAX$, e si tiri la diagonale XD; *sotto* il punto D della quale nella figura 63, e *sopra* il punto D di essa nella figura 64, *scenda*, e respettivamente si *alzi* la retta DI perpendicolare, ed eguale insieme alla XD. Dal punto I si conduca la IS parallela a BD, e tagliante in S la AD prolungata *sempre* nella figura 63, e prolungata *se occorre* nella figura 64. Finalmente dal punto I si tirino le rette IB, IX, IA.

Il triangolo DSI rettangolo in S è simile, ed eguale al triangolo DBX rettangolo in B; perchè l'angolo IDS del primo è uguale all'angolo XDB del secondo, facendo sì l'uno, come l'altro un angolo retto con l'angolo XDA; e perchè le due ipotenuse ID, ed XD si sono fatte eguali nella costruzione. Perciò $SI = XB = AD$, e $DS = BD$.

Ma pel corollario XII (fig. 63), e pel corollario XVII (fig. 64), si à quest'equazione: *Tri.* $XID =$ *tri.* $BID +$ *tri.* DIA, vale a dire:

$$\frac{1}{2}XD, ID = \frac{1}{2}BD, SD + \frac{1}{2}AD, IS.$$

Laonde moltiplicando per 2, e ponendo AB tanto in vece di XD, quanto in vece di ID, come pure BD in luogo di SD, ed AD in cambio di IS, ne risulta $AB^2 = BD^2 + AD^2$. Il che, ec.

Corollario XXIII (fig. 65). — Su la base BD di qualunque triangolo BID si costruisca il parallelogramo $BXAD$, i di cui lati (di grandezza arbitraria) siano paralleli alla retta IC, che taglia BD tra B, e D; indi si compiscano gli altri due parallelogrami $XBIQ$, $ADIQ$.

Io dico, che il parallelogramo $BXAD$ è uguale alla somme de'due parallelogrami $ADIQ$, ed $XBIQ$.

Dimostrazione. — Si conducano le rette IX, ed IA.

Pel presente teorema abbiamo: $Tri.\,BAD = tri.\,DIA + tri.\,BIX$, e conseguentemente $2\,Tri.\,BAD = 2\,tri.\,DIA + 2\,tri.\,BIX$.

Ma *parallelog.* $BXAD$ è uguale **a** $2\,tri.\,BAD$; *parallelog.* $ADIQ$ è uguale a $2\,tri.\,DIA$; e *parallelog.* $XBIQ$ è uguale a $2\,tri.\,BIX$; adunque *Parallelog.* $BXAD =$ *parallelog.* $ADIQ +$ *parallelog.* $XBIQ$.

Il che dovea dimostrarsi.

Corollario XXIV (fig. 65). — Se la retta IC taglia la BD (prolungata) di là da B per rapporto a D, (caso *primo*), ovvero di là da D per rapporto a B (caso *secondo*); allora il punto I sarà fuori delle parallele XB, ed AD verso la sinistra nel *primo* caso, e verso la destra nel *secondo* caso. Quindi pe'corollarj I, e II di questo teorema sussisterà l'equazione seguente, nella quale il segno superiore è pel *primo* caso, e l'inferiore pel *secondo*: $Tri.\,BAD = \pm\, tri.\,DIA \mp tri.\,BIX$.

Laonde raziocinando d'una maniera uniforme a quella, che si è tenuta nel precedente corollario, si dimostrerà quest'altra equazione:

$$Parallelog.BXAD = \pm parallelog.ADIQ \mp parallelog.XBIQ.$$

Questi due corollarj dimostrano il teorema XXXI in tutti i suoi casi.

Scolio. — Stimo a proposito di dimostrar nuovamente, e di una maniera analitica il corollario XII, considerandolo come un teorema assoluto.

A quest'oggetto passi pel punto I delle figure 60, e 61 la retta MN perpendicolare alle parallele XB, ed AD prolungate. E per non imbarazzare le stesse due figure s'immagini tirata in quelle la retta DM; talchè si concepiscano descritti intieramente i tre triangoli BDE, XDM, e DMN.

Ne' segni doppj di questa dimostrazione il superiore serve per la figura 60, e l'inferiore per la figura 61.

I. Essendo $Tri.BDM + tri.DMN = \frac{1}{2}BM,\ MN + \frac{1}{2}DM,\ MN.$

Se in vece di MN si sostituisce il suo equivalente $IN \pm IM$, sarà

$$Tri.BDM + tri.DMN = \frac{1}{2}BM,\ IN \pm \frac{1}{2}BM,\ IM + \frac{1}{2}DN,\ IN \pm \frac{1}{2}DN,\ IM.$$

Ed essendo $Tri.BID = tri.BDM + tri.DMN - tri.DIN \pm tri.BIM$, sarà, se si ommettono i termini, che vicendevolmente si distruggono,

$$Tri.\,BID = \frac{1}{2}BM,\ IN \pm \frac{1}{2}DN,\ IM.$$

II. Immaginando, come ò di sopra accennato, i due triangoli XDM, e DMN, e surrogando nel primo articolo $tri.XDM$ in vece di $tri.BDM$, ed XM in cambio di BM, si vedrà similmente

$$Tri.XID = \frac{1}{2}XM, IN \pm \frac{1}{2}DN, IM.$$

Ora in luogo di XM si ponga $BM+AD$, che gli è uguale per cagione del parallelogramo $XBDA$, e si otterrà

$$\text{(m)} \qquad Tri.XID = \frac{1}{2}BM, IN + \frac{1}{2}AD, IN \pm \frac{1}{2}DN, IM;$$

ma si è trovato nel primo articolo, che $\frac{1}{2}BM, IN \pm \frac{1}{2}DN, IM$ è uguale a $tri.BID$; e si sa, che $\frac{1}{2}AD, IN$ è uguale a $tri.DIA$; adunque

$$Tri.XID = tri.BID + tri.DIA.$$

Il che dovea dimostrarsi.

III. Quando nelle figure 60, e 61 il punto N cade tra D, ed A, allora la retta DN diventerà negativa, e negativi divengono anche i due triangoli DIN, e DNM, del secondo de' quali la base DM non è qui delineata, ma si sottintende come ò accennato.

Perciò in tal caso si dovranno cangiare nel tenore di questa dimostrazione i segni dei suddetti triangoli DIN, e DNM; come pure doranno mutarsi i segni di quei termini, ne' quali entra la DN; e si dimostrerà con pari evidenza, che in questo caso ancora sussiste la medesima equazione: $Tri.XDI = tri\,BID + tri.DIA$. Il che pure dovea dimostrarsi.

Corollario. — Dall'equazione (m) trovata in questa terza dimostrazione, si dedurrà felicemente il teorema di Pittagora; e ciò in due maniere simili a quelle, che ò tenute nel corollario XVIII, e nel corollario XXII. La figura 61 servirà per la prima maniera, e la figura 60 servirà per la seconda. Potranno i lettori far da loro stessi queste deduzioni, senzachè io le stenda.

Tutte e tre queste dimostrazioni del corollario XIII, sono adattabili ai casi de' corollarj XIV, XV, XVI, e XVII. Purchè si abbia il debito riguardo a quei triangoli, e rette, che di positivi diventano negativi, e versa-vice.

Ne ò dato un saggio nel terzo articolo della terza dimostrazione.

QUARTA DIMOSTRAZIONE (fig. 66). — Si rappresentano nella fig. 66 il triangolo BAD (il di cui lato si sottintenda); il parallelogramo $BDAX$ colla diagonale XD, e col prolungamento DH del suo lato AD; e le rette IX, IB, IA, ID, il tutto come nelle due figure 60, e 61.

Le altre linee di quelle figure non servono in questa dimostrazione. Ma la figura 66 comprende di più le rette AT, e BV parallele alla retta DI taglianti la diagonale in T, ed in V, e comprende ancora le rette IT, ed IV.

I. In virtù del parallelogramo XB è uguale ad AT, e l'angolo BXV, è uguale all'angolo ADT. In virtù delle parallele AT, e BV l'angolo BVX è uguale all'angolo ATD. Laonde i triangoli BXV, e ADT sono simili, ed eguali, e la XV è uguale alla DT; quindi la XT è uguale alla DV.

II. $Tri.XID = tri.VID + tri.XIV$.

Il triangolo BID è uguale al triangolo VID, perchè essi ànno la medesima base DI, e sono tra le stesse parallele BV, e DI.

Il triangolo DIA è uguale al triangolo XIV; perchè il triangolo DIA è uguale al triangolo TID (essendo ambidue sopra la stessa base DI, e tra le medesime parallele AT, e DI); e il triangolo TID è uguale al triangolo XIV per l'egualità delle loro basi, dimostrata nel primo articolo.

Adunque ponendo triangoli eguali in luogo d'eguali, si à

$$Tri.XID = tri.BID + tri.DIA.$$

Il che dovea dimostrarsi.

Questa dimostrazione semplice, ed ingegnosa è di Gio: Francesco mio figliuolo nel suo trattato de' triangoli. Egli l'adatta ancora ai casi de' corollarj XIV, XV, XVI, e XVII.

QUINTA DIMOSTRAZIONE (fig. 67). — La dimostrazione di mio figliuolo può cangiarsi così.

La figura 67 è somigliante alla 66. Vi mancano però le due parallele AT, e BV, come pure le due rette TI, ed VI, ma vi è di vantaggio il parallelogramo $APRX$ tra le due parallele XA, e DB prolungata, i lati del quale AP, ed XR sono paralleli alla retta ID. Comprende anche di più le rette PI, ed RI.

A cagione dei due parallelogrami $ADBX$, ed $APRX$ sono tra loro eguali le rette RP, XA, e RD. Perciò il triangolo RIP è uguale al triangolo BID. Di più il triangolo PID è uguale al triangolo DIA, che

à la stessa base, e sta tra le due medesime parallele AH, e DI. Laonde $Tri.\ RID = tri.BID + tri.DIA$; ma il triangolo XID è uguale al triangolo RID, che à la stessa base, e sta tra le medesime parallele XR, e DI. Adunque $Tri.XID = tri.BID + tri.DIA$. Il che dovea dimostrarsi.

Le belle proposizioni meritano di essere dimostrate in più maniere.

Teorema XXXIII (fig. 68). — Sia il triangolo BAD acutangolo in A, dal di cui vertice si conducano su la base BD (di qua, e di là prolungata) le rette AC, ed AE tali, che ciascuno degli angoli ACE, AEC sia eguale all'angolo del vertice BAD; io dico, che

$$AB^2 + AD^2 = 2BD^2 + BD\,(CB + DE). \tag{n}$$

Dimostrazione. — Per la similitudine delle due coppie di triangoli BDA, ADC, e DBA, ABE sussistono queste due proporzionalità:

$BD.AD::AD.CD$, cioè $CB + BD$, $\qquad BD.AB::AB.BE$ cioè $BD + DE$.

Dalla prima analogia si deduce $AD^2 = BD\,(CB + BD)$.

Dalla seconda si tira $AB^2 = BD\,(BD + DE)$.

Aggiungendo queste due equazioni, si à

$$AB^2 + AD^2 = BD\,(BD + DE + CB + BD), \tag{o}$$

equazione, che non differisce dall'altra (n). Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I (fig. 68). — Se il punto C cade tra B, e D, oppure se il punto E cade tra B, e D, l'equazione (n) diviene

$$AB^2 + AD^2 = 2BD^2 + BD\,(\mp CB \pm DE).$$

Nel segno doppio il superiore è pel primo caso, e l'inferiore pel secondo.

Corollario II (fig. 68). — Se il triangolo BAD è ottusangolo in A; tanto C, quanto E cadono tra B, e D, e l'equazione (n) degenera nella seguente:

$$AB^2 + AD^2 = 2BD^2 - BD\,(CB + DE). \tag{p}$$

Corollario III (fig. 68). — Se il triangolo BAD è acutangolo, in modo però che l'angolo A sia maggiore di 60 gradi, ed anche sia mag-

giore di cadauno degli angoli alla base; allora ambi i punti C, ed E cadono tra B, e D, e vale la stessa equazione (p) del corollario precedente.

Corollario IV (fig. 68). — Se il triangolo BAD è rettangolo in A; allora i punti C, ed E non solo cadono tra B, ed E, ma coincidono in Z; punto, in cui la normale AZ calata dal vertice sulla base, la taglia. Perciò $CB+DE$ in questo caso è uguale a BD, e l'equazione (p) del secondo corollario diviene $AB^2+AD^2=BD^2$, come trovò Pittagora.

Corollario V (fig. 68). Teorema. — Si consideri il triangolo acutangolo BAD, come si è fatto nel presente teorema XXXIII; io dico, che

(q) $$AB^2+AD^2=BD^2+BD, CE.$$

Dimostrazione. — È uguale BD a $CE—CB—DE$. Questo valore di BD pongasi nell'equazione (o) in luogo di una delle due BD, che stanno incluse nella parentesi: e togliendo i termini, che si distruggon fra loro, apparirà l'equazione (q). Il che dovea dimostrarsi.

Corollario VI (fig. 68). — Nel caso del corollario I la CB, ovvero la DE divien negativa. Quindi nel tenore delle dimostrazioni del teorema XXXIII, e del corollario V precedente si mutino i segni della CB, ovvero respettivamente della DE, e l'equazione (q), ciò non ostante, rimarrà la stessa.

E resterà parimente la medesima nel caso del corollario III, in cui ambe le rette BC, e DE divengono negative. Vedrassi la verità di quest'asserzione, se si cangeranno i segni delle due medesime rette nelle dimostrazioni del teorema XXXIII, e del quinto corollario.

Corollario VII (fig. 68). — Ma nel caso del secondo corollario, cioè quando l'angolo al vertice BAD è ottuso, non solamente ambe le rette BC, e DE divengono negative, perchè i due punti C, ed E cadono tra B, e D; ma di più diventa negativa anche la retta CE, perchè il punto C cade tra E, e D, e il punto E cade tra B, e C; laddove nel caso del corollario III il punto C cadeva tra B, ed E, e il punto E cadeva tra C, a D. Laonde nelle dimostrazione del teorema XXXIII, e del quinto corollario si cangino i segni di tutte e tre le rette BC, DE, CE, e si conseguirà:

(r) $$AB^2+AD^2=BD^2—BD, EC.$$

Corollario VIII (fig. 68). — Nel caso del corollario IV, cioè quando l'angolo al vertice BAD è retto, divengono negative le rette BC, e DE; i punti C, ed E si confondono in Z, come ivi si è accennato, e l'equazione (r) mostra nuovamente $AB^2+AD^2=BD^2$.

Corollario IX (fig. 68). — Quando il triangolo BAD è equilatero, il punto C cade in B, e il punto E in D; la retta CE diviene BD; e l'equazione (q) degenera in quest'altra: $AB^2+AD^2=2BD^2$. Verità chiara per sè medesima. Essa deriva anche dall'equazione (n), dove in questo caso si annullano BC, e DE.

Corollario X (fig. 68). — Immaginando, che l'angolo al vertice A sia *oltremodo* acuto, i lati del triangolo BAD, e la retta CE saranno di tal grandezza rispetto a BD, e che BD^2 diverrà *quasi* trascurabile nell'equazione (q), la quale per conseguenza potrà mutarsi in quest'altra *pressochè* vera: $AB^2+AD^2=BC, CE$.

Corollario XI (fig. 68). Teorema. — Salvo rimanendo ciò che è stato esposto nell'enunciazione di questo teorema XXXIII, io dico, che

$$AB^2-AD^2=BD\,(DE-CB). \tag{s}$$

Dimostrazione. — Nella dimostrazione del presente teorema XXXIII si sono provate queste due equazioni:

$$AD^2=BD\,(CB+BD);\quad AB^2=BD\,(BD+DE).$$

Sottraggasi la prima dalla seconda, e si otterrà l'equazione (s). Il che dovea dimostrarsi.

Corollario XII (fig. 68). Teorema. — Salvo rimanendo ciò, che è stato esposto nell'enunziazione di questo teorema XXXIII, e immaginando di più la normale AZ calata dal vertice A del triangolo acutangolo BAD sopra la base BD; io dico, che

$$AB^2-AD^2=BD\,(BZ-DZ). \tag{t}$$

Dimostrazione. — Essendo per la costruzione il triangolo CAE isoscele, e la AZ perpendicolare sopra la BD; sarà DZ eguale ad EZ. Ma CZ è uguale a $CB+BZ$, siccome EZ è uguale a $DE+DZ$; adunque $CB+BZ=DE+DZ$, e trasponendo, $DE-CB=BZ-DZ$. Si surroghi nell'equazione (s) in cambio di $DE-CB$ questo suo valore, e si manifesterà l'equazione (t). Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO XIII (fig. 68). — Nei casi de' corollarj II, III, e IV le rette DE, e CA divengono ambe negative, ma le rette BZ, e DZ non mutano stato, e restano positive come prima. Dunque adattando a questi casi i raziocinj fatti di sopra, si vedrà, che l'equazioni (s), e (t) diventano rispettivamente le seguenti:

(u) $$AB^2 - AD^2 = BD\,(CB - DE).$$

(x) $$AB^2 - AD^2 = BD\,(BZ - DZ).$$

Nel caso però del corollario IV (cioè quando l'angolo BAD è retto) CB è uguale a BZ, e DE è uguale a DZ.

COROLLARIO XIV (fig. 68). — In virtù dell'equazioni (s), e (t) si ànno queste due respettive analogie pel caso de' corollarj XI, e XII, cioè pel caso del presente teorema XXXIII.

$$BD\,.\,AB+AD :: \pm AB \mp AD\,.\,\pm DE \mp CB,$$

$$DB\,.\,AB+AD :: \pm AB \mp AD\,.\,\pm BZ \mp DZ.$$

COROLLARIO XV (fig. 68), — E in virtù dell'equazioni (u), ed (x) si ànno queste altre due analogie pe' casi de' corollari II, III, e IV, allegati nel corollario XIII.

$$BD\,.\,AB+AD :: \pm AB \mp AD\,.\,\pm CB \mp DE,$$

$$BD\,.\,AB+AD :: \pm AB \mp AD\,.\,\pm BZ \mp DZ.$$

Ne' casi espressi nel presente corollario, e nell'antecedente, l'ultima analogia è la stessa, che l'antipenultima.

Ma nel caso del corollario IV il secondo conseguente dell'ultima analogia non differisce dal secondo conseguente della penultima.

COROLLARIO XVI (fig. 68). — Se il triangolo BAD è acutangolo in A; e se l'angolo D è ottuso, e l'angolo B è maggiore dell'angolo A; allora DZ diventa negativa, e CB, DE, e CZ restano positive. Laonde adattando i raziocinj a questo cangiamento, l'equazioni (s) e (t) somministrano l'equazioni rispettive, che seguono.

(y) $$AB^2 - AD^2 = BD\,(DE - CB).$$

(z) $$AB^2 - AD^2 = BD\,(BZ + DZ).$$

COROLLARIO XVII (fig. 68). — Ma se supposte le altre suddette cose l'angolo B è minore dell'angolo A, allora non solo DZ divien ne-

gativa, ma tale diventa anche BC. Perciò avendo riguardo ne' raziocinj a questo caso, l'equazione (t) dà l'equazione (z) e l'equazione (s) dà quest'altra:

(aa) $$AB^2 - AD^2 = BD\,(DE + CB).$$

COROLLARIO XVIII (fig. 68). — In ambidue i casi dei due precedenti corollarj, se l'angolo D è retto in vece di essere ottuso, sussistono rispettivamente le due equazioni (y), ed (aa); ma l'equazione (z) diviene

(bb) $$AB^2 - AD^2 = BD^2,$$

perchè il punto Z cade in D, DZ si annulla, e BZ diventa BD. Con che torna di bel nuovo ad apparire il teorema di Pittagora.

COROLLARIO XIX. — Ne' casi dei tre corollarj XVI, XVII, e XVIII si trarranno delle proporzionalità dall'equazioni (y), (z), ed (aa) similmente a ciò, che si è fatto nel corollario XIV in ordine all'equazioni (s) e (t).

COROLLARIO XX (fig. 68). — Se il triangolo BAD è acutangolo in A, e l'angolo B è ottuso, ovvero retto, s'immagini *rovesciata* la figura 68 dalla destra alla sinistra, e si *riavranno* i casi de' corollarj XVI, XVII, e XVIII in guisa, che ponendo nell'equazioni (y), (z), e (bb), AD in vece di AB, e versa-vice AB in vece di AD; BC in luogo di DE, e DE in luogo di BC; come pure DZ in cambio di BZ, e BZ in cambio di DZ; l'equazioni (y), (z), (aa), e (bb) daranno respettivamente

(cc) $$AD^2 - AB^2 = BD\,(BC - DE),$$

(dd) $$AD^2 - AB^2 = BD\,(DZ + BZ),$$

(ee) $$AD^2 - AB^2 = BD\,(BC + DE),$$

(ff) $$AD^2 - AB^2 = BD^2.$$

COROLLARIO XXI. — Anche le tre equazioni, che precedono l'ultima, daranno analogie simili a quelle del corollario XVI, e similmente dedotte.

COROLLARIO XXII (fig. 68). — Ne' casi del corollario XX, se l'angolo D è maggiore dell'angolo acuto A; allora BC, DE, e DZ riman-

gono positive; ma BZ divien negativa. Cosicchè applicando i raziocin j a questo caso, l'equazioni (s) e (t) forniscono due equazioni, le quali sono le stesse, che l'equazioni (cc), e (dd) trasposte.

Corollario XXIII (fig. 68). — Ne' casi del corollario XX, se l'angolo D è minore dell'angolo acuto A; allora BC, e DZ restano positive; ma BZ, e DE divengono negative. Quindi applicando a questo caso i raziocinj, l'equazioni (s), e (t) dànno due equazioni, le quali sono le medesime, che l'equazioni (ee), e (dd) trasposte.

Corollario XXIV (fig. 68). — Ne' casi del corollario XX, se l'angolo B è retto, allora il punto Z cade in B, la BZ si annulla, e DZ diviene DB. Laonde dopo aver applicati a questo caso i raziocinj, si vedrà, che l'equazione (t) somministra l'equazione (ff) trasposta.

Ò aggiunti questi tre ultimi corollarj perchè concordano col corollario XX, e comprovano la giustezza de' miei raziocinj.

Corollario XXV (fig. 68). — Considerando ora i casi del corollario I, in cui tutti e tre gli angoli, cioè A del vertice, e B, e D della base, sono acuti: e in cui C cade tra B, e D (caso primo), ovvero E cade tra B, e D (caso secondo).

Allora BC (caso primo) divien negativa, e DE resta positiva, ovvero DE (caso secondo) diventa negativa, e BC rimane positiva. Ma BZ, e DZ restano positive nel primo caso, e nel secondo. Perciò applicando le suddette modificazioni ai raziocinj già fatti, l'equazione (s) del corollario XI dà quest'altra:

$$AB^2 - AD^2 = BD\,(\pm DE \pm CB).$$

Ne' segni doppj il superiore è pel primo caso, e l'inferiore pel secondo.

Ma l'equazione (t) del corollario XII vale ancora per ambidue i casi del corollario presente.

Teorema XXXIV. — Nella figura 31 la retta AT s'immagini normale sulla BD, e la AO si trascuri. Io dico, che gli angoli TAB, RAD saranno eguali, se si avrà

$$TD = \frac{AT^2(TB + TR)}{AT^2 - TB,\,TR}.$$

Dimostrazione. — Se si considera la dimostrazione della prima parte del teorema XIII, si vede, che siccome posta l'eguaglianza degli angoli BAT, DAR viene l'equazione (71); così posta l'equazione (71) viene l'eguaglianza degli angoli BAT, DAR, e ciò generalmente; adunque ancora nella supposizione di AT *normale* dee valere la stessa equazione (71).

Pongasi in essa $TB + TR$ in vece di BR; $TD - TR$ in luogo di RD; ed $AT^2 + TR^2$ in cambio di AR^2, e si troverà

$$\frac{TB, TD + TR, TD - TB, TR - TR^2}{TB, TD} = \frac{AT^2 + TR^2}{AT^2}.$$

Si tratti quest'equazione come una proporzionalità, e sarà *dividendo*

$$\frac{TR, TD - TB, TR - TR^2}{TB, TD} = \frac{TR^2}{AT^2},$$

poscia *alternando*

$$\frac{TR, TD - TB, TR - TR^2}{TR^2} = \frac{TB, TD}{AT^2},$$

cioè

$$\frac{TD - TB - TR}{TR} = \frac{TB, TD}{AT^2}.$$

E quest'ultima proporzionalità, trattata come un'equazione, conduce a quella del teorema. Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I. — Nella figura 31 modificata come sopra, AT rappresenta il raggio; TB la tangente dell'arco, che misura l'angolo TAB; e TR la tangente dell'arco, che misura l'angolo TAR, e TD la tangente dell'arco, che misura l'angolo TAD.

Laonde se sono date la tangente TB, e la tangente TR, il valore di TD tangente dell'arco, che misura l'angolo TAD eguale alla somma degli angoli dati TAB, TAR, sarà quello espresso nell'equazione del teorema.

Corollario II (fig. 31). — Dalla suddetta equazione del teorema nasce

$$TB = \frac{AT^2 (TD - TR)}{AT^2 + TR, TD};$$

di modo che se sono date la tangente TR e la tangente TD, il valore

di TB tangente dell'arco, che misura la differenza degli angoli dati TAD, TAR, sarà quello espresso nell'ultima equazione.

Io non avrei pensato a questo teorema, se, dopo inoltrata l'impressione del trattato presente, Gio. Francesco mio figliuolo non mi avesse accennato, che dal teorema XIII (il quale à luogo anche nel suo trattato de' triangoli) poteano dedursi il primo lemma dello scritto del Sig. Giovanni Bernulli inserto negli atti di Lipsia dell'anno 1722; e il primo teorema dello scritto del Sig. Ermanno, che sta ne' suddetti atti dell'anno 1706, ed è la medesima proposizione.

La mia dimostrazione è diversa dalle loro.

Teorema XXXV. — Nella figura 31 s'immagini come sopra la retta AT normale sulla BD, e si trascuri la AO: Io dico, che gli angoli TAB, DAR saranno eguali, se si avrà

$$AD = \frac{AB, AT, AR}{AT^2 - TB, TR}.$$

Dimostrazione. — Considerando le due dimostrazioni della seconda parte del teorema XIV, si vede in ambedue, che siccome posta l'eguaglianza degli angoli BTA, DAR, viene l'equazione (74); così posta l'equazione (74), viene l'eguaglianza degli angoli BAT, DAR: e questo generalmente. Adunque anche nella supposizione della normalità di AT à da valere la medesima equazione (74).

Per l'equazione del teorema antecedente si à

$$\frac{TD}{BT + TR}\left[\text{cioè}\,\frac{TD}{BR}\right] = \frac{AT^2}{AT^2 - TB, TR};$$

e moltiplicando per quest'equazione l'equazione (74), si conseguisce

$$1 = \frac{AT, AR, AB}{AD\,(AT^2 - TB, TR)},$$

che porta subito all'equazione del teorema presente. Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I (fig. 31). — Il valore di AD secante dell'arco, che misura l'angolo TAD eguale alla somma degli angoli dati TAB, TAR, è quello espresso nell'equazione di questo teorema, il quale è lo stesso,

che il teorema II dello scritto del Sig. Ermanno allegato di sopra; ma differente è la mia dimostrazione.

Corollario II. — Si sostituisca nell'equazione (74) la $\sqrt{AD^2 - AT^2}$ in luogo di TD, indi si quadri, e fatte le debite operazioni si scoprirà

$$AD^2 = \frac{AT^2, AR^2, AB^2}{AR^2, AB^2 - AT^2, BR^2}.$$

Nuova formola per la secante dell' arco, che misura l' angolo TAD eguale alla somma degli angoli dati TAB, TAR.

Corollario III. — Se nel *denominatore* del secondo membro dell'ultima formola per la secante, ec., si pone $AT^2 + TR^2$ in luogo di AR^2; $AT^2 + BT^2$ in vece di AB^2; e $(BT + TR)^2$ in cambio di BR^2; la stessa ultima formola si muterà in un'altra equazione, di cui prendendo la radice, sarà questa l'equazione del teorema presente dedotta senza l'aiuto del corollario IV del precedente.

Giacchè ò ripensato al teorema XIV, e all'equazione (74), mi giova trarne il seguente

Teorema XXXVI. — Due triangoli, che ànno un angolo eguale, sono tra loro come i prodotti de' proprj lati comprendenti l'angolo eguale

Dimostrazione (fig. 31). — Gli angoli tra loro eguali dei due triangoli siano BAR, DAT: adattati nella figura 31 in guisa, che anche la porzione di angolo BAT sia eguale alla porzione di angolo DAR: come pure AB sia uno de' lati del primo triangolo, e AD sia uno de' lati del secondo triangolo. AR poi sia prolungamento, o porzione dell'altro lato del primo triangolo, seppure non è lo stesso lato; ed AT sia prolungamento, o porzione dell'altro lato del secondo triangolo, seppure non è lo stesso lato.

Può dunque concepirsi, senza fare altra figura, che il primo triangolo sia BAr, immaginando r sulla retta AR; e che il secondo triangolo sia DAt, immaginando t sulla retta AT.

Laonde è chiaro, che si avrà $tri.\, BAR = \frac{AR}{Ar}\, tri.\, BAr$, e

$$Tri.\, DAT = \frac{AT}{At}\, tri.\, DAt \cdot$$

Ma per l'equazione (74) si à eziandio $\frac{RB}{TD}$, cioè $\frac{tri.\,BAR}{tri.\,DAT}$, vale a dire

$$\frac{\frac{AR}{Ar}\,tri.\,BAr}{\frac{AT}{At}\,tri.\,DAt} = \frac{AR,\,AB}{AT,\,AD}.$$

Adunque $\frac{tri.\,BAr}{tri.\,DAt} = \frac{AB,\,Ar}{AD,\,At}$. Il che dovea dimostrarsi.

Per altro questo teorema si dimostra indipendentemente dal XIV, e brevemente così (fig. 69, e 70).

Siano i due triangoli BAD, bAd, à da provarsi questa proporzionalità: $\frac{tri.\,BAD}{tri.\,bAd} = \frac{AB,\,AD}{Ab,\,Ad}$.

DIMOSTRAZIONE. — Si tiri la retta bD, si avrà $\frac{tri.\,BAD}{tri.\,bAD} = \frac{AB}{Ab}$, e $\frac{tri.\,bAD}{tri.\,bAd} = \frac{AD}{Ad}$.

Si moltiplichi la prima di queste due proporzionalità per la seconda, e ne risulterà $\frac{tri.\,BAD}{tri.\,bAd} = \frac{AB}{Ab} \times \frac{AD}{Ad} = \frac{AB,\,AD}{Ab,\,Ad}$. Il che dovea dimostrarsi.

Se in vece delle proporzioni $\frac{AB}{Ab}$, ed $\frac{AD}{Ad}$ si prendono le respettive proporzioni equivalenti $\frac{AB,\,AD}{Ab,\,AD}$, ed $\frac{Ab,\,AD}{Ab,\,Ad}$, la dimostrazione si ridurrà speditamente all'*egualità ordinata.*

COROLLARIO I. — Adesso il teorema XIV può essere un corollario immediato del presente (veggasi la figura 31), perchè apparisce subito $\frac{tri.\,DAR}{tri.\,BAT}\left[\text{cioè } \frac{RD}{TB}\right] = \frac{AR,\,AD}{AT,\,AB}$; che è l'equazione (73): come pure $\frac{tri.\,BAR}{tri.\,DAT}\left[\text{cioè } \frac{RB}{TD}\right] = \frac{AR,\,AB}{AT,\,AD}$, che è l'equazione (74).

COROLLARIO II. — Similmente si deduce da questo teorema la prima parte della terza proposizione del sesto libro d'Euclide, vale a dire, che se l'angolo d'un triangolo è diviso per metà da una retta, che taglia anche il lato opposto, i segmenti di questi lati sono proporzionali agli altri corrispondenti lati del triangolo.

Per dimostrar questo corollario potrà servire la figura 31, purchè in essa s'immagini, che l'angolo BAT sia eguale adesso all'angolo TAR.

Imperciocchè in virtù di questo teorema sarà

$$\frac{tri.\ BAT}{tri.\ TAR}\left[\text{cioè } \frac{BT}{TR}\right]=\frac{AB,\ AT}{AT,\ AR}=\frac{AB}{AR}.$$

Scolio (fig. 31). — L'intuito della figura 31, e quest'ultimo corollario mi conducono, mediante la considerazione del solo triangolo, ad una equazione, che serve a sciogliere il problema della trisezione dell'angolo.

L'angolo dato BAD, che à da trisecarsi, dividasi primieramente in due parti eguali dalla retta AO; dal punto O di essa preso ad arbitrio si tiri la perpendicolare OB, che incontra in B, e in D i lati dell'angolo BAD, e s'immagini, che siano condotte dal vertice A le due rette AT, ed AR, che dividano lo stesso angolo BAD in tre parti eguali, ed incontrino la perpendicolare nei respettivi punti T, ed R.

È manifesto, che gli angoli TAO, RAO sono tra loro eguali, e che $OB=OD$; $AB=AD$; $OT=OR$; ed $AT=AR$. Perciò chiamando $AB\,(c)$; $OB\,(b)$; $AO\,(a)$; e $BT\,(y)$; saranno OT, ed anche $OR=b-y$; $TR=2\,(b-y)$, ed $AR=\sqrt{a^2+b^2-2\,by+y^2}=\sqrt{c^2-2\,by+y^2}$, ponendo c^2 in luogo di a^2+b^2, che gli è uguale.

Adunque in virtù dell'ultimo corollario del presente teorema, $BT^2\,(y^2)$ sta a $TR^2\,(4b^2-8\,by+4\,y^2)$, come $AB^2(c^2)$ sta ad $AR^2(c^2-2\,by+y^2)$: e prendendo i prodotti degli estremi, e dei medj, ec. operando a dovere, e ordinando l'equazione, si trova

$$y^4-2\,by^3-3\,c^2y^2+8\,c^2by-4\,c^2b^2=0.$$

Dividasi quest'equazione per $y-2b$, e si scoprirà

$$y^3-3\,c^2y+2\,c^2b=0. \tag{I}$$

Corollario (fig. 31). — Se l'angolo dato BAD è retto, sarà semiretto l'angolo BAO; $AO\,(a)$ sarà eguale ad $OB\,(b)$, e c^2 sarà eguale a $2b^2$; di maniera che l'equazione (I) diverrà

$$y^3-6\,b^2y+4\,b^3=0,$$

e questa ancora divisa per $y-2b$, fa conoscere

$$y^2+2\,by-2\,b^2=0.$$

Altra maniera (fig. 31). — Si chiamino z la AT, e la sua eguale AR; saranno OT, e la sua eguale $OR = \sqrt{z^2 - a^2}$: perlocchè $BT\,(b - \sqrt{z^2 - a^2})$ starà a $TR\,(2\sqrt{z^2 - a^2})$, come $AB\,(c)$ sta ad $AR\,(z)$.

Eguagliando il prodotto degli estremi a quello de' medj

$$bz - z\sqrt{z^2 - a^2} = 2c\sqrt{z^2 - a^2};$$

e trasponendo $(2c + z)\sqrt{z^2 - a^2} = bz$. Quadrando, indi ordinando l'equazione, e ponendo $-c^2z^2$ in luogo di $-a^2z^2 - b^2z^2$, si conseguisce

$$z^4 + 4cz^3 + 3c^2z^2 - 4a^2cz - 4a^2c^2 = 0.$$

Quest'equazione divisa per $z + c$, darà

$$z^3 + 3cz^2 - 4a^2 = 0.$$

Corollario. — Quando l'angolo BAD è retto, a^2 è uguale a $\frac{1}{2}c^2$, e l'ultima equazione diventa

$$z^3 + 3cz^2 - 2c^3 = 0.$$

Laonde dividendo qui ancora per $z + c$, ne viene

$$z^2 + 2cz - 2c^2 = 0.$$

Terza maniera (fig. 31). — Si chiamino adesso u la OT, e la OR; saranno la AT, e la $AR = \sqrt{a^2 + u^2}$.

$$BT^2\,(b^2 - 2bu + u^2) \cdot TR^2\,(4u^2) :: AB^2\,(a^2 + c^2) \cdot AR^2\,(a^2 + u^2).$$

Si eguaglino i due prodotti degli estremi, e dei medj, si operi nel debito modo, e si otterrà

$$\begin{aligned} u^4 - 2bu^3 - 3b^2u^2 - 2a^2bu + a^2b^2 = 0.\\ -3a^2u^2 \qquad\qquad\qquad \end{aligned}$$

Da quest'equazione divisa per $u + b$, proviene

(II) $$u^3 - 3bu^2 - 3a^2u + a^2b = 0.$$

Corollario 1 (fig. 31). — Allorchè è retto l'angolo BAD, la a è uguale alla b, e l'equazione (II) si muta in questa:

$$u^3 - 3bu^2 + b^3 = 0,$$

che è divisibile anch'essa per $u + b$, e ne viene per quoziente

$$u^2 - 4bu + b^2 = 0.$$

Corollario II. — Facendo nell'equazione (II) $u=x+b$, ne risulta

$$x^3 - 3b^2x - 2b^3 = 0,$$
$$- 3a^2x - 2a^2b$$

ovvero ponendo in luogo di b^2+a^2 il suo valore c^2

$$x^3 - 3c^2x - 2c^2b = 0.$$

Corollario III. — Insegna l'Algebra, che mutando i segni de' termini pari di un'equazione, le radici di essa, che erano *positive*, divengono *negative*, e le radici pur di essa, che erano *negative*, diventane *positive*.

Or siccome mutando il segno del termine pari dell'equazione (I), ne viene $y^3 - 3c^2y - 2c^2b = 0$, che non differisce punto dall'equazione (II); così deve inferirsi, che la radice positiva dell'equazione (II), venendo presa negativamente, è la radice negativa dell'equazione (I), e che le due radici negative della stessa equazione (II), venendo prese negativamente, sono le due radici positive della sopradetta equazione (I).

Annotazioni concernenti il caso irreduttibile delle equazioni cubiche. — Non è fuor di proposito l'accennare:

Primo, che secondo i principj dell'Algebra ambe l'equazioni (I), e (II) ànno reali le tre loro radici, perchè il cubo di c^2, cioè c^6, è maggiore del quadrato di bc^2, cioè di b^2c^4: essendo la diagonale $BA\,(c)$ maggiore di $BO\,(b)$, uno dei lati dell'angolo retto BOA.

Secondo, che l'equazioni (I), e (II) rappresentano la formola generale $t^3 - pt \pm q = 0$, allorchè $\frac{p^3}{27}$ è maggiore di $\frac{q^2}{4}$, che è il caso dell'equazioni cubiche chiamato *irreduttibile* dagli Algebristi: rappresentano, dissi, l'equazioni (I), e (II) tal formola generale, purchè suppongasi

$$c = \sqrt{\frac{p}{3}}, \text{ e } b = \frac{3q}{2p}.$$

Terzo, che $AB\,(c)$ è il diametro d'un semicerchio, sul quale adattando la corda $BO\,(b)$, si determina l'angolo retto BOA, e l'angolo BAO; e conseguentemente l'angolo BAD duplo di BAO.

Quarto, che in virtù delle cose mostrate di sopra, e delle determinazioni espresse nell'articolo precedente, l'angolo BAT, cui à rapporto l'equazione (I), è suttriplo di BAD $(2BAO)$. E che l'angolo

$$TAO\left[\frac{1}{2}TAR\right],$$

cui l'equazione (II) corrisponde, è suttriplo di $BAO\left[\frac{1}{2}BAD\right]$.

Dissi, che l'equazione (II) corrisponde all'angolo TAO, perchè essendo stato supposto nel precedente secondo corollario OT (u) eguale ad $x + BO$ (b), ne segue, che x è uguale ad OT (u) — BO (b). Così l'equazione (I) à rapporto all'angolo BAT, perchè y è uguale a BT.

Sarà dunque agevole a comprendere, come il caso irreduttibile delle equazioni cubiche si riferisca alla trisezione dell'angolo dedotta da questa mia maniera.

TEOREMA XXXVII (fig. 69). — Sia qualunque triangolo ADB, dal di cui angolo D si tiri al lato opposto la retta Db, che lo tagli a qualsivoglia angolo, e le lettere f, g, h rappresentino tre rette tali, che abbiasi $\frac{Ab}{AD} = \frac{f}{h}; \frac{Bb}{BD} = \frac{g}{h}$; io dico, che il rettangolo h, AB è uguale al rettangolo f, AD più il rettangolo g, BD.

DIMOSTRAZIONE.

$$\frac{f,\ AD}{h,\ AB} = \frac{f}{h} \times \frac{AD}{AB} = \frac{Ab}{AD} \times \frac{AD}{AB} = \frac{Ab}{AB},$$

$$\frac{g,\ BD}{h,\ AB} = \frac{g}{h} \times \frac{BD}{AB} = \frac{Bb}{BD} \times \frac{BD}{AB} = \frac{Bb}{AB},$$

cosicchè

$$\frac{f,\ AD + g,\ BD}{h,\ AB} = \frac{Ab + Bb}{Ab}.$$

Ma $AB = Ab + Bb$; adunque $h, AB = f, AD + g, BD$. Il che dovea dimostrarsi.

Questa generale proprietà de' triangoli, per quanto mi è noto, non è stata da altri avvertita.

COROLLARIO. — Il triangolo ADB della figura 69 s'immagini ora rettangolo in D, e la retta Db perpendicolare sopra AB; si darà luogo a quest' altro

TEOREMA. — Le lettere L, M, ed N esprimano altrettante figure rettilinee, o curvilinee tra loro simili, descritte, e similmente poste, la prima L sopra il lato DA del suddetto triangolo rettangolo ADB, la seconda M sopra l'altro lato DB, e la terza N sopra l'ipotenusa AB; io dico, che la figura N è uguale alla figura L più la figura M.

Dimostrazione. — La similitudine de' triangoli rettangoli ADB, AbD, BbD mostra $\frac{Ab}{AD}\left[\frac{f}{h}\right]=\frac{AD}{AB}$, e $\frac{Bb}{BD}\left[\frac{g}{h}\right]=\frac{BD}{BA}$; laonde nella presente ipotesi $\frac{f,AD}{b,AB}$, eguale ad $\frac{f}{h}\times\frac{AD}{AB}$; è in ragione duplicata di $\frac{AD}{AB}$, e $\frac{g,BD}{h,AB}$, eguale a $\frac{g}{h}\times\frac{BD}{AB}$; è in ragione duplicata di $\frac{BD}{AB}$. Ma per la simiglianza, ec. delle due figure L, ed N, anche $\frac{L}{N}$ è in ragione duplicata di $\frac{AD}{AB}$; e per la simiglianza, ec. delle due figure M, ed N, anche $\frac{M}{N}$ è in ragione duplicata di $\frac{BD}{AB}$. Adunque $\frac{L}{N}=\frac{f,AD}{h,AB}$, ed $\frac{M}{N}=\frac{g,BD}{h,AB}$.

Si à pertanto $\frac{L+M}{N}=\frac{f,AD+g,BD}{h,AB}$; ed essendosi dimostrato nel teorema XXXVII, che $h,AB=f,AD+g,BD$, ne segue, che $N=L+M$. Il che dovea dimostrarsi.

Altra Dimostrazione. — Ovvero immediatamente

$$\frac{L}{N}=\frac{AD^2}{AB^2}=\frac{AD}{AB}\times\frac{AD}{AB}=\frac{Ab}{AD}\times\frac{AD}{AB}=\frac{Ab}{AB},$$

$$\frac{M}{N}=\frac{BD^2}{AB^2}=\frac{BD}{AB}\times\frac{BD}{AB}=\frac{Bb}{BD}\times\frac{BD}{AB}=\frac{Bb}{AB};$$

adunque $\frac{L+M}{N}=\frac{AD^2+BD^2}{AB^2}=\frac{Ab+Bb}{AB}$.

E siccome $AB=Ab+Bb$, così $N=L+M$, come pure

$$AB^2=AD^2+BD^2.$$

Il che dovea dimostrarsi.

Il teorema del presente corollario comprende nella sua universalità la proposizione XXXI, del sesto libro d'Euclide.

Teorema XXXVIII (fig. 71, e 72). — Il seno della somma, ovvero della differenza di due angoli dati è uguale alla somma, ovvero respettivamente alla differenza delle tangenti di detti angoli, moltipli-

cata pel quadrato del seno totale, e divisa pel prodotto delle secanti de' medesimi angoli.

Avvertimento. — Nelle due figure 71, e 72, *DAC*, *BAC* sono gli angoli dati; *AC* è il seno totale; *CF* normale sul lato *AD* del triangolo *BAC*, è il seno dell'angolo *DAC*, siccome *CE* normale sul lato *AB* del triangolo *BAC* è il seno dell'angolo *BAC;* e *BG* è normale sopra *AD*.

Ma quando *AC* è normale sopra *BD*, allora *CD* è la tangente dell'angolo *DAC*, e *CB* la tangente dell'angolo *BAC*.

Prima Dimostrazione. — Se si descrivono sulle figure 71, e 72 tutte le linee, che ànno luogo nelle figure 1, e 2, e si applicano ad ambedue le figure 71, e 72, la prima dimostrazione del primo teorema, il corollario di esso, e la prima dimostrazione del terzo teorema, si vedrà, che l'equazione (4) può ampliarsi così:

$$\text{(V)} \qquad Sin.\ \frac{BAD}{AC} = sin.\ \frac{DAC}{AB} \pm sin.\ \frac{BAC}{AD}.$$

Nel segno doppio il superiore è per la fig. 71, e l'inferiore per la fig. 72.

Ed essendo anche nelle soprallegate dimostrazioni *AC* il seno totale, e per conseguenza ancora nel caso presente, $CF = sin.\ DAC$, come pure $CE = sin.\ BAC;$ si avrà in virtù dell'equazione (V)

$$Sin.\ \frac{BAD}{AC} = \frac{CF}{AB} \pm \frac{CE}{AD},$$

vale a dire

$$Sin.\ BAD = \frac{AC,\ AD,\ CF \pm AC,\ AB,\ CE}{AB,\ AD},$$

ma $AD, CF \pm AB, CE = 2\ tri.\ BAD;$ adunque

$$\text{(VI)} \qquad Sin.\ BAD = \frac{2\ tri.\ BAD,\ AC}{AB,\ AD}.$$

E tutto questo à luogo anche quando la *AC* non è normale sopra *BD:* quando poi lo è, allora $2\ tri.\ BAD = BD,\ AC;$ laonde

$$\text{(VII)} \qquad Sin.\ BAD = \frac{BD,\ AC^2}{AB,\ AD} = \frac{(DC \pm BC)\ AC^2}{AB,\ AD}.$$

Il che doveva dimostrarsi.

Anche la seconda dimostrazione del teorema III si può applicare alle fig. 71, e 72, e trarne l'equazione ampliata (V).

SECONDA DIMOSTRAZIONE (fig. 71, e 72). — $\frac{1}{2} AD, BG = tri. BAD$, e dividendo per $\frac{1}{2} AB, AD$, ne viene $\frac{BG}{AB} = \frac{2\ tri. BAD}{AB, AD}$.

Ora perchè AC è il seno totale, si à $\frac{BG}{AB} = \frac{sin. BAD}{AC}$, e conseguentemente $\frac{sin. BAD}{AC} = \frac{2\ tri. BAD}{AB, AD}$. Quindi nasce l'equazione (VI), e tutto il rimanente procede come sopra, ec. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA XXXIX (fig. 71, e 62). — La normale calata dal vertice del triangolo BAD sopra la base, è uguale alla radice quadrata del prodotto de' lati moltiplicato per *sin.* BAD, e diviso per la base.

DIMOSTRAZIONE. — L'equazione (VII) partorisce quest'altra:

$$AC^2 = \frac{AB, AD, sin. BAD}{AD};$$

ed estraendo la radice quadrata, apparisce

$$\text{(VIII)} \qquad AC = \sqrt{\frac{AB, AD, sin. BAD}{BD}}.$$

Il che doveva dimostrarsi.

TEOREMA XL (fig. 71, e 72). — L'area del triangolo è uguale alla metà della radice quadrata di quel prodotto, che risulta dalla moltiplicazione de' lati, della base, e del seno dell'angolo opposto alla base.

DIMOSTRAZIONE. — Essendo $\frac{1}{2} BD, AC$ l'area del triangolo BAD, si moltiplichi per $\frac{1}{2} BD$ l'equazione (VIII) e si otterrà:

$$\text{(IX)} \qquad Ar. Tri. BAD = \frac{1}{2} \sqrt{AB, AD, BD\ sin. BAD}$$

Il che doveva dimostrarsi.

TEOREMA XLI (fig. 71, e 72). — La normale calata del vertice del triangolo sopra la base, venendo moltiplicata dal raggio del cerchio cir-

coscritto al medesimo triangolo, è uguale alla metà del prodotto dei due lati di esso triangolo.

Dimostrazione. — Sanno gl' intendenti di trigonometria, che $Sin.\, BAD$ sta al seno totale AC, come $\frac{1}{2}\, BD$ sta al raggio del cerchio circoscritto al triangolo, qual raggio si chiami R; dimanierachè $sin.\, BAD$ è uguale ad $\frac{AC,\, BD}{2\, R}$: e ponendo questo valore di $sin.\, BAD$ nell' equazione (VIII), ne risulta: $AC = \sqrt{\frac{AB, AD\, AC}{2\, R}}$. Equazione, che trattata con destrezza, fa scoprire $AC,\, R = \frac{1}{2}\, AB,\, AD$. Il che doveva dimostrarsi.

Corollario. — Sussistono pertanto le due seguenti equazioni:

$$AC = \frac{AB,\, AD}{2\, R}, \tag{X}$$

$$R = \frac{AB,\, AD}{2\, AC}. \tag{XI}$$

Teorema XLII (fig. 71, e 72). — Il seno della somma, ovvero della differenza di due angoli dati, è uguale alla somma, ovvero respettivamente alla differenza delle tangenti di detti angoli, moltiplicata pel prodotto delle secanti degli angoli medesimi, e divisa pel quadrato del diametro del cerchio circoscritto al triangolo BAD.

Dimostrazione. — Pongasi nell'equazione (VII) il valore di AC preso dall'equazione (X), e fatte le debite operazioni, si scoprirà:

$$Sin.\, BAD = \frac{(DC \pm BC)\, AB,\, AD}{4\, R^2} = \frac{AB,\, AD,\, BD}{4\, R^2}. \tag{XII}$$

Il che doveva dimostrarsi.

Teorema XLIII (fig. 71, e 72). — L'area del triangolo è uguale al prodotto de' tre lati di esso, diviso pel quadruplo del raggio del cerchio circoscritto al medesimo triangolo.

PRIMA DIMOSTRAZIONE — Si sostituisca nell'equazione (IX) il valore di *sin.* BAD tratto dall'equazione (XII), e si conseguirà:

$$(XIII) \qquad Ar.\ Tri.\ BAD = \frac{AB,\ AD,\ BD}{4\,R}.$$

Il che doveva dimostrarsi.

SECONDA DIMOSTRAZIONE. — Si moltiplichi l'equazione (X) per $\frac{1}{2}BD$, e ne risulterà $\frac{1}{2}AC,\ BD$ eguale all'area del triangolo BAD, e insieme eguale al secondo membro dell'equazione (XIII). Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA XLIV (fig. 71, e 72). — Nel triangolo BAD il seno dell'angolo BAD è uguale allo stesso triangolo BAD diviso pel raggio del cerchio, che gli è circoscritto.

PRIMA DIMOSTRAZIONE — L'equazione (XIII) produce la seguente :

$$1 = \frac{4\,tri.\ BAD,\ R}{AB,\ AD,\ BD}$$

per la quale si moltiplichi l'equazione (XII), e si troverà:

$$(XIV) \qquad Sin.\ BAD = \frac{Tri.\ BAD}{R}.$$

Il che dovea dimostrarsi.

SECONDA DIMOSTRAZIONE. — Dall'equazione (X) vien questa :

$$1 = \frac{AB,\ AD}{R,\ AC},$$

per cui moltiplicando l'equazione (VI), si ottiene la (XIV).
Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA XLV (fig. 71, e 72). — Continui R a significare il raggio del cerchio circoscritto al triangolo BAD, e sia

$$(XV) \qquad H^2 = \frac{4\,AB^2,\ BD^2 - (AB^2 + BD^2 - AD^2)^2}{BD^2}.$$

Io dico, che R è uguale al prodotto dei due lati AB, e BD del triangolo BAD, diviso tal prodotto per H.

DIMOSTRAZIONE. — Per i triangoli DAC, BAC rettangoli in C si ànno queste due equazioni.

$$AC^2 = AD^2 - BD^2 \pm 2\, BC,\, BD - BC^2$$

(XVI) $$AC^2 = AB^2 - BC^2.$$

Nel segno doppio il superiore è per la fig. 71, e l'inferiore per la fig. 72.

Sottraggasi l'ultima equazione dalla penultima, si avrà

$$AD^2 - AB^2 - BD^2 \pm 2\, BC,\, BD = 0,$$

e perciò $\pm BC = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2\, BD}$.

Nell'equazione (XVI) moltiplicata prima pei 4, si surroghi il valore di BC^2 preso dall'ultima equazione, e fatte le necessarie operazioni, si conoscerà: $4\, AC^2 = \frac{4\, AB^2,\, BD^2 - (AB^2 + BD^2 - AD^2)^2}{BD^2}$, cioè $4\, AC^2 = H^2$, e perciò

(XVII) $$2\, AC = H.$$

Sostituiscasi questo valore di $2\, AC$ nell'equazione (XI), e si manifesterà:

(XVIII) $$R = \frac{AB,\, AD}{H}.$$

Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA XLVI (fig. 71, e 72). — Continui H^2 ad avere la figurazione espressa nell'equazione (XV).

In qualsivoglia triangolo il raggio del cerchio, che gli è circoscritto, sta alla normale calata dal vertice sulla base, come il doppio prodotto dei due lati del triangolo comprendenti l'angolo al vertice, sta ad H^2.

DIMOSTRAZIONE. — L'equazione (XVIII), si divida per l'equazione (XVII), indi si moltiplichi per 2 l'uno e l'altro membro dell'equazione, che ne risulta, e si arriverà all'infrascritta:

$$\frac{R}{AC} = \frac{2\, AB,\, AD}{H^2}.$$

Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA XLVII (fig. 71, e 72). — Il seno della somma, ovvero della differenza di due angoli dati è uguale ad H^2 moltiplicato per la somma, ovvero respettivamente per la differenza delle tangenti di detti angoli, e diviso pel prodotto delle secanti degli angoli medesimi.

DIMOSTRAZIONE. — Si quadri l'equazione (XVIII) moltiplicata prima per 2, e si avrà $4R^2 = \frac{4\,AB^2,\,AD^2}{H^2}$, dividasi per quest'ultima l'equazione (XII), e nascerà la seguente:

$$\text{(XIX)} \qquad Sin.\,BAD = \frac{H^2,\,BD}{4\,AB,\,AD} = \frac{H^2\,(DC \pm BC)}{4\,AB,\,AD}.$$

Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA XLVIII (fig. 71, e 72). — In ordine a qualunque triangolo BAD sussiste questa equazione:

$$\text{(XX)} \qquad Ar.\ tri.\,BAD = \frac{1}{4}\,H,\ BD.$$

PRIMA DIMOSTRAZIONE — Il valore di $sin.\,BAD$ preso dall'equazione (XIX) si surroghi nell'equazione (IX); si troverà l'equazione (XX). Il che dovea dimostrarsi.

SECONDA DIMOSTRAZIONE. — Pongasi nell'equazione (XIII) il valore di R desunto dalla (XVIII); ne deriverà parimente l'equazione (XX). Il che doveva dimostrarsi.

TERZA DIMOSTRAZIONE. — Si moltiplichi per $\frac{1}{4}\,BD$ l'equazione (XVII) si vedrà $\frac{1}{2}\,BD,\,AC$ (cioè $ar.\ tri.\,BAD$) $= \frac{1}{4}\,H,\,BD$. Il che doveva dimostrarsi.

TEOREMA XLIX (fig. 71 e 72). — Nel triangolo BAD le normali tirate dalle punte degli angoli A, B, e D ai respettivi lati opposti BD, AD, ed AB, si chiamino respettivamente normale A, normale B, e normale D.

Colla normale A come raggio si descriva un cerchio, sopra il quale si prenda l'arco, che misura il doppio dell'angolo A;

Colla normale B come raggio si descriva un cerchio, sopra il quale si prenda l'arco, che misura il doppio dell'angolo B;

E colla normale D come raggio si descriva un cerchio, sopra il quale si prenda l'arco che misura il doppio dell'angolo D.

Io dico, che sono tra loro eguali le corde dei tre archi suddetti presi sopra i tre accennati cerchi.

Prima Dimostrazione. — È cosa manifesta ai periti, che la corda del primo arco è uguale al doppio seno dell'angolo A;

Che la corda del secondo arco è uguale al doppio seno dell'angolo B;

E che la corda del terzo arco è uguale al doppio seno dell'angolo D.

Ma per lo teorema XLIV l'espressione dei detti tre seni è la stessa; mentre tal' espressione è sempre $tri. \frac{BAD}{R}$: e di fatto il triangolo BAD non si muta, e neppure si muta il raggio R del cerchio circoscritto al medesimo triangolo. Adunque sono tra loro uguali le corde dei tre archi suddetti presi sopra i tre accennati cerchi. Il che doveva dimostrarsi.

Seconda Dimostrazione. — La stessa conclusione si dedurrebbe, se si avesse riguardo al teorema XLII; in virtù di cui l'espressione dei tre antedetti seni è sempre una frazione, che à per numeratore il prodotto dei tre lati del triangolo BAD, ed ha per denominatore il quadrato del diametro del cerchio circoscritto al suddetto triangolo. Tal numeratore, e tal denominatore non variano punto. Adunque, ec. Il che, ec.

Teorema L (fig. 71, e 72). — Chiamando r il raggio del cerchio iscritto nel triangolo BAD; io dico, che r sta alla normale AC, come la base BD sta al perimetro del triangolo BAD.

Dimostrazione. — Per non imbarazzar la figura, s'immagini dentro il triangolo BAD il centro Y del cerchio in esso iscritto. Da questo punto Y si concepiscano tirate alle punte degli angoli A, B, D le rette YA, YB, ed YD. Egli è manifesto, che il triangolo BAD sarà diviso in tre triangoli parziali YAB, YBD, YAD: e immaginando in oltre le

tre perpendicolari tirate dall'indicato centro Y ai lati AB, BD, ed AD, è altresì noto, che ciascuna di esse perpendicolari sarà uguale al raggio del cerchio iscritto.

Tali cose supposte, si avrà l'equazione

$$\frac{1}{2} AB, r + \frac{1}{2} AD, r + \frac{1}{2} BD, r = tri. BAD;$$

adunque

$$r = \frac{2\, tri. BAD}{AB + AD + BD}.$$

In luogo di $tri. BAD$ si ponga $\frac{1}{2} AC, BD$; si vedrà

(XXI)

$$r = \frac{AC, BD}{AB + AD + BD}$$

vale a dire $\frac{r}{AC} = \frac{BD}{AB + AD + BD}$. Il che doveva dimostrarsi.

Teorema LI (fig. 71, e 72). — Nel triangolo BAD si chiamino $N.A$; $N.B$; $N.D$ le normali tirate dalle punte degli angoli A, B, e D ai respettivi lati opposti BD, AD, ed AB; io dico, che à luogo questa equazione:

(XXII)

$$r = \frac{(N.A, BD + N.B, AD + N.D, AB)}{3.(AB + AD + BD)}.$$

Dimostrazione. — In virtù dell'equazione (XXI), e de' raziocinj fatti per giungervi, si ànno le tre equazioni infrascritte:

$$r = \frac{N.A, BD}{AB + AD + BD},$$

$$r = \frac{N.B, AD}{AB + AD + BD},$$

$$r = \frac{N.D, AB}{AB + AD + BD}.$$

Aggiungendo insieme queste tre equazioni, e poscia dividendo per 3 la loro somma, si arriva all'equazione (XXII). Il che doveva dimostrarsi.

Teorema LII (fig. 71, e 72). — Salvo sempre il significato di H come nell'equazione (XV); io dico che il raggio del cerchio iscritto nel

triangolo BAD è uguale ad H moltiplicata per BD, e divisa pel doppio del perimetro del triangolo.

DIMOSTRAZIONE. Nell'equazione (XXI) pongasi in luogo di AC il suo valore $\frac{1}{2}H$ tratto dall'equazione (XVII), e ne sortirà:

$$\text{(XXIII)} \qquad r = \frac{H, BD}{2(AB + AD + BD)}.$$

Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA LIII (fig. 71, e 72). — Il doppio del prodotto formato dal raggio del cerchio circoscritto al triangolo, e dal raggio del cerchio iscritto nel triangolo, è uguale al prodotto dei tre lati del triangolo diviso tal prodotto per la periferia del triangolo.

DIMOSTRAZIONE. — Si surroghi nell'equazione (XXI) in vece di AC, il suo valore $\frac{AB, AD}{2R}$ tratto dall'equazione (X); si conseguirà:

$$\text{(XXIV)} \qquad r = \frac{AB, AD, BD}{2R(AB + AD + BD)}.$$

Indi moltiplicando per $2R$, si avrà:

$$2R, r = \frac{AB, AD, BD}{AB + AD + BD}.$$

Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO. — Quindi si vede:

$$\text{(XXV)} \qquad R = \frac{AB, AD, BD}{2r(AB + AD + BD)}.$$

TEOREMA LIV (fig. 71, e 72). — Il raggio del cerchio circoscritto al triangolo BAD sta al raggio del cerchio iscritto in esso triangolo, come $2\,AB, AD\,(AB + AD + BD)$ sta ad H^2, BD.

DIMOSTRAZIONE. — Dividasi l'equazione (XVIII) per l'equazione (XXIII), ne risulta $\frac{R}{r} = \frac{2\,AB, AD, (AB + AD + BD)}{H^2, BD}$.

Il che dovea dimostrarsi.

Corollario. — Adunque:

$$r = \frac{R, H^2, BD}{2\,AB, AD\,(AB + AD + BD)}$$

ed anche

$$R = \frac{2\,r, AB, AD\,(AB + AD + BD)}{H^2, BD}.$$

Teorema LV (fig. 71, e 72). — Nel triangolo BAD il seno dell'angolo BAD è uguale al quadrato del raggio del cerchio iscritto nel medesimo triangolo, moltiplicato per lo quadrato del perimetro di esso triangolo, e diviso pel prodotto de' tre lati di esso triangolo.

Prima Dimostrazione — L'equazione (XXV) moltiplicata per 2, e poi quadrata esibisce $4\,R^2 = \frac{AB^2, AD^2, BD^2}{r^2\,(AB + AD + BD)^2}$.

E dividendo per quest'ultima equazione la (XII), ne deriva:

$$\text{(XXVI)} \qquad Sin.\,BAD = \frac{r^2 (AB + BD + BD)^2}{AB, DA, BD}.$$

Il che dovea dimostrarsi.

Seconda Dimostrazione. — Nell'equazione (IX) in cambio di $ar.\,tri.\,BAD$ si sostituisca il suo valore $\frac{1}{2} r\,(AB + AD + BD)$; si moltiplichi poscia per 2; indi si quadri, e apparirà:

$$r^2\,(AB + AD + BD)^2 = AB, AD, BD, sin.\,BAD.$$

Laonde dividendo per AB, AD, BD, si otterrà l'equazione (XXVI). Il che dovea dimostrarsi.

Corollario. — Mediante il secondo membro di quest'equazione (XXVI), il quale à un valor, che non varia, può darsi una terza dimostrazione del teorema XLIX.

Teorema LVI (fig. 71, e 72). — L'area del triangolo è uguale al prodotto formato dal raggio del cerchio circoscritto ad esso, dal quadrato del raggio del cerchio iscritto in esso, e dal quadrato del perimetro di esso triangolo, diviso tal prodotto per quello dei tre lati del triangolo.

DIMOSTRAZIONE. — Si surroghi nell'equazione (XIV) in vece di $sin.\,BAD$ il suo valore desunto dall'equazione (XXVI), e poi si moltiplichi per R; si vedrà comparire l'equazione infrascritta:

$$\text{(XXVII)} \qquad Ar.\,tri.\,BAD = \frac{Rr^2(AB + AD + BD)^2}{AB,\,AD,\,BD}.$$

Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA LVII (fig. 71, e 72). — L'area del triangolo sta al quadrato del suo perimetro, come il quadrato del raggio iscritto moltiplicato pel raggio del cerchio circoscritto sta al prodotto dei tre lati del medesimo triangolo.

DIMOSTRAZIONE. — Dall'equazione (XXVII) si deduce immediatamente:

$$\frac{Ar.\,Tri.\,BAD}{(AB + AD + BA)^2} = \frac{r^2\,R}{AB,\,AD,\,BD}.$$

E quest'equazione considerata come proporzionalità contiene il teorema. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA LVIII (fig. 71, e 72). — Se l'area del triangolo si moltiplica pel prodotto dei suoi tre lati, e si divide pel quadrato del suo perimetro moltiplicato pel quadrato del raggio del cerchio *iscritto;* io dico, che tal quoziente è uguale al raggio del cerchio *circoscritto* nel medesimo triangolo.

DIMOSTRAZIONE. — Dall'equazione (XXVII) proviene l'infrascritta:

$$R = \frac{AB,\,AD,\,BD,\,tri.\,BAD}{r^2\,(AB + AD + BD)^2}$$

che include il teorema. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA LIX (fig. 71, e 72). — Se l'area del triangolo si moltiplica pel prodotto de' suoi tre lati, e si divide pel quadrato del suo perimetro moltiplicato pel raggio del cerchio *circoscritto;* io dico, che la radice quadrata di tal quoziente è uguale al raggio del cerchio *iscritto* nel medesimo triangolo.

DIMOSTRAZIONE. — L' equazione (XXVII) maneggiata a dovere conduce a questa

$$r = \frac{(AB, AD, BD, tri. BAD)^{\frac{1}{2}}}{\left[R(AB + AD + AD)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

nella quale il teorema è contenuto. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA LX (fig. 73). La base di qualunque triangolo BAD sia divisa per mezzo in C; io dico, che se nella retta AC si prende il punto V tale, che abbiasi $VC = \frac{1}{3} AC$, la somma de' tre quadrati VB^2; VA^2; VD^2 sarà un *minimo*.

AVVERTIMENTO. — Allorchè il punto u (fig. 73) cade sopra A, o sotto C; quanto più egli si allontana da A, ovvero C; tanto più cresce la somma $uB^2 + uA^2 + uD^2$. Ciò indica, che la stessa somma esige il *minimo;* perchè VC à un solo valore.

Si supporrà un simile avvertimento, senza esprimerlo, in ordine ai teoremi seguenti.

DIMOSTRAZIONE. — Dal punto V si cali sulla base la normale VP; sarà VB^2 eguale a $BC^2 + VC^2 + 2CP, BC$; similmente VD^2 sarà eguale a $DC^2 + VC^2 - 2\,CP, DC$; in fine sarà VA^2 eguale ad $AC^2 + CV^2 - 2\,VC, AC$. Talchè

$$VB^2 + VD^2 + VA^2 = BC^2 + DC^2 + AC^2 + 3\,VC^2 - 2\,AC, VC.$$

S'immagini il punto u prossimo ad V, e differenziando l'equazione precedente, si avrà $6\,VC, Vu - 2\,AC, Vu = 0$.

Dividendo poscia per $6\,Vu$, e trasponendo, si ottiene $VC = \frac{1}{3} AC$. Il che doveva dimostrarsi.

COROLLARIO. — Nel primo esempio del corollario V del teorema VIII ò fatto vedere, che prendendo i punti C, G, F nel mezzo de' respettivi lati BD, DA, AB, le rette AC, BG, DF si tagliano nel punto V: e che $VC = \frac{1}{3} AC$; $VG = \frac{1}{3} BG$; ed $VF = \frac{1}{3} DF$.

Adunque in vigore del presente teorema, prendendo per base il lato DA, la somma $VD^2+VB^2+VA^2$ (cioè $VB^2+VA^2+VD^2$) sarà un *minimo* rispetto alla retta BG;

E prendendo per base il lato AB, la somma $VA^2+VD^2+VB^2$ (cioè $VB^2+VA^2+VD^2$) sarà un *minimo* rispetto alla retta DF.

Scolio. — Si dimostra nella Statica, che il punto V è il centro di gravità del triangolo BAD.

Teorema LXI (fig. 74). — Sia il triangolo BAD, il di cui angolo al vertice A non superi 120 gradi, e gli angoli alla base B, e D siano minori di 90. Sopra una retta AC tirata dal vertice sulla base sia il punto V tale, che ciascuno degli angoli BVC, DVC sia di 60 gradi.

Io dico, che la somma delle tre rette VB; VA; ed VD è un *minimo*.

Dimostrazione. — Si concepisca il punto u infinitamente vicino ad V, e coi raggi Bu; Du si descrivano gli archetti um, ed un.

Secondo i principj dell'interiore geometria, affinchè $VB+VA+VD$ sia un *minimo*, à da essere $VB+VA+VD=uB+uA+uD$, e trasponendo, deve aversi $mV+nV-uV=0$, cioè $mV+nV=uV$.

Si salverà quest'equazione, supponendo mV eguale ad nV; e sarà $mV=nV=\frac{1}{2}uV$. Di maniera che prendendo uV pel raggio, tanto mV, quanto nV sarà il seno dell'angolo di 30 gradi. Conseguentemente ciascuno degli angoli Vum, Vun è di 30 gradi, e ciascuno degli angoli mVu, nVu di 60. Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I. — Se si concepisce un cerchio circoscritto alla piccola figura $Vmun$ rettangola in m, ed in n: e se si tira la piccola retta mn, questa sarà la corda d'un arco di 120 gradi; perchè si appoggia sopra di essa l'angolo mun, che è di 60.

Similmente ciascuna delle due piccole rette mu, ed nu è corda d'un arco di 120 gradi; perchè sopra ciascuna di esse si appoggia un angolo di 60 gradi, cioè mVu, nVu.

Ne segue pertanto, che il triangoletto mun è equilatero.

Corollario II. — Descrivasi sopra la base BD il triangolo equilatero BED; si tiri da un vertice all'altro la retta AE, che taglia in C la base

comune; e s'immagini, che il cerchio circoscritto al suddetto triangolo equilatero tagli la AC in V.

È chiaro, che ciascuno degli angoli BVC (BVE); DVC (DVE) è di 60 gradi; perchè il primo si appoggia alla corda BE, che è d'un angolo di 120 gradi, e il secondo s'appoggia alla corda DE, che parimente è d'un angolo di 120 gradi. Adunque in virtù del teorema $VB+VA+VD$ è un *minimo*.

Corollario III. — Ciascuno degli angoli BVA, DVA è di 120 gradi (come è manifestamente l'angolo BVD): mentre togliendo da 180 gradi l'angolo BVC, o l'angolo DVC, cadauno de' quali è di 60, rimangono 120 gradi.

Corollario IV. — Prolungando la BV fino al lato AD in G, e la DV fino al lato AB in F; ciascuno degli angoli AVF, BVF è di 60 gradi; come pure ciascuno degli angoli AVG, DVG è di 60 gradi.

Imperciocchè l'angolo AVF e visibilmente eguale all'angolo DVC, che è di 60 gradi; l'angolo AVG è del pari uguale all'angolo BVC, che pure è di 60: talchè gli angoli BVF, DVG rimangono anch'essi di 60 gradi.

Corollario V. — Si dà luogo ad un corollario simile a quello del teorema LX.

Attesochè in virtù de' corollarj IV, e V del teorema presente, prendendo per base il lato DA, la somma $VD+VB+VA$ (cioè $VB+VA+VD$) sarà un *minimo* rispetto alla retta BG.

E prendendo per base il lato AB, la somma $VA+VD+VB$ (cioè $VB+VA+VD$) sarà un *minimo* rispetto alla retta DF.

Teorema LXII (fig. 74). — Se nel triangolo BAD, ec. *come sopra,* il punto V preso sulla retta AC è tale, che abbiasi il *minimo* $VB+VA+VD$;

Io dico, che sussiste quest'equazione:

$$\text{(XXVIII)} \qquad VC\,(BV+VD)=BV,\,VD.$$

Dimostrazione. — Si prolunghino le rette BV; DV in maniera che taglino ne' punti H, ed L le respettive BH, e DL parallele alla retta AC.

In virtù di questo parallelismo l'angolo VBH, eguale all'angolo BVC, è di 60 gradi, e per conseguenza è tale l'angolo VHB; perchè nel corollario IV del precedente teorema si è provato, che l'angolo BVF è di 60 gradi. Laonde il triangolo BVH è equilatero.

Similmente si proverà, che il triangolo DVL è equilatero anch'esso.

In virtù del medesimo parallelismo sarà

$$DV.VC::DV+VH\ (BV).HB\ (BV)$$

come pure

$$BV.VC::BV+VL\ (VD).DL\ (DV).$$

Ciascuna di queste due analogie (eguagliando il prodotto de' medj a quello degli estremi) esibisce l'equazione (XXVIII). Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO. — La retta AE, che unisce i vertici dei due triangoli BAD, BED, non può esser normale sopra la base comune BD, fuorchè nel caso del triangolo BAD isoscele.

TEOREMA LXIII (fig. 74). — *Avvertimento.* — Si consideri adesso il triangolo BAD in generale, come ne' due precedenti teoremi; ma la retta AC s'immagini normale sopra la base BD, e si trascuri il triangolo equilatero BED.

Ciò posto, sia il punto V nella suddetta normale AC; io dico, che $VB+VA+VD$ sarà un *minimo*, se si avrà l'equazione (XXVIII).

DIMOSTRAZIONE. — Prendasi come sopra il punto u infinitamente vicino a V; e si suppongano parimente descritti i piccoli archi circolari um; un.

I triangoli rettangoli simili BVC, uVm danno quest'analogia:

$$BV.VC::Vu.mV=\frac{VC,Vu}{BV}.$$

E i triangoli rettangoli simili DVC, e uVn danno quest'altra:

$$DV.VC::Vu.nV=\frac{VC,Vu}{DV}.$$

Per cagione del *minimo* à da essere $mV+nV$, cioè

$$\frac{VC,Vu}{BV}+\frac{VC,Vu}{DV}=Vu.$$

E moltiplicando per $\frac{BV, DV}{Vu}$, ne viene l'equazione (XXVIII), come sopra venne per altra via.

Corollario I. — Chiamisi $VC(y)$; $BC(a)$; e $DC(b)$. Sarà

$$BV = \sqrt{y^2+a^2} \text{ e } DV = \sqrt{y^2+b^2}\cdot$$

Questi valori surrogati nell'equazione (XXVIII) somministrano:

$$\text{(XXIX)} \qquad y\sqrt{y^2+a^2} + y\sqrt{y^2+b^2} = \sqrt{y^2+a^2}\sqrt{y^2+b^2}.$$

Quadrando, indi cassando i termini, che vicendevolmente si distruggono, e poscia trasponendo, apparisce

$$2\,y^2\sqrt{y^2+a^2}\sqrt{y^2+b^2} = a^2b^2 - y^4.$$

Di nuovo quadrando, e poi ordinando l'equazione, proviene questa:

$$\text{(XXX)} \qquad y^8 + \frac{4}{3}(a^2+b^2)\,y^6 + 2\,a^2b^2y^4 - \frac{1}{3}\,a^4b^4 = 0.$$

Corollario II. — Quest'equazione è derivativa dal quarto grado, e la disposizione de' segni in essa fa conoscere, che à tre radici negative, ed una positiva; di modo che non può corrispondere, che ad un *minimo*.

Corollario III. — Se il triangolo BAD è isoscele, allora $DC(b)$ è uguale a $BC(a)$. Perciò ponendo a in luogo di b nell'equazione (XXX) essa degenera in quella, che segue:

$$y^8 + \frac{8}{3}a^2y^6 + 2\,a^4y^4 - \frac{1}{3}\,a^8 = 0,$$

le quattro radici della quale sono $y^2 = -a^2$; $y^2 = -a^2$; $y^2 = -a^2$; ed $y^2 = \frac{1}{3}\,a^2$, cioè $y = \frac{a}{\sqrt{3}}\cdot$

Corollario IV. — Questo valore di y si scoprirà più davvicino, se nell'equazione (XXIX) si porrà a in cambio di b; attesochè detta equazione si cangerà in quest'altra: $2\,y\sqrt{y^2+a^2} = y^2+a^2$, e dividendo per $\sqrt{y^2+a^2}$, ne risulterà $2y = \sqrt{y^2+a^2}$, indi quadrando si troverà $4\,y^2 = y^2+a^2$; cioè $3\,y^2 = a^2$, ec.

COROLLARIO V (fig. 74). — *Maniera di dimostrare il corollario III mediante il teorema LXI.* — Essendo $VC(y)$ uguale ad $\frac{a}{\sqrt{3}}$, sarà BV eguale a $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Rappresenti BC (a) il raggio, e si avrà quest'analogia:

$$BV\left[\frac{2a}{\sqrt{3}}\right].\ BC\ (a) :: BC\ (a).\frac{a\sqrt{3}}{2} = cosin.\ ang.\ CBV.$$

Laonde il quadrato del seno dell'angolo CBV, che è uguale a

$$BC^2 - (cosin.\ ang.\ BCV)^2,$$

sarà $\frac{1}{4}a^2$; vale a dire il seno dell'angolo CBV è uguale alla metà del raggio: perciò quest'angolo è di 30 gradi, e così l'angolo CDV, che gli è uguale.

Adunque tanto l'angolo BVC, quanto l'angolo DVC, è di gradi 60; e in virtù del teorema LXI $VB + VA + VD$ è un *minimo.* Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA LXIV (fig. 73). — Nel triangolo BAD la normale AQ tirata dal vertice alla base, la tagli in Q, e tagli la stessa base in C la retta AC, (che si chiami f) tirata ad arbitrio dal vertice. Si chiami c la CQ; y la VC porzione di AC; a la BC; b la DC; z la BV; e t la DV.

Io dico, che la somma delle rette VB; VA; e VD sarà un *minimo,* se valerà quest'equazione:

$$\text{(XXXI)} \qquad fy\ (t+z) + c\ (at - bz) = ftz.$$

DIMOSTRAZIONE. — Per la similitudine de' triangoli ACQ, VCP, si vede $AC\ (f).\ CQ\ (c) :: CV\ (y).\ CP = \frac{cy}{f}$.

Quindi si à

$$BV\ (z) = \sqrt{a^2 + y^2 + \frac{2acy}{f}},$$

come pure

$$DV\ (t) = \sqrt{b^2 + y^2 - \frac{2bcy}{f}}.$$

E perchè $AV = f - y$, la somma $VB + VA + VD$, si esprime analiticamente così:

$$\sqrt{a^2 + y^2 + \frac{2acy}{f}} + f - y + \sqrt{b^2 + y^2 - \frac{2bcy}{f}}.$$

In conseguenza del *minimo* va differenziata quest'equazione, ed eguagliata a zero la differenza. Perciò operando a dovere avremo:

$$\frac{fydy+acdy}{fz}-dy+\frac{fydy-bcdy}{ft}=0.$$

Laonde moltiplicando per $\frac{ftz}{dy}$, indi trasponendo troveremo l'equazione (XXXI). Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I (fig. 73, e 74). — Se AC si confonde con la normale AQ; $CQ(c)$ si annulla, e l'equazione (XXXI) divisa per f diventa $y(t+z)=tz$. E questo è il teorema LXIII precedente.

Corollario II (fig.7 3, e 74). — Se la retta AC continuata sotto BD passa pel vertice E del triangolo equilatero BED, si è dimostrato nel teorema LXI, che nel caso della *minima* somma $VB+VA+VD$, l'angolo BVC è uguale all'altro DVC; adunque in tal caso (per la prima parte della terza proporizione del VI libro d'Euclide), vale questa analogia: $BC(a)\cdot CD(b)::BV(z)\cdot VD(t)$; dimanierachè bz è uguale ad at. Ponendo nell'equazione (XXXI) at in luogo di bz, poi dividendo per f, essa equazione diviene di bel nuovo $y(t+z)=tz\cdot$ E questo è il teorema LXXII diversamente dimostrato.

Corollario III. — Poichè nel caso dell'antecedente corollario, bz è uguale ad at; surrogando in cambio di z il suo valore

$$\sqrt{a^2+y^2+\frac{2acy}{f}},$$

e in vece di t il suo valore $\sqrt{b^2+y^2-\frac{2bcy}{f}}$, indi quadrando, apparisce:

$$b^2a^2+b^2y^2+\frac{2ab^2cy}{f}=b^2a^2+a^2y^2-\frac{2a^2bcy}{f},$$

si cassi b^2a^2, e dividasi per y, si ottiene:

$$b^2y+\frac{2ab^2c}{f}=a^2y-\frac{2a^2bc}{f},$$

conseguentemente si à $(a^2 - b^2)\,y = \frac{2abc}{f}(a+b)$, e dividendo per $a+b$ l'uno, e l'altro membro, risulta: $(a-b)\,y = \frac{2abc}{f}$, vale a dire

$$y = \frac{2abc}{f(a-b)}:$$

Corollario IV. — Allorchè nel caso dei due corollarj precedenti, il triangolo BBD è di più *isoscele*, la AC si confonde con la normale AQ, la CQ (c) si annulla, e b è uguale ad a.

Perciò in quest'ultimo caso l'ultima equazione del corollario, che precede, niente fa conoscère; perchè diventa $y = \frac{2a^2}{f} \times \frac{0}{0}$, che è un'equazione indeterminata.

Corollario V. — Convien pertanto riflettere, che nel caso dei due corollarj II e III l'equazione (XXXI) à la bella prerogativa di potersi partire in due equazioni, come dal corollario III si deduce. Queste due equazioni parziali sono $c\,(at - bz) = 0$, ed $fy\,(t+z) = ftz$, cioè $bz = at$, ed $y\,(t+z) = tz$.

Adunque poichè la prima dell'ultime due equazioni parziali niente à fatto conoscere nel caso del corollario IV precedente; dovrà farsi uso della seconda equazione parziale, come si è fatto nel corollario IV dello antecedente teorema, e si troverà come ivi $y = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Teorema LXV (fig. 75). — Nel triangolo BAD la base BD sia divisa ad arbitrio in C dalla retta AC tirata dal vertice A, ed in Q dalla normale AQ calata dall'istesso vertice. Dal punto arbitrario O di questa normale si conduca la MN parallela alla base; e dal punto S della MN si cali sulla base la normale SR.

Ciò posto si chiami p la AO; q la OQ; a la BC; b la CD; c la CQ; z la BS; t la DS; u la AS, ed x la CR;

Io dico, che la somma delle tre rette SB; SA; SD sarà un *minimo* rispetto alla parallela MN, qualora sussista l'equazione, che segue:

$$\text{(XXXII)} \qquad xu\,(t+z) = u\,(at - bz) + (\pm c - x)\,tz.$$

Nel segno doppio il superiore à luogo, quando il punto R cade tra B, e Q, e l'inferiore quando lo stesso punto cade tra Q, e D.

DIMOSTRAZIONE. — BS è uguale a $\sqrt{q^2+a^2+x^2+2ax}$; DS è uguale a $\sqrt{q^2+b^2+x^2-2bx}$ ed AS è uguale a $\sqrt{p^2+c^2+xz\mp 2cx}$.

Il *minimo* esige, che sia $dif. SB+dif\ AS.+dif.\ SD=0$; adunque prendendo il valore di queste tre differenze, e debitamente operando, sarà

$$\left[\frac{xdx+adx}{z}\right]+\left[\frac{xdx-bdx}{t}\right]+\left[\frac{xdx\pm cdx}{u}\right]=0,$$

si moltiplichi per $\frac{ztu}{dx}$ indi si trasponga, e si troverà:

(XXXIII) $$x(tu+uz+tz)=u(bz-at)\pm ctz.$$

Da quest'equazione maneggiata a proposito, e trasposta, viene la equazione (XXXII). Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I. — Se la AC si confonde colla AQ, sarà a la BQ; b la DQ; zero la CQ (c); la RQ sarà $-x$, e l'equazione (XXXII) diverrà:

$$x(tu+uz+tz)=u(\pm at\mp bz).$$

In questa ipotesi i segni superiori vagliono quando il punto R cade tra B, e Q, e gl'inferiori, quando R cade tra Q, e D.

COROLLARIO II (fig. 75, 76, e 74). — Siano immaginate le rette VB, ed VD.

Quando la retta MN parallela alla base passa pel punto V tale, che la somma $VB+VA+VD$ sia un *minimo* rispetto alla AC; acciò questa medesima somma sia un *minimo* anche rispetto alla parallela MN, l'equazione (XXXI), o la sua equivalente dee uniformarsi alla (XXXII).

Dal punto V (fig. 76) si cali sulla base la normale VG, e applicando questo caso al presente teorema, l'immaginata VB sarà la z; l'immaginata VD la t; AV la u; CQ la c; CG la x; ed VO sarà $c-x$. La VC si chiami y.

Si moltiplichi per $\frac{VO}{f}$ l'equazione (XXXI) trasposta, e si avrà:

(XXXIV) $$VO,y(z+t)=\frac{c,VO}{f}(bz-at)+VO,tz.$$

Per la similitudine de' triangoli AVO, CVG vale quest'analogia

$$CG(x). VC(y)::VO. AV(u);$$

cosicchè VO, y è uguale ad xu. Adunque ponendo nel primo membro dell'equazione (XXXIV) xu in luogo di VO, y; e nel secondo termine del secondo membro di essa, $c - x$ in cambio di VO, si conseguirà

$$xu\,(z+t) = \frac{c}{f}\,VO\,(bz - at) + (c - x)\,tz,$$

cioè

$$xu\,(z+t) = \frac{CQ,\,VO}{AC}\,(bz - at) + (c - x)\,tz.$$

Affinchè quest'ultima equazione possa uniformarsi alla (XXXII) o dev'essere $\frac{CQ,\,VO}{AC} = u = AV$; il che è assurdo visibile, perchè in tal caso sarebbe $\frac{CQ}{AC} = \frac{AV}{VO} = \frac{AC}{CQ}$ (per gli triangoli simili AVO, ACQ), e si avrebbe, $CQ^2 = AC^2$.

Ovvero acciò sia possibile l'uniformità delle due sopraccennate equazioni, $bz - at$ dev'essere uguale a zero; il che effettivamente succede nel caso del teorema LXI (fig. 74), come ò provato nel corollario II del teorema precedente.

Adunque in questo medesimo caso il punto V à la prerogativa, che $VB + VA + VD$, oltre l'esser un *minimo* rispetto alla AC, lo è ancora rispetto alla MN, che passa per V, ed è parallela alla base.

Teorema LXVI (fig. 77). — Io dico di più, che $VB + VA + VD$ è un *minimo* rispetto alla superficie del triangolo BAD.

Dimostrazione. — Concepiscasi qualunque punto f sommamente prossimo a V, e si descriva colla mente il quadrilatero $flVS$ tale, che la fS sia parallela alla normale AQ, e le fl, ed SV siano parallele alla base BD. *Anche qui converrà immaginare delle rette non descritte.*

I. Essendo pel teorema LXI $VB + VA + VD$ un *minimo* rispetto alla AB, detta somma sarà eguale ad $lB + lA + lD$. E ciò pe' principj della geometria interiore.

II. Essendo pel corollario III del teorema precedente $lB + lA + lD$ un *minimo* rispetto alla parallela, che passa pel punto l, detta somma sarà eguale ad $fB + fA + fD$. E ciò pe' principj della geometria interiore.

III. Quindi la somma $VB + VA + VD$ è uguale alla somma

$$fB + fA + fD.$$

Ma il punto f è concepito fuori della retta AC, e della parallela VS prolungata. Adunque per gli più volte allegati principj dell'interiore geometria $VB + VA + VD$ è un *minimo* rispetto alla superficie del triangolo BAD: vale a dire è il *minimo de' minimi.*

Il che dovea dimostrarsi.

Il punto f si potea concepire anche sotto la VS, ed ancora a mano sinistra della retta AC.

La maniera, che ò trovata per dimostrare questo teorema, è generale, e può applicarsi ad altri simili.

Scolio. — Per più chiara intelligenza dell'articolo II di questa dimostrazione si rifletta, che siccome le rette da *immaginarsi* BV, e DV formano colla retta AC gli angoli BVC, e DVC di 60 gradi l'uno; così le rette *da immaginarsi* Bl, e Dl formano colla medesima AC gli angoli BlC, e DlC, che debbono reputarsi anch'essi di 60 gradi l'uno, a cagione della *somma prossimità* di l, e di V. Perciò competono al punto l le stesse prerogative, che al punto V, ec.

Sarà pertanto in virtù del teorema LXI $lB + lA + lD$ un *minimo* rispetto alla AC, e pel precedente teorema LXVI la medesima somma $lB + lA + lD$ sarà un *minimo* anche rispetto alla parallela lf prolungata. Adunque secondo i principj della geometria interiore la somma suddetta sarà eguale ad $fB + fA + fD$.

Teorema LXVII (fig. 73). — Nel triangolo BAD la retta AC, tirata ad arbitrio, tagli la base in C, e le denominazioni delle linee, e tutto il resto siano come nel teorema LXIV;

Io dico, che la somma de' quadrati VB^2; VA^2; VD^2 sarà un *minimo* rispetto alla AC, se valerà quest'equazione:

$$\text{(XXXV)} \qquad fy = \frac{c}{3}(b - a) + \frac{f^2}{3}.$$

Dimostrazione. — Le rette BV; ed AV ànno qui i medesimi valori, che nella dimostrazione del teorema LXIV; e perciò la somma $VB^2 + VA^2 + VD^2$ à quest'espressione

$$a^2 + b^2 + f^2 + 3y^2 + \frac{2acy}{f} - \frac{2bcy}{f} - 2fy,$$

sia questa differenziata, e poi eguagliata a zero; si troverà

$$6ydy + \frac{2acdy}{f} - \frac{2bcdy}{f} - 2fdy = 0,$$

si moltiplichi per $\frac{f}{6\,dy}$, poscia si trasponga, e si giungerà all'equazione (XXXV). Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I. — Se AC divide per metà la BD, vale a dire se la a è uguale alla b, l'equazione (XXXV) mostra $y=\frac{1}{3}f$. E questo è il teorema LX.

Corollario II. — Se la c è nulla, cioè se la AC si confonde colla normale AQ, l'equazione (XXXV) mostra di bel nuovo $y=\frac{1}{3}f=\frac{1}{3}AQ$.

Teorema LXVIII (fig. 75). — Nel triangolo BAD la retta AC, tirata ad arbitrio, tagli la base in C, e le denominazioni delle linee, e tutto il resto siano come nel teorema LXV.

Io dico, che la somma de' quadrati SB^2; SA^2; SD^2 sarà un *minimo* rispetto alla parallela MN, qualora sussista l'equazione seguente:

$$\text{(XXXVI)} \qquad x=\frac{1}{3}(b-a\pm c).$$

Dimostrazione. — Le rette BS, DS, ed AS ànno qui gl'istessi valori, che nella dimostrazione del teorema LXV, laonde la somma $SB^2+SA^2+SD^2$ si esprime così:

$$2\,q^2+p^2+a^2+b^2+c^2+3\,x^2+2\,ax-2\,bx\mp 2\,cx.$$

Differenziando quest'espressione, ed eguagliandola a zero, si conosce

$$6\,xdx+2\,adx-2\,bdx\mp 2\,cdx=0.$$

E dividendo per $6\,dx$, e trasponendo, risulta l'equazione (XXXVI). Il che dovea dimostrarsi.

Corollario (fig. 75, e 76). — Siano immaginate le rette VB, ed VD.

Quando la retta MN parallela alla base passa pel punto V tale, che la somma $VB^2+VA^2+VD^2$ sia un *minimo* rispetto alla AC; acciò questa medesima somma sia un *minimo* anche rispetto alla parallela MN, l'equazione (XXXVI), o la sua equivalente, deve uniformarsi alla (XXXV).

In quest'ipotesi AC sarà la f; CQ la c; CG la x, ed VC la y. Ma per la simiglianza de' triangoli QCA, GCV avremo

$$CQ\,(c) \cdot AC\,(f) :: CG\,(x) \cdot CV\,(y);$$

adunque $x = \frac{yc}{f}$.

Questo valore di x surrogato nell'equazione (XXXVI), la fa divenire $\frac{yc}{f} = \frac{1}{3}(b - a \pm c)$, e moltiplicando per $\frac{f^2}{c}$,

(XXXVII) $$fy = \frac{f^2}{3c}(b - a) \pm \frac{1}{3}f^2.$$

È visibile, che acciò tal'equazione possa uniformarsi alla (XXV), o dev'essere $\frac{f^2}{c} = c$, vale a dire $f^2 = c^2$ (evidente assurdità); ovvero à da essere $b - a = 0$, cioè la AC à da dividere per metà la base BD.

Allora in virtù dell'equazione (XXXVII) $y = \frac{1}{3}f$; vale a dire V è il centro di gravità del triangolo BAD; ed à la prerogativa, che $VB^2 + VA^2 + VD^2$ oltre l'esser un *minimo* rispetto alla AC, lo è ancora rispetto alla MN, che passa per V, ed è parallela alla base.

Teorema LXIX (fig. 77). — Supposto il corollario del teorema precedente; io dico, che $VB^2 + VA^2 + VD^2$ è un *minimo* rispetto alla superficie del triangolo BAD; vale a dire è il *minimo de' minimi*.

Dimostrazione. — La pruova di questo teorema è un altro esempio del metodo da me tenuto nella dimostrazione del teorema LXVI.

Serve la stessa figura 77, e vagliono i medesimi raziocinj.

Si dee però citare il teorema LX in vece del LXI; e il corollario del precedente teorema LXVIII in cambio del corollario II del teorema LXV.

S'immagineranno le medesime rette non descritte, e si sostituiranno i quadrati $VB^2, VA^2, VD^2 : lB^2, lA^2, lD^2 : fB^2, fA^2, fD^2$ in cambio delle loro respettive radici $VB, VA, VD : lB, lA, lD : fB, fA, fD$.

Il che dovea dimostrarsi.

XVI.

NUOVA MANIERA

DI VALERSI DEL TRIANGOLO RETTANGOLO PER LA RESOLUZIONE DELL'EQUAZIONI QUADRATICHE, EC.

Teorema LXX (fig. 78, e 79). — Ò dimostrato nell'esempio del corollario VI del teorema VIII, che le rette, le quali dividono per metà i tre angoli di qualunque triangolo BAC, s'incontrano tutte in un punto P.

Ora io dico, che tirando dallo stesso punto P sopra uno de' suoi lati AB, ovvero AC del triangolo BAC la normale PN, ovvero la normale PM, la base BC è uguale alla somma de' due lati meno il doppio della sunnormale AN, ovvero meno il doppio della sunnormale AM, cioè $BC = AB + AC - 2\,AN$, oppure $BC = AB + AC - 2\,AM$.

Dimostrazione. — Dal punto P si cali sulla base BC la normale PH. Essendo eguali per la supposizione gli angoli PAN, e PAM, ed anche gli angoli in N, e in M (perchè retti), i triangoli rettangoli PAN, e PAM sono simili, ed uguali, mentre àn comune la base AP, e perciò $AN = AM$, e $PN = PM$.

Si proverà nella medesima guisa, che $CM = CH$, e $PM = PH$, e quindi si vede essere $PN = PM = PH$.

Similmente si dimostra, che $BN = BH$, e $PN = PH$, e quindi nuovamente si vede $PN = PM = PH$ come sopra.

Ciò posto, BC è uguale a $BH + CH$, ma si è provato, che $BN = BH$, e che $CM = CH$; adunque $BC = BN + CM$, e perchè $BN = AB - AN$, e $CM = AC - AM$, sarà $BC = AB + AC - AN - AM$, vale a dire;

$BC = AB + AC - 2\,AN$, ovvero $BC = AB + AC - 2\,AM$, attesa l'eguaglianza testè provata di AN, e di AM. Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I (fig. 79). — Essendosi dimostrata l'eguaglianza delle normali PN, PM, e PH, ne segue, che descrivendo un cerchio, che abbia il punto P per centro, e ciascuna delle normali PN, PM, e PH per raggio, questo cerchio sarà inscritto nel triangolo dato BAC.

Corollario II (fig. 78 e 79). — Se il triangolo BAC è rettangolo A, allora gli angoli eguali PAN, e PAM sono semiretti, e ciascuna delle due sunnormali AN, ed AM è uguale al raggio PN, o sia PM, ovvero PH del cerchio iscritto nel triangolo BAC; cosicchè $2\,AN$, o sia $2\,AM$ è uguale al diametro del medesimo cerchio iscritto.

Perciò (fig. 79) in qualsivoglia triangolo rettangolo BAC la base BC è uguale alla somma $AB+AC$ de' lati meno il diametro del cerchio iscritto NMH.

Corollario III. — E conseguentemente il detto diametro è uguale ad $AB+AC-BC$.

Corollario IV (fig. 79). — Supponendo, che il triangolo BAC, sia rettangolo in A, e chiamando per ora y il diametro suddetto, a il lato AB, b la base BC, e c l'altro lato AC, si avrà in virtù del corollario II questa equazione $a+c-y=b$, la quale quadrata condurrebbe a quest'altra:

$$\begin{aligned} y^2-2\,(a+c)\,y+a^2 & = b^2 \\ +2\,ac & \\ +c^2. & \end{aligned}$$

ma $b^2=a^2+c^2$ a cagione dell'angolo retto BAC, adunque:

$$y^2-2\,(a+c)\,y+2\,ac=0.$$

Laonde il diametro del cerchio NMH iscritto nel triangolo rettangolo BAC, è una delle due radici dell'ultima equazione, e questa radice è uguale ad $a+c-b$ in vigore del III corollario.

Avvertimento. — Il diametro del cerchio NMH iscritto nel triangolo rettangolo BAC sarà designato in avvenire colla lettera d.

Corollario V. — Per trovare l'altra radice della soprascritta equazione, si consideri, che se d è una delle due radici di essa, l'altra radice è uguale a $2\,a+2\,c=d$, come è noto agl'intendenti dell'algebra; ma si è veduto, che $d=a+c-b$; adunque ponendo nella quantità $2\,a+2\,c-d$ il detto valore di d, l'altra radice sarà $a+c+b$.

Corollario VI. — Essendosi provato, che le due radici dell'equazione

(A) $$y^2-2(a+c)y+2ac=0$$

sono

(B) $$y=a+c-b,$$

ed

(C) $$y=a+c+b.$$

Se la a e la c si suppongono ambe negative, ne segue, che le due radici dell'equazione seguente (Aa):

(Aa) $$y^2+2(a+c)y+2ac=0,$$

in cui si trasforma l'equazione (A), sono $y=-a-c-b$, ed $y=-a-c+b$, adunque le radici di questa equazione:

(D) $$y^2\mp 2(a+c)y+2ac=0.$$

sono le seguenti:

(E) $$y=\pm a\pm c-b=\pm AB\pm AC-BC.$$

(F) $$y=\pm a\pm c+b=\pm AB\pm AC+BC.$$

Ovvero rappresentando sempre colla lettera d il diametro del cerchio iscritto nel triangolo rettangolo BAC (qual diametro pel III corollario è uguale ad $AB+AC-BC$) le due radici dell'equazione (D) saranno:

(G) $$y=\pm d$$

(H) $$y=\pm d\pm 2\,BC,$$

come è facile a conoscersi dagli attenti lettori.

In tutto il presente corollario VI nel segno doppio s'intende il superiore, allorchè nell'equazione (A) la a, e la c si suppongono ambedue positive, e s'intende il segno inferiore, allorchè nella stessa equazione (A) la a, e la c si suppongono ambe negative.

Avvertimento. — Che i due valori di y espressi nelle due equazioni (B), e (C) siano le due radici dell'equazione (A), si può conoscere moltiplicando tra loro le due infrascritte equazioni lineari $y-a-c+b=0$, ed $y-a-c-b=o$, mentre ne verrà un'equazione, che avrà pe' suoi termini primo e secondo il primo, e il secondo termine dell'equazione (A),

ed avrà per suo terzo termine questa quantità $a^2+2ac+c^2-b^2$, la quale in sostanza altro non è, che $2ac$ [terzo termine dell'equazione (A)] perchè $a^2+c^2-b^2=0$.

COROLLARIO VII. — L'equazione (D) può rappresentare qualsivoglia equazione quadratica, che abbia questa forma $y^2 \mp ny + p = 0$;

Purchè suppongasi $2(a+c)=n$, e $2ac=p$, cioè:

$$a+c=\frac{1}{2}n \tag{I}$$

$$ac=\frac{1}{2}p. \tag{K}$$

Si quadri ora l'equazione (I), e si avrà $a^2+2ac+c^2=\frac{1}{4}n^2$, da cui sottrando l'equazione (K) moltiplicata per 4, ne risulta

$$a^2-2ac+c^2=\frac{1}{4}n^2-2p,$$

ed estraendo dall'uno, e l'altro membro la radice quadrata, si conseguisce:

$$a-c=\sqrt{\frac{1}{4}n^2-2p}. \tag{L}$$

Aggiungendo ad esso le due equazioni (I), ed (L), e poscia dividendo per 2, si deduce:

$$a=\frac{1}{4}n+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}n^2-2p}=\frac{1}{4}(n+\sqrt{n^2-8p}).$$

Indi sottraendo l'equazione (L) dall'equazione (I), e poscia dividendo per 2, si trova

$$c=\frac{1}{4}n-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}n^2-2p}=\frac{1}{4}(n-\sqrt{n^2-8p}).$$

COROLLARIO VIII (fig. 78, e 79). — Pertanto, se si forma un triangolo BAC rettangolo in A, il di cui lato maggiore, o almeno non minore $AB(a)$ sia eguale ad $\frac{1}{4}n+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}n^2-2p}$, e il lato $AC(c)$ sia eguale ad $\frac{1}{4}n-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}n^2-2p}$, ambe le radici dell'equazione $y^2 \mp ny + p = 0$ saranno le espresse nelle due equazioni (E), ed (F), ovvero nelle due (G), ed (H).

Corollario IX (fig. 78, e 79). — Nell'equazione (A) suppongasi negativa la c sola, ovvero la a sola, e si vedrà che le due radici della equazione (M) (nella quale in tali supposizioni si trasforma l'equazione (A)) sono nelle infrascritte equazioni (N), ed (O):

$$(M) \qquad y^2 \mp 2(a-c)\,y - 2ac = 0,$$

$$(N) \qquad y = \pm(a-c) - b = \pm(AB - AC) - BC,$$

$$(O) \qquad y = \pm(a-c) + b = \pm(AB - AC) + BC.$$

Ovvero continuando ad esprimere colla lettera d il diametro del cerchio inscritto nel triangolo rettangolo BAC (qual diametro è uguale ad $a+c-b$), le radici dell'equazione (M) sono le espresse nelle seguenti equazioni (P), e (Q):

$$(P) \qquad y = \pm d \mp 2AC,$$

$$(Q) \qquad y = \pm d \pm 2AC,$$

come si comprende agevolmente da chi v'impiega la dovuta attenzione.

In tutto questo corollario IX nel segno doppio à luogo il superiore, quando nell'equazione (A) si suppone negativa la c sola, e à luogo il segno inferiore, quando nell'equazione (A) la sola a si suppone negativa.

Corollario X. — L'equazione (M) può rappresentare qualsisia equazione quadratica, che abbia questa forma $y^2 \mp ny - p = 0$, qualora si supponga $2(a-c) = n$, e $2ac = p$, vale a dire:

$$(R) \qquad a - c = \frac{1}{2}n \cdot$$

$$(S) \qquad ac = \frac{1}{2}p \cdot$$

Ora l'equazione (R) quadrata dà $a^2 - 2ac + c^2 = \frac{1}{4}n^2$, cui aggiungendo l'equazione (S) moltiplicata per 4, si ottiene

$$a^2 + 2ac + c^2 = \frac{1}{4}n^2 + 2p,$$

ed estraendo da ambe le parti la radice quadrata, si à:

$$(T) \qquad a + c = \sqrt{\frac{1}{4}n^2 + 2p} \cdot$$

Si aggiungano ambedue l'equazioni (R), e (T), indi si divida per 2, e si conoscerà:

$$a=\frac{1}{4}n+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}n^2+2p}=\frac{1}{4}(n\sqrt{n^2+8p}).$$

Sottraggasi l'equazione (R) dall'equazione (T), indi si divida per 2, e si troverà:

$$c=-\frac{1}{4}n+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}n^2+2p}=\frac{1}{4}(-n+\sqrt{n^2+8p}).$$

Corollario XI (fig. 78, e 79). — Laonde se si descrive un triangolo BAC rettangolo in A, il di cui lato maggiore, o almeno non minore $AB\,(a)$ sia eguale ad $\frac{1}{4}n+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}n^2+2p}$, e l'altro lato $AC\,(c)$ sia eguale a $-\frac{1}{4}n+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}n^2+2p}$; le due radici dell'equazione $y^2\mp ny-p=0$, saranno le registrate nelle due equazioni (N), ed (O), ovvero nelle due (P), e (Q).

Corollario XII (fig. 78). — Allorchè nell'equazione $y^2\mp ny+p=0$ la p è maggiore di $\frac{1}{8}n^2$ il VII corollario mostra:

Primo, che il triangolo rettangolo BAC è immaginario, essendo in tal caso immaginarj i due lati $AB\,(a)$, ed $AC\,(c)$ di esso triangolo; poichè nel valore di ciascuno di questi due lati entra la quantità $\sqrt{\frac{1}{4}n^2-2p}$.

Secondo, che nientedimeno la somma de' medesimi lati immaginarj del triangolo BAC è reale; mentre tal somma è sempre eguale a $\frac{1}{2}n$.

Terzo, che non ostante la detta supposizione di p maggiore di $\frac{1}{8}n^2$, la base BC del triangolo immaginario BAC è talora reale, perchè in virtù del sopraccitato corollario VII

$$AB^2\,(a^2)=\frac{1}{8}n^2-\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}n\sqrt{\frac{1}{4}n^2-2p},$$

ed

$$AC^2\,(c^2)=\frac{1}{8}n^2-\frac{1}{2}p-\frac{1}{4}n\sqrt{\frac{1}{4}n^2-2p}.$$

E quindi $AB^2\,(a^2)+AC^2\,(c^2)=\frac{1}{4}n^2-p$, cioè $BC\,(b)=\sqrt{\frac{1}{4}n^2-p}$.

Adunque la base BC sarà sempre reale, qualunque volta la p non sia maggiore di $\frac{1}{4}n^2$, ancorchè la stessa p fosse maggiore di $\frac{1}{8}n^2$.

Corollario XIII. — Riflettendo al corollario antecedente, chiaro apparisce, che l'equazioni mie (E), ed (F) comprendono in se stesse le respettive formole:

$$y = \pm \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}n^2 - p},$$

$$y = \pm \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}n^2 - p},$$

che sono le formole comuni per la resoluzione dell'equazione $y^2 \mp ny + p = 0$, rappresentata dall'equazione (D).

Corollario XIV. — Siccome in vigore del corollario X

$$AB(a) - AC(c) = \frac{1}{2}n; \; AB^2(a^2) = \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{2}p - \frac{1}{4}n\sqrt{\frac{1}{4}n^2 + 2p};$$

ed

$$AC^2(c^2) = \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{2}p - \frac{1}{4}n\sqrt{\frac{1}{4}n^2 + 2p},$$

donde risulta $AB^2(a^2) + AC^2(c^2) = \frac{1}{4}n^2 + p$, vale a dire

$$BC(b) = \sqrt{\frac{1}{4}n^2 + p};$$

così con evidente illazione se ne deduce, che l'equazioni mie (N), ed (O) contengono in se medesime le due formole respettive:

$$y = \mp \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}n^2 + p},$$

$$y = \mp \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}n^2 + p},$$

che sono le formole comuni per la resoluzione dell'equazione $y^2 \pm ny - p = 0$, rappresentata dall'equazione (M).

Corollario XV (fig, 78). — Allorchè si à da risolvere l'equazione $y^2 \mp ny + p = 0$, il corollario VII manifesta, che il lato maggiore, o almeno

non minore $AB(a)$ del triangolo rettangolo BAC è uguale alla radice maggiore, o almeno non minore dell'equazione $z^2 \mp \frac{1}{2} nz + \frac{1}{2} p = 0$, e che l'altro lato $AC(c)$ è uguale all'altra radice della stessa ultima equazione: mentre essa equazione si ottiene, ponendo z in vece di a, ovvero di c ne' valori di AB, ovvero di AC trovati nel corollario VII, e poi trasponendo, e operando a dovere.

Corollario XVI (fig. 78). — E quando si ha da risolvere l'equazione $y^2 \mp ny - p = 0$, il corollario X fa vedere, che il lato maggiore, o almeno non minore $AB(a)$ del triangolo rettangolo BAC è uguale alla radice positiva dell'equazione $x^2 - \frac{1}{2} nx - \frac{1}{2} p = 0$, perchè essa equazione risulta, sostituendo x in vece di a nel valore di AB esposto nello stesso corollario X, e poscia debitamente operando.

Mostra del pari il corollario X, che l'altro lato $AC(c)$ del triangolo BAC è uguale alla radice positiva dell'equazione $u^2 + \frac{1}{2} nu - \frac{1}{2} p = 0$; poichè essa equazione si conseguisce, surrogando u in vece di c nella espressione di AC trovata nel detto corollario X, indi facendo le dovute operazioni.

Intanto si può riflettere, che $-c$ è la radice negativa dell'equazione $x^2 - \frac{1}{2} nx - \frac{1}{2} p = 0$, e che $-a$ è la radice negativa dell' equazione $u^2 + \frac{1}{2} nu - \frac{1}{2} p = 0$, come è facile a riconoscere, e come esser deve in virtù di quel canone dell'algebra, il quale insegna, che mutando i segni de' termini pari di una equazione, le radici positive di essa divengono radici negative della nuova equazione, e le negative della prima diventano radici positive dell' altra.

Corollario XVII. — Siano le due equazioni infrascritte:

$$y^2 - ny + p = 0$$

$$z^2 - \frac{1}{2} nz + \frac{1}{2} p = 0,$$

e le due radici della seconda siano $+a$, e $+c$; io dico, che le due radici della prima sono espresse in questa terza equazione:

$$y = a + c \mp \sqrt{a^2 + c^2};$$

e ciò pe' corollarj IV, V, e XV.

Corollario XVIII. — Siano le due equazioni infrascritte:

$$y^2+ny+p=0$$

$$z^2+\frac{1}{2}nz+\frac{1}{2}p=0,$$

e le due radici della seconda siano $-a$, e $-c$; io dico, che le due radici della prima sono espresse in questa terza equazione:

$$y=-a-c\mp\sqrt{a^2+c^2},$$

E ciò pe' corollarj VI, e XV.

Corollario XIX. — Siano le due equazioni infrascritte:

$$y^2-ny-p=0$$

$$x^2-\frac{1}{2}nx-\frac{1}{2}p=0.$$

La radice positiva della seconda sia $+a$, e la radice negativa pur della seconda equazione sia $-c$; io dico, che le due radici della prima sono espresse in questa terza equazione:

$$y=a-c\mp\sqrt{a^2+c^2}.$$

E ciò pe' corollarj IX, e XVI.

Corollario XX. — Siano le due equazioni infrascritte:

$$y^2+ny-p=0$$

$$u^2+\frac{1}{2}nu-\frac{1}{2}p=0.$$

La radice positiva della seconda sia $+c$, e la radice negativa pur della seconda equazione sia $-a$; io dico, che le due radici della prima sono espresse in questa terza equazione: $y=c-a\mp\sqrt{a^2+c^2}$.
E ciò pe' corollarj IX, e XVI.

Avvertimento. — Per piena intelligenza dei quattro corollarj, che seguono, rifletteranno gli eruditi lettori, che le quattro infrascritte equazioni del secondo grado (A), (Aa), (Y), ed (&) possono tutte costruirsi in più guise, e tali, che nel valore delle radici di dette equazioni non apparisca la base BC (b) del triangolo rettangolo BAC, nè la $\sqrt{a^2+c^2}$, che ad essa equivale, e nemmeno vi apparisca il diametro del cerchio NMH iscritto nel triangolo rettangolo BAC.

Nel libro nono delle sezioni coniche del marchese de l'Ospital, e nel trattato della costruzione dell'equazioni di Ozanam, annesso al di lui trattato delle sezioni coniche, possono vedersi costrutte l'equazioni del secondo grado in diversi modi, facendo uso de' quali non avrebbero luogo nelle costruzioni delle quattro equazioni accennate (A), (Aa), (Y), ed (&) nè la b, nè la $\sqrt{a^2+c^2}$ equivalente alla stessa b, e molto meno il diametro del cerchio NMH iscritto nel triangolo rettangolo BAC, perchè io son l'unico, che siasi valuto di tal diametro nella risoluzione delle equazioni quadratiche.

Corollario XXI (fig. 78). — Si denoti come sopra colla lettera a il lato maggiore, o almeno non minore del triangolo BAC rettangolo in A, colla lettera c l'altro suo lato, e colla lettera b la sua base BC.

Siano in oltre le due seguenti equazioni:

$$u^2 - (a+c)\,u + ac = 0 \tag{V}$$

$$y^2 - 2\,(a+c)\,y + 2ac = 0. \tag{A}$$

Io dico in primo luogo, che la base BC (b) del suddetto triangolo BAC è uguale alle due radici dell'equazione (V) meno la radice minore dell'equazione (A).

Perchè le due radici dell'equazione (V) sono $+a$, e $+c$, e pel corollario IV la radice minore dell'equazione (A) è $a+c-b$.

Io dico in secondo luogo, che la stessa base BC è uguale alla radice maggiore dell'equazione (A) meno le due radici della stessa equazione (V).

Perchè pel coroll. V la radice maggiore dell'equazione (A) è $a+c+b$.

Corollario XXII. — Sieno le due infrascritte equazioni:

$$w^2 + (a+c)\,w + ac = 0, \tag{W}$$

$$y^2 + 2\,(a+c)\,y + 2ac = 0. \tag{Aa}$$

Io dico in primo luogo, che la base BC (b) del triangolo rettangolo BAC è uguale alle due radici (ambe negative) dell'equazione (W) meno la radice maggiore (anch'essa negativa) dell'equazione (Aa).

Perchè le due radici negative dell'equazione (W) sono $-a$, e $-c$, e pel corollario VI la maggiore delle due radici negative dell'equazione (Aa) è $-a-c-b$.

Io dico in secondo luogo, che la stessa base BC è uguale alla minore delle due radici negative dell'equazione (Aa) meno le due radici (ambe negative) dell'equazione (W).

Perchè pel corollario VI la minore delle due radici negative della equazione (Aa) è $-a-c+b$.

Corollario XXIII. — Siano le due equazioni:

(X) $$x^2+(c-a)x-ac=0$$

(Y) $$y^2+2(c-a)y-2ac=0.$$

Io dico in primo luogo, che la base BC (b) del triangolo rettangolo BAC è uguale alla radice positiva dell'equazione (Y) meno l'aggregato delle due radici (positiva, e negativa) dell'equazione (X).

Perchè le due radici dell'equazione (X) sono $+a$, e $-c$, e pel corollario IX, la radice positiva dell'equazione (Y) è $a-c-b$.

Io dico in secondo luogo, che la stessa base BC è uguale all'aggregato delle due radici dell'equazione (X) meno la radice negativa della equazione (Y).

Perchè pel coroll. IX la radice negativa dell'equazione (Y) è $a-c-b$.

Corollario XXIV. — Siano in fine le due equazioni:

(Z) $$z^2+(a-c)z-ac=0$$

(&) $$y^2+2(a-c)y-2ac=0.$$

Io dico in primo luogo, che la base BC (b) del triangolo rettangolo BAC è uguale alla radice positiva dell'equazione (&) meno l'aggregato delle due radici (positiva, e negativa) dell'equazione (Z).

Perchè le due radici dell'equazione (Z) sono $+c$, e $-a$, e pel corollario IX la radice positiva dell'equazione (&) è $c-a+b$.

Io dico in secondo luogo, che la stessa base BC è uguale all'aggregato delle due radici dell'equazione (Z) meno la radice negativa della equazione (&).

Perchè pel coroll. IX la radice negativa dell'equazione (&) è $c-a-b$.

Corollario XXV. Teorema (fig. 78). — Si consideri ora la fig. 78, che rappresenta qualunque triangolo rettilineo, e si continui a chia-

mare a il lato AB, b la base BC, e c l'altro lato AC. Si chiami in oltre t l'una, e l'altra delle rette eguali AN, ed AM, che toccano il cerchio iscritto nel triangolo della fig. 79; r il raggio dello stesso cerchio; d il suo diametro, e p il perpendicolo, che s'immagini calato dalla cima A sulla base BC. Io dico, che l'area del triangolo BAC è uguale a $br+tr$, e quindi: $d\,(b+t)=bp$.

Dimostrazione. — L'area del triangolo BAC è uguale a

$$\frac{1}{2}BC,\ PH+\frac{1}{2}AB, PN+\frac{1}{2}AC, PM;$$

adunque essendo le rette PH, PN, PM raggi del cerchio iscritto,

$$\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}bp,$$

e per conseguente $\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}cr-\frac{1}{2}\times 2tr+tr=\frac{1}{2}bp$. Ma in virtù del presente LXX teorema, $a+c-2t=b$, adunque la penultima equazione si cangia in questa: $\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}br+tr=\frac{1}{2}bp$, ovvero sostituendo $\frac{1}{2}d$ in vece di r, e moltiplicando per due $d\,(b+t)=bp$. Il che dovea dimostrarsi.

Corollario XXVI (fig. 78). — Se il triangolo BAC è rettangolo in A, allora à luogo quest'equazione: $b=\frac{ac}{d}-\frac{1}{2}d$.

Imperocchè in tal caso t è uguale a $\frac{1}{2}d$, e bp ad ac, cosicchè l'equazione $d\,(b+t)=bp$ dimostrata nel precedente corollario, diventa

$$d\,(b+\frac{1}{2}d)=ac,$$

e dividendo per d, poi trasponendo, ne deriva $b=\frac{ac}{d}-\frac{1}{2}d$.

Corollario XXVII (fig. 78). — Nel triangolo rettangolo BAC sussiste quest'equazione: $b=\frac{2ac}{d}-a-c$.

Imperocchè nella dimostrazione del corollario XXV si è veduto

$$\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}bp;$$

adunque $\frac{1}{4}bd+\frac{1}{4}ad+\frac{1}{4}cd=\frac{1}{2}ac$. Si divida per $\frac{1}{4}d$, e poi si trasponga; ne risulterà $b=\frac{2ac}{d}-a-c$.

Corollario XXVIII (fig. 78). — In qualunque triangolo rettilineo BAC vale quest'equazione: $d=\frac{2bp}{a+c+b}$.

Imperocchè essendosi notato nelle dimostrazioni de' corollarj XXV, e XXVII, che $\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}bp$, donde dividendo per $\frac{1}{2}(b+a+c)$, proviene $r=\frac{bp}{a+c+b}$; egli è visibile, che $d=\frac{2bp}{a+c+b}$.

Corollario XXIX. Teorema. — Nel triangolo BAC della fig. 78, allorchè rappresenta qualsivoglia triangolo à luogo quest'equazione

$$b=\frac{ld}{p-d}.$$

Dimostrazione. — Il corollario XXV somministra l'equazione $d(b+t)=bp$, la quale trasposta, esibisce $td=bp-bd$, talchè dividendo per $p-d$, si à: $b=\frac{td}{p-d}$. Il che dovea dimostrarsi.

Corollario XXX (fig. 78). — Adunque nel triangolo BAC, la sostituzione di $\frac{1}{2}$ in cambio di t mostra $b=\frac{d^2}{2(p-d)}$: bellissima espressione del valor della base.

Corollario XXXI (fig. 78). — Nello stesso caso del triangolo BAC rettangolo in A pongasi ac in vece di bp, e $\frac{1}{2}d$ in luogo di t nel-

l'equazione $d\ (b+t)=bp$ del corollario XXV, e allora si avrà

$$d\,(b+\frac{1}{2}d)=ac;$$

ovvero surrogando in vece di b il suo valore $a+c-d$ tratto dal II corollario, $d\,(a+c-\frac{1}{2}d)=ac$: equazione che moltiplicata per 2, e ordinata, rende quest'altra:

(AA) $$d^2-2\,(a+c)\,d+2\,ac=0.$$

dove ponendo y in cambio di d, ritorna l'equazione $y^2-2\,(a+c)y+2\,ac=0$, ch'erasi dedotta nel corollario IV; ma ivi mediante il teorema Pittagorico, l'influsso del quale non à verun luogo nel corollario presente, e per conseguenza nell'equazione (AA).

Corollario XXXII. — Di qui nasce una maniera analitica di trovare il rapporto, che ànno tra loro la base, e i lati del triangolo rettangolo, vale a dire la stessa proposizione Pittagorica.

Attesochè il corollario II à mostrato, che nel triangolo rettangolo $a+c-d=b$. Si quadri dunque, e si conseguirà

$$\begin{aligned} d^2-2\,(a+c)\,d+\ a^2&=b^2\\ +2\,ac&\\ +\ c^2&, \end{aligned}$$

cioè trasponendo:

(BB) $$\begin{aligned} d^2-2\,(a+c)\,d+2\,ac&=0\\ +\,a^2&\\ +\,c^2&\\ -\,b^2&. \end{aligned}$$

Da quest'ultima equazione sottraggasi l'equazione (AA) del corollario antecedente; rimarrà $a^2+c^2-b^2=0$, e perciò $b^2=a^2+c^2$. Il che dovea ritrovarsi.

Corollario XXXIII. *Problema.* — Trovare analiticamente per altra via la relazione, che à la base del triangolo rettangolo ai lati di esso.

Soluzione. — Pel corollario XXX $b=\frac{d^2}{2(p-d)}$, dalla equazione ordinata a dovere, viene l'infrascritta:

(CC) $$d^2+2bd-2bp=0,$$

che resoluta esibisce:

$$d=-b+\sqrt{b^2+2bp}.$$

Ma in virtù del III corollario: $d=a+c-b$; adunque paragonando i due valori di d, si conosce $\sqrt{b^2+2bp}=a+c$; cioè quadrando:

$$b^2+2bp=a^2+2ac+c^2.$$

Togliendo poscia da una parte $2bp$, e dall'altra $2ac$ (quantità eguali tra loro), rimane $b^2=a^2+c^2$. Il che doveva ritrovarsi.

Corollario XXXIV. — Terzo modo analitico di sciogliere questo problema, cioè di trovare il teorema di Pittagora.

L'equazione (CC) trovata nel precedente corollario, e l'equazione (BB) esposta nel corollario XXXII si aggiungono insieme per aver quest'altra:

(DD) $$\begin{aligned} 2d^2-2(a+c-b)\,d-2bp&=0\\ +2ac&\\ +a^2&\\ +c^2&\\ -b^2&. \end{aligned}$$

Ora pel III corollario $d=a+c-b$; adunque:

$$2d^2-2(a+c-b)\,d=2d^2-2d^2.$$

Cosicchè nell'equazione (DD) svaniscono i due primi termini. Nel terzo termine poi di essa è chiaro, che $-2bp+2ac=0$, e quindi tutta l'equazione (DD) riducesi a questa $a^2+c^2-b^2=0$; cioè $b^2=a^2+c^2$ che dovea ritrovarsi.

Corollario XXXV. — Quarto modo di trovare analiticamente la proposizione Pittagorica.

Ò dimostrato nel corollario XXVIII, che in qualsivoglia triangolo rettilineo, $d=\frac{2bp}{a+c+b}$; di modo che nel triangolo rettangolo vale questa

equazione $d=\frac{2\,ac}{a+c+b}$. Ma pel corollario III, che al triangolo rettangolo à relazione, $d=a+c-b$; adunque $\frac{2\,ac}{a+c+b}=a+c-b$. Si moltiplichi per $a+c+b$, e si vedrà essere $2\,ac=a^2+2\,ac+c^2-b^2$. Dopo aver cassato $2\,ac$ di qua, e di là, si trasponga, e si conseguirà $b^2=a^2+c^2$. Il che dovea ritrovarsi.

Corollario XXXVI. — Quinto modo di trovare il teorema di Pittagora.

Pel corollario XXVIII $d=\frac{2\,bp}{a+c+b}$, e riducendo a proporzione, $2\,p\,.\,a+c+b::d\,.\,b$. Componendo, $2\,p+a+c+b\,.\,a+c+b::d+b\,.\,b$. Permutando $2\,p+a+c+b\,.\,d+b::a+c+b\,.\,b$. Dividendo,

$$2\,p+a+c-d\,.\,d+b::a+c\,.\,b.$$

Surrogando (in virtù del II corollario) nel primo termine dell'ultima proporzione in luogo di $a+c-d$ il suo valore b, e di $d+b$ il suo valore $a+c$, la proporzione medesima diviene $2\,p+b\,.\,a+c::a+c\,.\,b$. Prendendo il prodotto degli estremi e de' medj $2\,bp+b^2=a^2+2\,ac+c^2$. Ma $2\,bp=2\,ac$; adunque $b^2=a^2+c^2$. Il che dovea ritrovarsi.

Corollario XXXVII. Teorema (fig. 78). — Rimanendo sempre le denominazioni, come sopra; io dico, che nel triangolo rettangolo à luogo questa proporzionalità:

(EE) $$(a^2\pm ab):(c^2\pm cb)=(a-c\pm b):(c-a\pm b).$$

Dimostrazione. — Nel dedurre il corollario XXXV ò rimarcato, che nel triangolo rettangolo si à $a+c-b=\frac{2\,ac}{a+c+b}$; e conseguentemente $a+c+b=\frac{2\,ac}{a+c-b}$; e per raccogliere queste due espressioni in una

$$a+c\pm b=\frac{2\,ac}{a+c\mp b}.$$

Laonde si ànno queste due proporzionalità

$$(a+c\pm b):c=2\,a:(a+c\mp b),\ \text{ed}\ (a+c\pm b):a=2\,c:(a+c\mp b);$$

e valendosi di questo modo di argomentare, che si chiama *dividendo*,

dalla prima di esse nasce $(a \pm b) : c = (a - c \pm b) : (a + c \mp b)$, e dalla seconda, $(c \pm b) : a = (c - a \pm b) : (a + c \mp b)$. Considerando adesso queste due proporzionalità, come equazioni, dividasi la penultima per l'ultima; e sorgerà l'equazione, o sia proporzionalità (EE). Il che dovea dimostrarsi.

Corollario XXXVIII. — Da questa nuova, e bella proprietà del triangolo rettangolo vien l'infrascritta nuova anch'essa, e leggiadra, ed è, che nel triangolo rettangolo sussiste quest'equazione:

$$\text{(FF)} \qquad a^3 - a^2c - ab^2 = c^3 - c^2a - cb^2.$$

Il prodotto degli estremi, e il prodotto de' medj della proporzionalità (EE), e le debite maniere di operare, mostreranno la verità del presente corollario.

Corollario XXXIX. Teorema. — Nel triangolo rettangolo ànno luogo queste due equazioni:

$$\text{(GG)} \qquad b^2 + ac = \frac{a^3 - c^3}{a - c};$$

$$\text{(HH)} \qquad b^2 - ac = \frac{a^3 + c^3}{a + c}.$$

Dimostrazione. — L'equazione (FF) maneggiata a dovere, produce l'equazione (GG).

Da ciascun membro della quale sottraendo $2\,ac$, si ottiene

$$b^2 - ac = \frac{a^3 - c^3}{a - c} - 2\,ac \cdot$$

E il secondo membro di quest'ultima equazione equivale al secondo membro dell'equazione (HH); perchè sì l'uno, come l'altro disviluppato dalla frazione, apparisce eguale ad $a^2 - ac + c^2$. Adunque sussiste anche l'equazione (HH). Il che dovea dimostrarsi.

Corollario XL. Teorema. — Sussistono le due infrascritte equazioni:

$$\text{(II)} \qquad b^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{a^3 - c^3}{a - c}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{a^3 + c^3}{a + c}\right]$$

$$\text{(KK)} \qquad ac = \frac{1}{2}\left[\frac{a^3 - c^3}{a - c}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{a^3 + c^3}{a + c}\right]$$

la prima delle quali à luogo nel triangolo rettangolo; e la seconda non è alligata ad esso, ma generale.

DIMOSTRAZIONE. — Si aggiungano le due equazioni (GG), ed (HH), indi si divida per 2, e sorgerà l'equazione (II).

Si sottragga l''equazione (HH) dall'equazione (GG), indi si divida per 2, e sortirà l'equazione (KK). Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO XLI. TEOREMA. — Nel triangolo rettangolo vagliono le tre equazioni seguenti:

$$\text{(LL)} \qquad b^4+a^2c^2=\frac{1}{2}\left[\frac{a^3-c^3}{a-c}\right]^2+\frac{1}{2}\left[\frac{a^3+c^3}{a+c}\right]^2$$

$$\text{(MM)} \qquad b^4-a^2c^2=\left[\frac{a^3-c^3}{a-c}\right]\left[\frac{a^3+c^3}{a+c}\right]$$

$$\text{(NN)} \qquad b^8-a^4c^4=\frac{1}{2}\left[\frac{a^3+c^3}{a+c}\right]\left[\frac{a^3-c^3}{a-c}\right]^3+\frac{1}{2}\left[\frac{a^3-c^3}{a-c}\right]\left[\frac{a^3+c^3}{a+c}\right]^3.$$

DIMOSTRAZIONE. — L'equazioni (II), e (KK) debitamente maneggiate, conducono all'equazioni (LL), ed (MM); la seconda delle quali viene ancora dalla moltiplicazione dell'equazione (GG) per la (HH).

Moltiplicando poi l'equazione (LL) per la (MM), si scopre l'equazione (NN). Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO XLII. TEOREMA. — Nel triangolo rettangolo sussiste quest'equazione:

$$\text{(OO)} \qquad b^2=\frac{1}{4ac}\left[\frac{a^3-c^3}{a-c}\right]^2-\frac{1}{4ac}\left[\frac{a^3+c^3}{a+c}\right]^2.$$

DIMOSTRAZIONE. — Si quadri l'equazione (GG), ne verrà:

$$(b^2+ac)^2=\left[\frac{a^3-c^3}{a-c}\right]^2.$$

Si quadri l'equazione (HH), ne verrà:

$$(b^2-ac)^2=\left[\frac{a^3+c^3}{a+c}\right]^2.$$

Si sottragga la seconda di quest'ultime due equazioni dalla prima, e fatte le dovute operazioni, se ne troverà un'altra, che divisa per $4ac$, darà l'equazione (OO). Il che dovea dimostrarsi.

Corollario XLIII). Teorema. — Nel triangolo rettangolo ànno luogo le due equazioni seguenti:

(PP) $$b^6+a^2c^2b^2=\frac{1}{8ac}\left[\frac{a^3-c^3}{a-c}\right]^4-\frac{1}{8ac}\left[\frac{a^3+c^3}{a+c}\right]^4$$

(QQ) $$b^6-a^2c^2b^2=\frac{1}{2}\left[\frac{a^3+c^3}{a+c}\right]\left[\frac{a^3-c^3}{a-c}\right]^2+\frac{1}{2}\left[\frac{a^3-c^3}{a-c}\right]\left[\frac{a^3+c^3}{a+c}\right]^2.$$

Dimostrazione. — Dall'equazione (LL) moltiplicata per la (OO), viene l'equazione (PP).

E dall'equazione (MM) moltiplicata per la (II), viene l'equazione (QQ). Il che dovea dimostrarsi.

Corollario XLIV. — Calcolando con destrezza si disvilupperanno dalle frazioni i secondi membri delle due equazioni (PP), e (QQ); talchè dalla prima di esse si vedrà nascere:

(RR) $$b^6+a^2c^2b^2=a^6+4a^4c^2+4a^2c^4+c^6,$$

e dalla seconda:

(SS) $$b^6-a^2c^2b^2=a^6+2a^4c^2+2a^2c^4+c^6.$$

Corollario XLV. Teorema. — Nel triangolo rettangolo vagliono queste due equazioni:

(TT) $$b^6-6a^2c^2(a^2+c^2-\frac{1}{2}b^2)=a^6+c^6,$$

(VV) $$b^6-3a^2c^2b^2=a^6+c^6.$$

Annotazione. — Pregio della maniera, onde ò trovate queste, ed altre equazioni eleganti de' sopra esposti corollarj, è di averle dedotte senza supporre il teorema di Pittagora, che anzi deriva da ciascuna di esse; come potrà sperimentarsi da chi vorrà disviluppar le frazioni, che entrano nell'equazioni suddette.

Dimostrazione del Teorema. — Dall'equazione (RR) moltiplicata per 2, proviene: $2b^6+2a^2c^2b^2=2a^6+8a^4c^2+8a^2c^4+2c^6$, e da questa sottraendo l'equazione (SS), risulta l'altra: $b^6+3a^2c^2b^2=a^6+6a^4c^2+6a^2c^4+c^6$, che debitamente trattata, produce l'equazione (TT); ed è la prima parte.

Dall'equazione (SS) moltiplicata per 2, deriva:

$$2b^6-2a^2c^2b^2=2a^6+4a^4c^2+4a^2c^4+2c^6,$$

e da questa sottraendo l'equazione (OO), nasce l'equazione (VV); che è la seconda parte. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO XLVI. — I. L'equazione (TT) sottratta dall'equazione (VV), fa conoscere:

$$6a^2c^2(a^2+c^2-\frac{1}{2}b^2)-3a^2c^2b^2=0.$$

Dividendo per $6a^2c^2$, si vede $a^2+c^2-\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}b^2=0$, e conseguentemente $b^2=a^2+c^2$.

II. Come pure, se l'equazione (SS) si aggiunge all'equazione (RR), e la somma si divide per 2, si à: $b^6=a^6+3a^4c^2+3a^2c^4+c^6$, cioè

$$b^2=a^2+c^2.$$

III. E se l'equazione (SS) si sottrae dall'equazione (RR), e la differenza si divide per $2a^2c^2$, si ottiene parimente $b^2=a^2+c^2$.

IV. L'equazioni (RR), ed (SS) equivagliono alle due rispettive, che seguono:

$$b^6+a^2c^2b^2=(a^2+c^2)^3+a^2c^2(a^2+c^2)$$

$$b^6-a^2c^2b^2=(a^2+c^2)^3-a^2c^2(a^2+c^2)$$

ciascuna delle quali mostra, che b^2 è uguale ad a^2+c^2; perchè questo valore di b^2 introdotto ne' primi membri di esse, le cangia entrambe in identiche.

COROLLARIO XLVII. — Dividendo per f (che rappresenti l'unità arbitraria) tanto b^2 quadrato della base del triangolo rettangolo, quanto a^2, e c^2 quadrati de' due lati; e poi trasponendo in due modi l'equazione (VV), ne vengono quest'altre due:

$$\text{(WW)}\qquad \frac{b^6}{f^3}-\frac{3a^2c^2b^2}{f^3}-\frac{1}{f^3}(a^6+c^6)=0,$$

$$\text{(XX)}\qquad \frac{a^6}{f^3}+\frac{3b^2c^2a^2}{f^3}+\frac{1}{f^3}(c^6-b^6)=0,$$

la prima delle quali (WW), (supponendo incognita la $\frac{b^2}{f}$, e indeterminate la $\frac{a^2}{f}$, e la $\frac{c^2}{f}$), può rappresentare quell'equazioni cubiche prive del secondo termine, che ànno negativo il terzo, e il quarto termine.

Ma la seconda (XX), (supponendo incognita la $\frac{a^2}{f}$, e indeterminate la $\frac{b^2}{f}$, e la $\frac{c^2}{f}$), può rappresentare quell'equazioni cubiche prive del secondo termine, che ànno positivo il terzo, e negativo il quarto.

Annotazione. — È cosa nota a chi è versato nell'algebra, che mutando i segni delle tre radici dell'equazione (WW), esse divengono radici dell'equazione cubica, che à questa forma:

$$\text{(YY)} \qquad \frac{b^6}{f^3} - \frac{3a^2c^2b^2}{f^3} + \frac{1}{f^3}(a^6 + c^6) = 0.$$

E che mutando i segni delle tre radici dell'equazione (XX), esse divengono radici dell'equazione cubica, che à questa forma:

$$\text{(ZZ)} \qquad \frac{a^6}{f^3} + \frac{3b^2c^2a^2}{f^3} + \frac{1}{f^3}(b^6 - c^6) = 0.$$

Corollario XLVIII. — Dividendo per $\frac{b^2}{f} - \frac{a^2}{f} - \frac{c^2}{f} = 0$ l'equazione (WW), resta il quoziente:

$$\frac{b^4}{f^2} + \frac{1}{f^2}(a^2 + c^2)b^2 + \frac{1}{f^2}(a^4 - a^2c^2 + c^4) = 0$$

equazione, le di cui radici si contengono in questa formola:

$$\frac{b^2}{f} = -\frac{1}{2f}(a^2 + c^2) \pm \frac{1}{2f}(-3a^4 + 6a^2c^2 - 3c^4)^{\frac{1}{2}}$$

la quale mostra, esser immaginarie dette radici; mentre la quantità sotto il vincolo è il quadrato $a^4 - 2a^2c^2 + c^4$ (necessariamente positivo) moltiplicato per -3.

Corollario XLIX. — Dividendo per $\frac{a^2}{f} - \frac{b^2}{f} + \frac{c^2}{f} = 0$ l'equazione (XX), rimane il quoziente:

$$\frac{a^4}{f^2} + \frac{1}{f^2}(b^2 - c^2)a^2 + \frac{1}{f^2}(b^4 + c^2b^2 + c^4) = 0.$$

Equazione, le radici della quale sono immaginarie, ed espresse nella formola, che segue:

$$\frac{a^2}{f} = \frac{1}{2f}(c^2 - b^2) \pm \frac{1}{2f}(-3b^4 - 6b^2c^2 - 3c^4)^{\frac{1}{2}}.$$

Corollario L. — Si dee modificar l'espressione del corollario XLVIII, ed asserire, che l'equazioni (WW), (XX), (YY), e (ZZ) possono rappresentare quelle sole equazioni cubiche prive del secondo termine, le quali ànno *una radice reale, e due immaginarie:*

Come pure, che non sono valevoli (dette equazioni) a rappresentar *veramente* quelle equazioni cubiche prive del secondo termine, le quali ànno *le radici tutte e tre reali*. Caso, che chiamasi *irreduttibile* nell'algebra.

Questo corollario parmi degno d'osservazione.

Annotazione. — Possono paragonarsi i termini dell'equazioni (WW), (XX), (YY), e (ZZ) co' termini corrispondenti dell'equazioni cubiche (della stessa specie) da risolversi: e in virtù delle *indeterminate* possono trarsene *due equazioni parziali;* indi combinar queste in maniera, che si trovi la resoluzione di dette equazioni cubiche *simigliante a quella del Cardano*, ec.

I periti nell'algebra non abbisognano sopra ciò di più diffusa spiegazione. Essi ben comprenderanno dopo le cose dette, come abbiano da valersi del triangolo rettangolo in ordine a tale resoluzione.

INDICE

PER TROVARE IN QUESTO TRATTATO DE' TRIANGOLI IL LUOGO DE' TEOREMI.

INDICE

PER TROVARE IN QUESTO TRATTATO DE' TRIANGOLI GLI SCOLJ, ED I PROBLEMI.

(Si avverte, che non si accennano in quest'Indice gli Scolj compresi nella Continuazione di questo medesimo Trattato de' Triangoli, perchè essi Scolj non sono numerati, ma citati relativamente ai Teoremi, ed ai loro Corollarj, ai quali si trovano annessi).

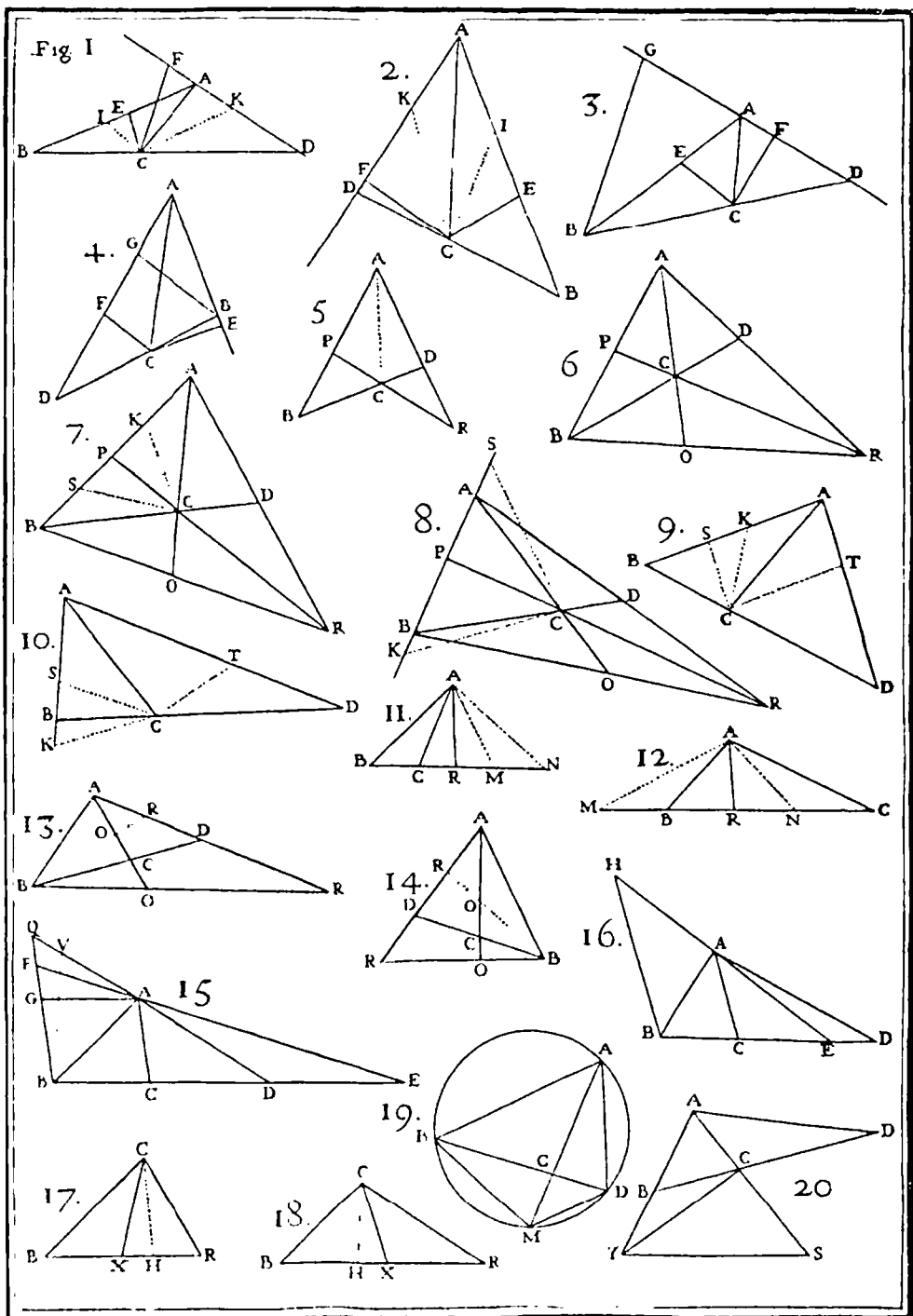
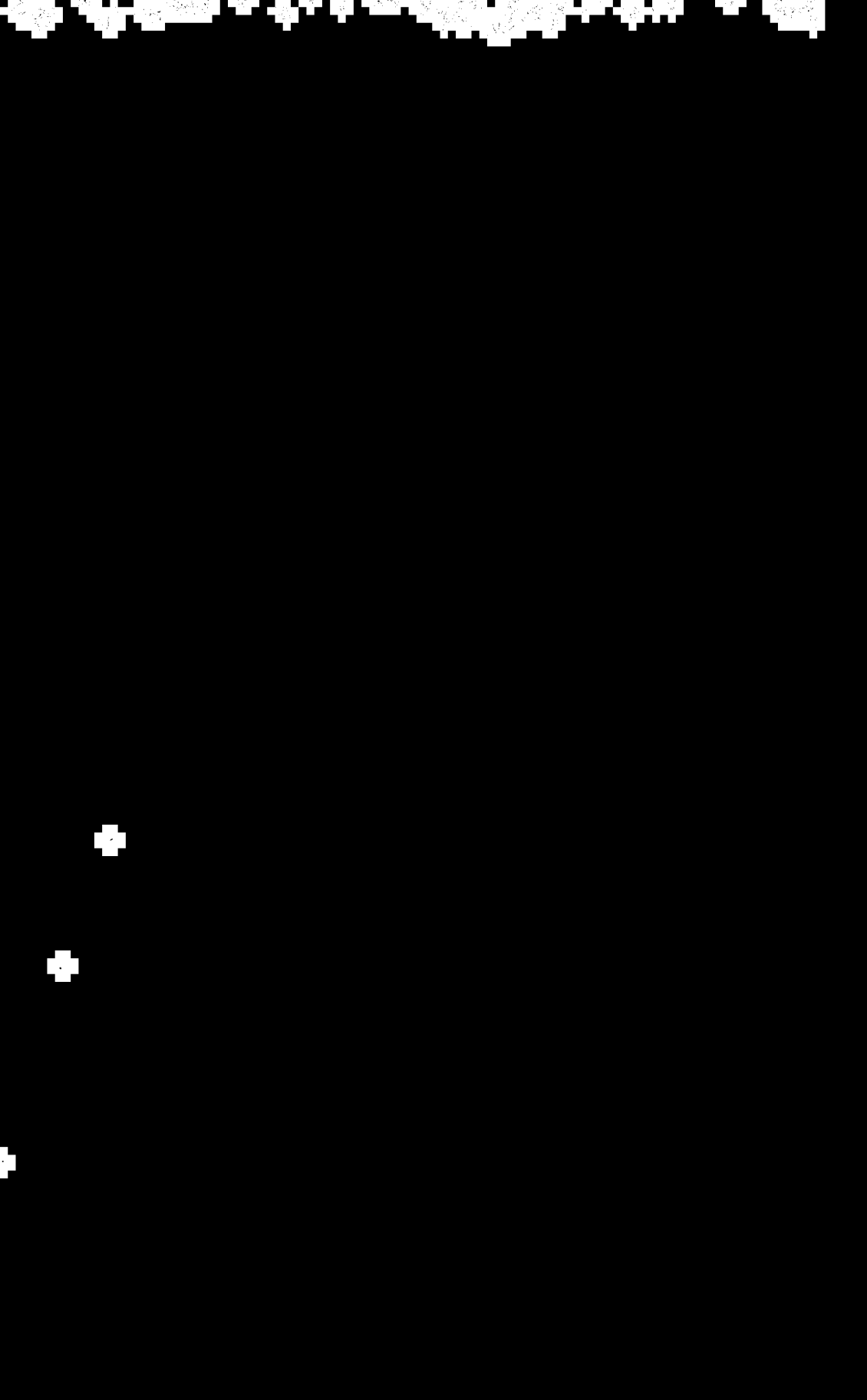
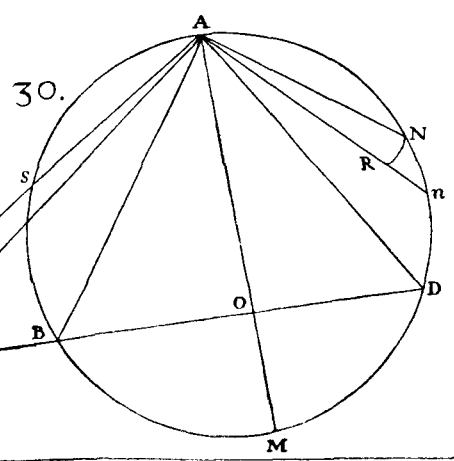
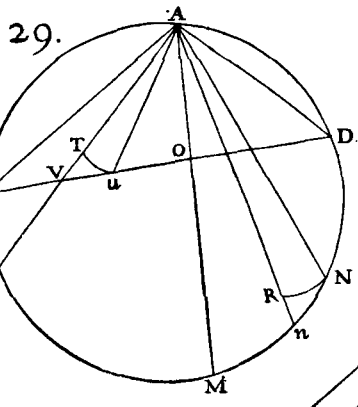
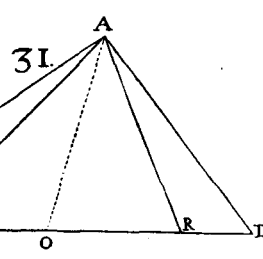
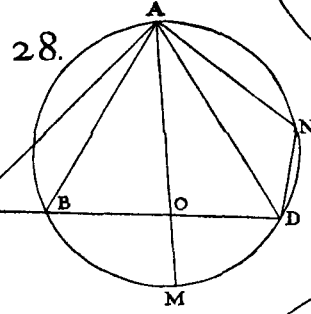
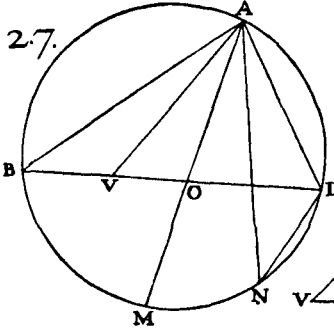
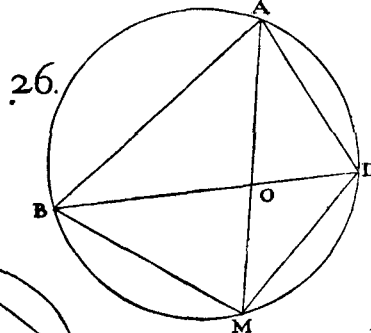
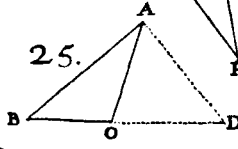
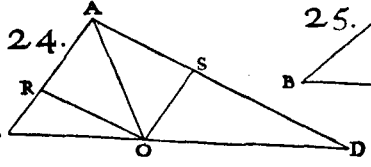
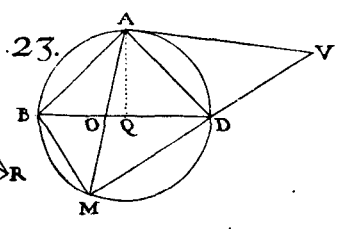
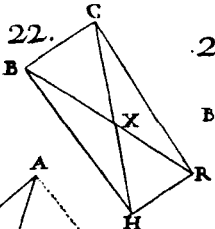
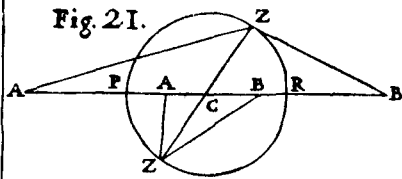
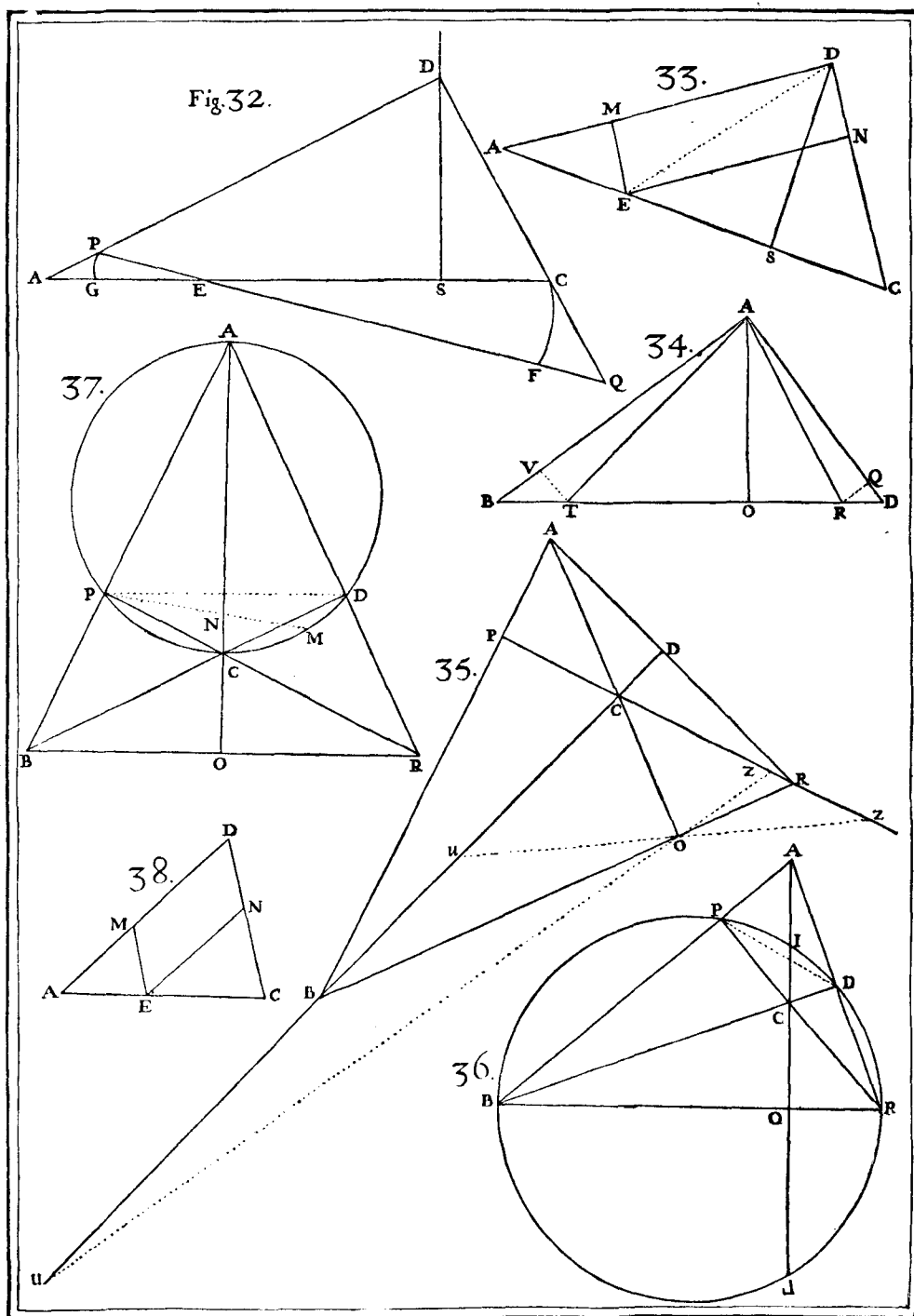
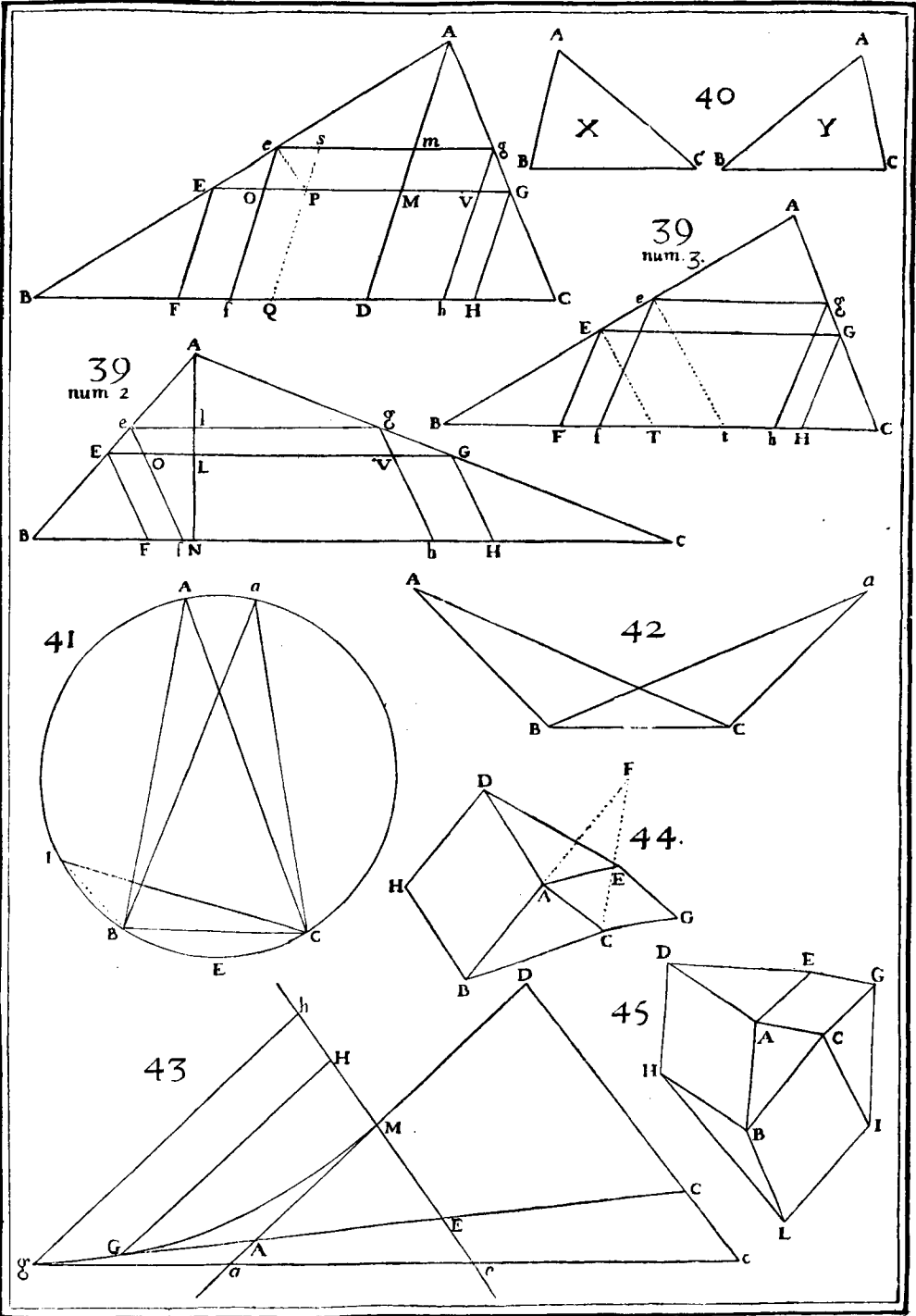
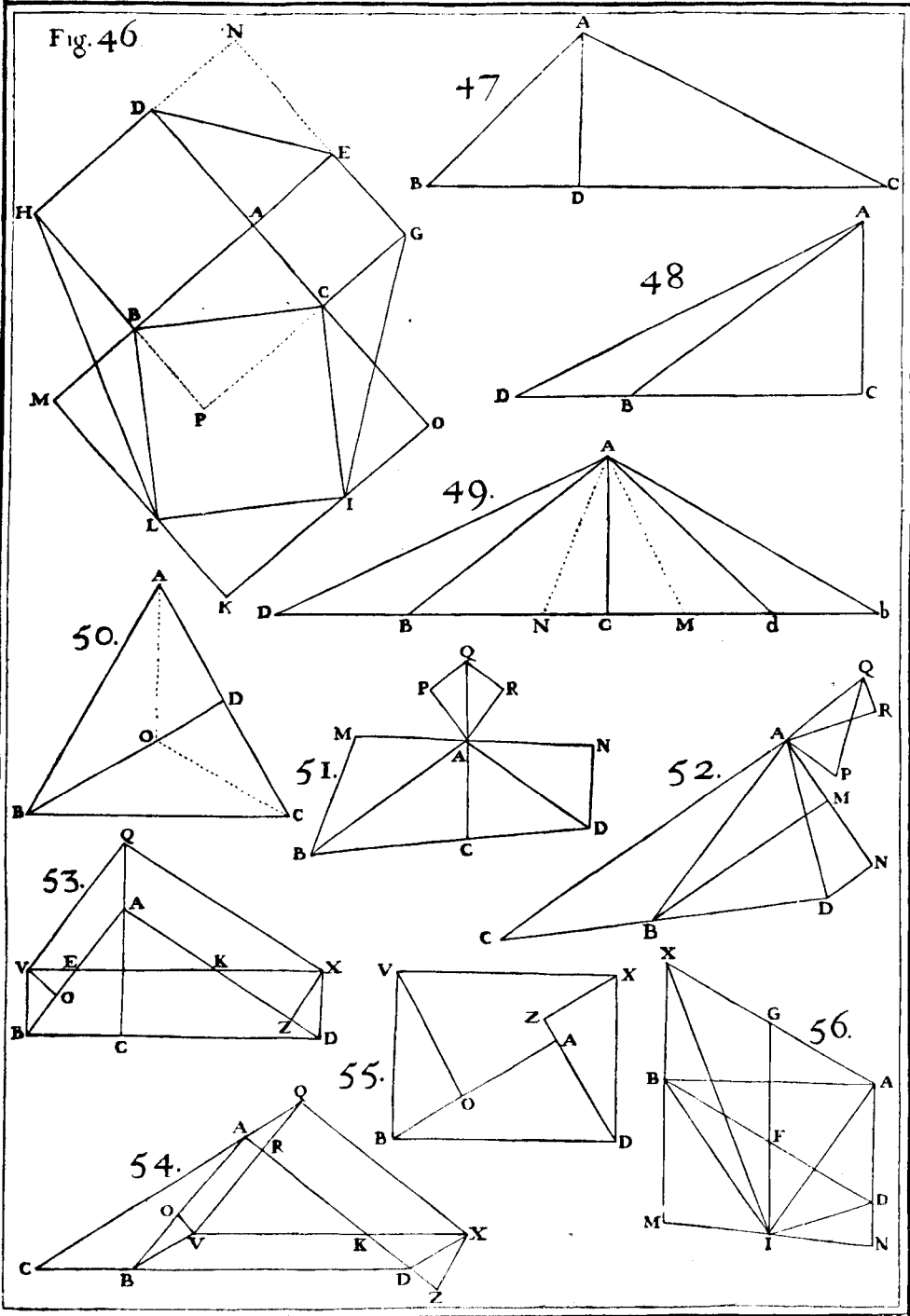
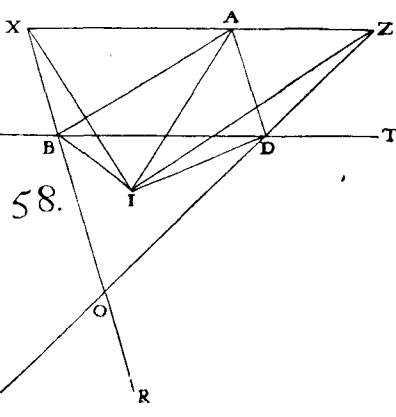
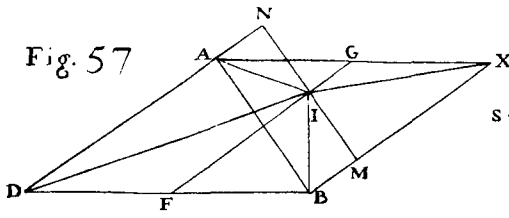
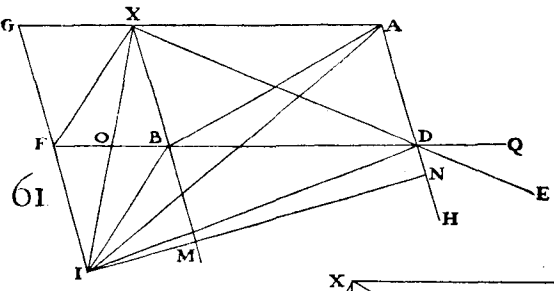
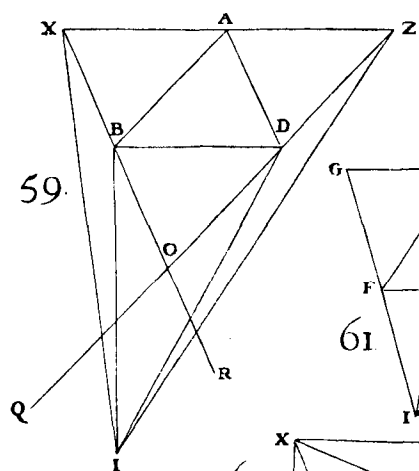
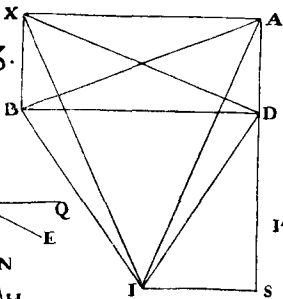
Scolj

Fig. I
2.
3.
4.
5
6
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15
16.
17.
18.
19.
20

Fig. 21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.

Fig. 32.
D
P
A
G
E
S
C
F
Q
33.
D
M
A
N
E
S
C
34.
A
V
B
T
O
R
Q
D
37.
A
P
D
N
M
C
B
O
R
35.
A
P
D
C
Z
R
z
u
O
38.
D
M
N
A
E
C
B
A
P
I
D
C
36.
B
O
R
u
J

39
num 2
39
num. 3.
40
X
Y
41
42
43
44.
45

Fig. 46
N
D
E
H
A
G
C
B
M
P
O
I
L
K
47
A
B
D
C
48
A
D
B
C
49.
A
D
B
N
C
M
d
b
50.
A
D
O
B
C
Q
P
R
M
N
A
51.
B
C
D
Q
R
A
P
52.
M
N
D
B
C
53.
Q
A
V
E
K
X
O
B
C
Z
D
V
X
Z
A
55.
O
B
D
X
G
56.
B
A
F
D
M
I
N
Q
A
R
54.
O
V
K
X
C
B
D
Z

APPENDICE AL TRATTATO DE' TRIANGOLI

XVII.

NUOVA E GENERALE PROPRIETÀ DE' POLIGONI (*).

LEMMA I (fig. 1). — Sia qualsivoglia triangolo APB, la di cui base AB sia tagliata per mezzo in T dalla retta PT, che scende dal vertice del medesimo triangolo. Io dico, che sussiste l'infrascritta equazione (1):

$$\frac{1}{2}PA^2+\frac{1}{2}PB^2=\frac{1}{4}AB^2+PT^2. \tag{1}$$

DIMOSTRAZIONE. — Si concepisca il triangolo APB iscritto nel cerchio, si prolunghi la PT sino alla circonferenza in O, e s'intendano tirate le corde AO, OB; tirisi poscia sino alla base del triangolo la retta PS tale, che l'angolo SPB sia eguale all'angolo TPA. Ciò fatto si consideri:

I. Che il triangolo ATP è simile al triangolo OTB, e il triangolo PTB è simile al triangolo OTO. Abbiamo per tanto queste tre proporzioni:

$$PT\,.\,PA::TB\,.\,BO=\frac{PA\times TB}{PT}$$

$$PT\,.\,PB::AT\,.\,AO=\frac{AT\times PB}{PT}$$

$$PT\,.\,TB::AT\,.\,TO=\frac{AT\times TB}{PT}.$$

Adunque $PO=PT+TO=\dfrac{PT^2+AT\times TB}{PT}$.

II. Che il triangolo SPB è simile al triangolo APO, perchè gli angoli SPB, APO sono già eguali per la costruzione, e gli angoli ABP, AOP sono anch'essi eguali, come appoggiati sullo stesso arco AP, e quindi nasce questa proporzione: $PO\,.\,AO::PB\,.\,SB$.

(*) Giornale de' letterati d'Italia, tom. XXXVI, pag. 230.

Cioè sostituendo in vece di PO, e di AO i loro valori trovati di sopra.

$$\frac{PT^2+AT\times TB}{PT}\cdot\frac{AT\times PB}{PT}::PB\,.\,SB,$$

donde viene la seguente equazione:

$$SB=\frac{PB^2\times AT}{PT^2+AT\times TB}. \tag{2}$$

III. Che il triangolo APS è simile al triangolo OPB, attesochè gli angoli APS, OPB sono eguali in virtù della costruzione, e gli angoli PAS, POB sono parimente eguali, perchè ciascuno di essi à per sua misura la **metà** dell'arco PB; laonde si ha quest'altra proporzione:

$$PO\,.\,OB::PA\,.\,AS,$$

ovvero ponendo in cambio di PO, e di OB i loro valori:

$$\frac{PT^2+AT\times TB}{PT}\cdot\frac{PA\times TB}{PT}::PA\,.\,AS,$$

e se ne deduce l'equazione che segue:

$$AS=\frac{PA^2\times TB}{PT^2+AT\times TB}. \tag{3}$$

IV. Che essendo $AB=AS+SB$ si ottiene l'infrascritta equazione (4), purchè si pongano in luogo di AC, e di SB i loro valori tratti dall'equazioni (2), e (3).

$$AB=\frac{PA^2\times TB+PB^2\times AT}{PT^2+AT\times TB}. \tag{4}$$

Egli è visibile, che quest'ultima equazione sussiste anche ove la PT tagli la base AB in due parti disuguali, che sieno tra di loro in qualunque ragione.

Poniamo ora, che il punto T cada nel mezzo della medesima base, e surroghiamo $\frac{1}{2}AB$ in luogo di AT, e di TB nell'equazione (4), e ne risulterà quest'altra:

$$AB=\frac{\frac{1}{2}PA^2\times AB+\frac{1}{2}PB^2\times AB}{PT^2+\frac{1}{4}AB^2}$$

che divisa per AB, e poi moltiplicata per $PT^2 + \frac{1}{4}AB^2$ produce l'equazione (1). Il che era a dimostrarsi.

Lemma II (fig. 2, 3, 4, e 5). — Se il triangolo APB degenera in una retta, cioè se il punto P cade sopra qualunque punto della retta AB anche prolungata; io dico, che tuttavia sussiste l'equazione (1), purchè la medesima AB sia divisa per mezzo in T.

Dimostrazione pe' casi delle figure 2, e 3. — Nel caso della figura seconda si à:

$$PT = TB - PB = \frac{1}{2}AB - PB = \frac{1}{2}AP + \frac{1}{2}PB - PB,$$

cioè $PT = \frac{1}{2}(PA - PB)$.

Nel caso della figura terza si vede:

$$PT = AT - AP = \frac{1}{2}AB - AP = \frac{1}{2}AP + \frac{1}{2}PB - AP,$$

cioè $PT = \frac{1}{2}(-PA + PB)$.

Pongasi per tanto nel secondo membro dell'equazione (1) in vece di AB il suo valore $PA + PB$, e in vece di PT il suo valore, che è $\frac{1}{2}(\pm PA \mp PB)$, e l'equazione (1) si ridurrà a un'equazione identica. Il che dovea dimostrarsi in primo luogo.

Dimostrazione pe' casi delle figure 4, e 5. — Nel caso della figura quarta si à:

$$AB = PB - PA$$

$$PT = PA + AT = PA + \frac{1}{2}AB = PA + \frac{1}{2}PB - \frac{1}{2}PA,$$

cioè $PT = \frac{1}{2}(PB + PA)$.

Nel caso poi della figura quinta si à:

$$AB = PA - PB$$

$$PT = PB + BT = PB + \frac{1}{2}AB = PB + \frac{1}{2}PA - \frac{1}{2}PB,$$

cioè $PT = \frac{1}{2}(PB + PA)$.

Laonde surrogando nel secondo membro dell'equazione (1) in vece di AB il suo valore $\pm PB \mp PA$, e in cambio di PT il suo valore $\frac{1}{2}(PB+PA)$, si giungerà di nuovo ad un'equazione identica. Il che dovea secondariamente dimostrarsi.

Teorema generale. — Sia qualsivoglia poligono, i cui lati giacciono in uno, o in differenti piani, e sia preso in qualunque sito dell'universo un punto a discrezione, dal quale si tirino delle linee rette sino al vertice di tutti gli angoli dello stesso poligono, e delle altre rette sino alla metà di tutti i suoi lati. Io dico, che la somma de' quadrati di quelle linee, che giungono al vertice degli angoli, meno la somma de' quadrati di quelle linee, che arrivano alla metà de' lati, è uguale alla somma de' quadrati de' medesimi lati divisa per quattro.

Dimostrazione (fig. 6). — Mi basterà dimostrare la verità di questa proposizione nel quadrilatero $ABCD$, supponendo, che i suoi lati giacciano tutti nel medesimo piano, e che il punto si prenda dentro lo stesso quadrilatero; mentre si vedrà evidentemente, che la medesima dimostrazione si estenderà a tutti casi del teorema.

In virtù del I lemma si ànno le quattro equazioni seguenti:

$$\frac{1}{2}PA^2+\frac{1}{2}PB^2=\frac{1}{4}AB^2+PT^2$$

$$\frac{1}{2}PB^2+\frac{1}{2}PC^2=\frac{1}{4}BC^2+PY^2$$

$$\frac{1}{2}PC^2+\frac{1}{2}PD^2=\frac{1}{4}CD^2+PZ^2$$

$$\frac{1}{2}PD^2+\frac{1}{2}PA^2=\frac{1}{4}DA^2+PX^2$$

Aggiungendo queste quattro equazioni, indi trasponendo, ritrovasi:

$$(5) \qquad PA^2+PB^2+PC^2+PD^2-PT^2-PY^2-PZ^2-PX^2=$$

$$=\frac{1}{4}(AB^2+BC^2+CD^2+DA^2).$$

Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO. — Dal tenore di questa dimostrazione si vede, che tante sono l'equazioni, quanti i lati del poligono. E dee notarsi ancora, che se il punto P cadesse in uno de' lati del poligono, anche prolungato (non però nel vertice d'alcun angolo) allora il II lemma fornirebbe una sola equazione, e l'altre dipenderebbero dal I lemma. Ma se il punto P cadesse nel vertice di qualunque angolo del poligono, in questo caso il II lemma somministrerebbe due dell'equazioni suddette, ed il I lemma darebbe le altre. La fecondità del mio teorema apparirà da' corollarj, che seguono:

COROLLARIO I (fig. 6, e 7). — Se il poligono è il triangolo ABC, allora nel quadrilatero $ABCD$ il lato DA è nullo, e i punti X, e D si confondono col punto A, di modo che ponendo nell'equazione (5) PA^2 in luogo di PD^2, e di PX^2, e zero in vece di DA^2 ne risulta quest'altra:

$$(6) \qquad PA^2+PB^2+PC^2-PT^2-PY^2-PZ^2=\frac{1}{4}(AB^2+BC^2+CA^2).$$

COROLLARIO II (fig. 7). — Se di più il punto P è il centro di gravità del triangolo ABC, egli è già noto, che in questo caso le rette PT, PY, PZ sono i prolungamenti, e i suddupli delle linee rispettive PC, PA, PB. Adunque sostituendo nell'equazione (6) in luogo delle tre linee suddette PT, PY, PZ i loro valori $\frac{1}{2}PC$, $\frac{1}{2}PA$, $\frac{1}{2}PB$, indi moltiplicando per 4 l'uno, e l'altro membro, si scuopre:

$$3PA^2+3PB^2+3PC^2=AB^2+BC^2+CA^2.$$

COROLLARIO III (fig. 8). — Se il punto P è nell'intersecazione delle due diagonali AC, BD del parallelogrammo $ABCD$, allora PB, e PD sono la metà di BD; PA, e PC sono la metà di AC; PT, e PZ sono la metà di AD, ovvero di BC, e in fine PX, e PY sono la metà di AB, ovvero di CD; e conseguentemente moltiplicando per 4 l'equazione (5), e facendo in essa le debite sostituzioni, si ottiene:

$$2AB^2+2BD^2-2AD^2-2AB^2=2AB^2+2AD^2,$$

ovvero dividendo per 2, e trasponendo:

$$(7) \qquad AC^2+BD^2=2AB^2+2AD^2$$

Corollario IV (fig. 9). — Ma se il parallelogrammo $ABCD$ è rettangolo, egli è chiaro, che essendo in questo caso $AC=BD$, l'equazione (7) si cangerà in questa: $2BD^2=2AB^2+2AD^2$, cioè dividendo per 2: $BD^2=AB^2+AD^2$, che è la nota proprietà del triangolo rettangolo, la quale potrebbe ancora dedursi immediatamente dal I lemma.

XVIII.

PROBLEMA, CHE RIGUARDA IL METODO DE' MASSIMI, E DE' MINIMI (Fig. 10).

Nel gnomone *ABDFEC* (i lati del quale *AB*, *EF* possono essere uguali, o disuguali) si concepisca sovrapposto il rettangolo *HGIK*, talmente che dei suoi lati paralleli *GI*, *HK* il primo sia la base dell'angolo *ICG*, e il secondo, prolungato, quandó bisogni, tocchi il vertice dell'angolo *BDF;* essendo dato il lato *GH* di esso rettangolo, si dimanda la maggior possibile lunghezza dell'altro suo lato *GI*.

Soluzione. — Dal punto D sia calata sopra la CA la normale DV, e sia prolungata HK, finchè tagli in S la stessa CA; si chiamino le linee date $EF=CV=a$; $AB=DV=b$; $GH=IK=c$, e le linee variabili $VS=u$; $GI=y$; adunque $DS=\sqrt{b^2+u^2}$.

La simiglianza de' triangoli DSV, IKS somministra

$$DV(b).DS(\sqrt{b^2+u^2})::IK(c).IS=\frac{c}{b}\sqrt{b^2+u^2},$$

e perciò essendo $GI=CV+VS-IS$, sarà ancora in termini analitici:

$$CI=a+u-\frac{c}{b}\sqrt{b^2+u^2}.$$

I triangoli simili VSD, GIG mostrano:

$$VS(u).SD(\sqrt{b^2+u^2})::CI.IG(y)=\frac{CI}{u}\sqrt{b^2+u^2},$$

e ponendo in questa espressione di y il valore analitico di CI, si ottiene:

$$(1)\qquad y=\frac{a}{u}\sqrt{b^2+u^2}+\sqrt{b^2+u^2}-\frac{cb}{u}-\frac{cu}{b}.$$

Da questa equazione differenziata risulta:

$$dy=\frac{adu}{\sqrt{b^2+u^2}}-\frac{adu}{u^2}\sqrt{b^2+u^2}+\frac{udu}{\sqrt{b^2+u^2}}+\frac{cbdu}{u^2}-\frac{cdu}{b},$$

cioè fatte le debite operazioni:

$$dy = \frac{b(u^3 - ab^2)du + c(b^2 - u^2)du\sqrt{b^2+u^2}}{bu^2\sqrt{b^2+u^2}}.$$

E il secondo membro di quest'equazione uguagliato a zero, conforme richiede il metodo de' minimi, mostrerà:

$$b(u^3 - ab^2) = c(u^2 - b^2)\sqrt{b^2+u^2}$$

ovvero quadrando, e trasponendo, ec.:

$$(2) \qquad (b^2 - c^2)u^6 + b^2c^2u^4 - 2ab^4u^3 + b^4c^2u^2 + (a^2 - c^2)b^6 = 0.$$

Prendansi ad uno ad uno tutti i valori reali, e positivi di u, che si contengono nell'equazione (2), facciasi la VS eguale a ciascuno dei suddetti valori di u, e congiungendo sempre i due punti S, D, si alzi sopra la SD dal punto S la normale SP eguale ad a, indi dal punto P si conduca la PG parallela alla SD, la quale PG taglierà la CA in I, e la CE in G. Egli è visibile, che la GI è uguale al lato del rettangolo $GHKI$, e che tante saranno le GI, quante sono le radici reali, e positive dell'equazione (2). Ora io dico, che la maggiore di queste GI sarà il lato massimo, che si domanda.

Il che era a ritrovarsi.

Corollario I. — Se i due lati del gnomone EF (a), ed AB (b) sono tra loro eguali, allora l'equazione (2) si cangia nella seguente:

$$(3) \qquad (a^2 - c^2)u^6 + a^2c^2u^4 - 2a^5u^3 + a^4c^2u^2 + (a^2 - c^2)a^6 = 0$$

la quale è il prodotto dell'altre due equazioni infrascritte:

$$(4) \qquad (a^2 - c^2)(u^4 + 2au^3 + 2a^3u + a^4) + a^2(3a^2 - 2c^2)u^2 = 0$$

$$(5) \qquad u^2 - 2au + a^2 = 0$$

Corollario II. — Se oltre l'essere $a = b$, è ancora c minore di a, l'equazione (4) à tutti i suoi termini affetti col segno positivo, donde nasce, che tutte le radici reali dell'equazione (4) sono negative; laonde l'equazione (3) non à altre radici reali, e positive, che le due dell'equazione (5), ciascuna delle quali è uguale ad a, e quindi si fa manifesto, che nel caso di questo corollario convien prendere $VS = a$ per avere la massima y, di cui se si brama l'espressione analitica, pongasi a in vece di b, e di u nell'equazione (1), e si avrà $y = 2a\sqrt{2} - 2c$.

Corollario III. — Ma se tutte e tre le a, b, c sono eguali tra di loro, il terzo termine dell'equazione (4) diviene $a^4u^2=0$, e trovasi $u=0$; laonde sostituendo zero in vece di u, ed a in luogo di b, e di c nella equazione (1), si vede $y=a$.

Dal che si conosce, che prendendo la VS infinitamente piccola, e immaginando fatta la costruzione spiegata nella soluzione, la base GI dell'angolo ICG è uguale ad a, e il lato IC dello stesso angolo è infinitamente piccolo.

Se poi in cambio di u si prende il suo valore a, tratto dall'equazione (5), allora l'equazione (1) somministra nell'ipotesi del presente corollario il seguente valore di GI: $y=2a\sqrt{2}-2a$ che è minore di a, altro valore di y testè trovato, mediante l'equazione (4).

Corollario IV. — Allorchè $GH(c)$ è uguale ad $AB(b)$, l'equazione (2) genera l'infrascritta:

$$u^4-2au^3+b^2u^2+(a^2-b^2)b^2=0.$$

Le radici della quale, siccome quelle dell'equazione (4), si trovano mediante il cerchio, e le sezioni coniche.

Corollario V. — Nel caso del corollario III, vale a dire, allorchè tanto b, quanto c sono eguali ad a; l'equazione (2) esprime tutto in un tratto i due valori di u, che sono zero, ed a; attesochè in tal supposizione l'equazione medesima (2) si cangia in questa:

$$a^4u^4-2a^5u^3+a^6u^2=0,$$

cioè dividendo per a^4, ec. $u^2(u-a)^2=0$.

XIX.

PROBLEMA SPETTANTE AL METODO DE' MASSIMI

E DE' MINIMI (Fig. 11, e 12) (*).

Rappresenti n qualunque numero razionale intiero, o rotto positivo, o negativo, ed m esprima l'unità, ovvero il numero 3, oppure il numero 4 (tutti positivi). Sia la retta AB tagliata per mezzo in C dalla retta CF, che fa con essa l'angolo semiretto ACE; si cerca nell'istessa CF il punto E tale, che tirate le rette AE, BE, e calata sopra AB la perpendicolare ED, la quantità $\frac{BE^m - AE^m}{ED^n}$ sia un minimo, ovvero un massimo.

Preparazione. — La data $AC = CB$ si chiami a, l'incognita $CD = DE$ (per l'angolo semiretto DCE, e per l'angolo retto EDC) si nomini x; si avrà $AD = \pm a \mp x$, $BD = a + x$, e (pel teorema Pittagorico)

$$BE = (a^2 + 2x^2 + 2ax)^{\frac{1}{2}}, \quad AE = (a^2 + 2x^2 - 2ax)^{\frac{1}{2}},$$

e per la condizione del problema sarà

$$\frac{(a^2 + 2x^2 + 2ax)^{\frac{m}{2}} - (a^2 + 2x^2 - 2ax)^{\frac{m}{2}}}{x^n}$$

eguale ad un minimo, ovvero ad un massimo, e però differenziando questa quantità, eguagliando a zero la differenza di essa, e trasponendo, si avrà:

$$nx^{-n-1}dx(a^2 + 2ax + 2x^2)^{\frac{m}{2}} - mx^{-n}dx(2x + a)(a^2 + 2x^2 + 2ax)^{\frac{m-2}{2}} =$$
$$= nx^{-n-1}dx(a^2 + 2x^2 - 2ax)^{\frac{m}{2}} - mx^{-n}dx(2x - a)(a^2 + 2x^2 - 2ax)^{\frac{m-2}{2}}.$$

(*) Opuscoli Calogerà, tomo XIX, pag. 369.

Equazione, che moltiplicata per $\frac{dx}{x^{n+1}}$, e trattata nel debito modo, diviene:

$$n(a^2+2x^2+2ax)(a^2+2x^2+2ax)^{\frac{m-2}{2}}-m(2x^2+ax)(a^2+2x^2+2ax)^{\frac{m-2}{2}}=$$
$$=n(a^2+2x^2-2ax)(a^2+2x^2-2ax)^{\frac{m-2}{2}}-m(2x^2-ax)(a^2+2x^2-2ax)^{\frac{m-2}{2}},$$

donde nasce, fatte le dovute operazioni, quest'altra equazione:

$$\text{(A)}\qquad \frac{na^2+2(n-m)x^2+(2n-m)ax}{na^2+2(n-m)x^2-(2n-m)ax}=\frac{(a^2+2x^2-2ax)^{\frac{m-2}{2}}}{(a^2+2x^2+2ax)^{\frac{m-2}{2}}}.$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA ALLORCHÈ m SIGNIFICA IL NUMERO 3, OVVERO L'UNITÀ. — Riflettasi ora, che, se $m=3$, il secondo membro dell'equazione (A) diventa $\frac{(a^2+2x^2-2ax)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+2x^2+2ax)^{\frac{1}{2}}}$, e se $m=1$, il suddetto secondo membro diviene $\frac{(a^2+2x^2-2ax)^{-\frac{1}{2}}}{(a^2+2x^2+2ax)^{-\frac{1}{2}}}$, cioè $\frac{(a^2+2x^2+2ax)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+2x^2-2ax)^{\frac{1}{2}}}$, di modo che questa frazione $\frac{(a^2+2x^2\mp 2ax)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+2x^2\pm 2ax)^{\frac{1}{2}}}$ corrisponderà al valore di $m=3$, quando in essa si prenderà ne' segni dubbiosi il segno superiore, e si riferirà al valore di $m=1$, allorchè ne' segni dubbiosi valerà il segno inferiore, si à dunque per l'uno, e per l'altro caso:

$$\frac{na^2+2(n-m)x^2+(2n-m)ax}{na^2+2(n-m)x^2-(2n-m)ax}=\frac{(a^2+2x^2\mp 2ax)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+2x^2\pm 2ax)^{\frac{1}{2}}},$$

e quadrando ambedue i membri, si ottiene quest'equazione:

$$\text{(B)}\qquad [n^2a^4+4n(n-m)a^2x^2+4(n-m)^2x^4+2n(2n-m)a^3x+$$
$$+4(n-m)(2n-m)ax^3+(2n-m)^2a^2ux]:[n^2a^4+4n(n-m)a^2x^2+$$
$$+4(n-m)^2x^4-2n(2n-m)a^3x-4(n-m)(2n-m)ax^3+(2n-m)^2a^2x^2]=$$
$$=(a^2+2x^2\mp 2ax):(a^2+2x^2\pm 2ax).$$

Facciasi ora:

$$n^2a^4+4n(n-m)a^2x^2+4(n-m)^2x^4+(2n-m)^2a^2x^2=t$$
$$2n(2n-m)a^3x+4(n-m)(2n-m)ax^3=u$$
$$a^2+2x^2=z.$$

E l'equazione (B) si ridurrà a questa $\frac{t+u}{t-u}=\frac{z\mp 2ax}{z\pm 2ax}$, laonde moltiplicando in croce si troverà:

$$tz+uz\pm 2axt\pm 2axu=tz-uz\mp 2axt\pm 2axu,$$

cioè $\pm 4axt+2uz=0$, vale a dire $t\pm\frac{1}{2}\frac{uz}{az}=0$, e sostituendo in questa ultima equazione in luogo di t, di u, e di z i loro valori espressi di sopra, e operando a dovere, finalmente si scoprirà la formola generale infrascritta, ove nel segno dubbioso, il segno superiore serve al caso di $m=3$, e il segno inferiore à luogo quando $m=1$

$$\begin{array}{llll} & +n^2a^4\pm 2(n-m)(2n-m)a^2x^2 & \pm 4(n-m)(2n-m)x^4 & \\ \pm n(2n-m)a^4+ & +(2n-m)^2a^2x^2 & +4(n-m)^2x^4 & \\ & \pm 2n(2n-m)a^2x^2 & & \\ & +4n(n-m)a^2x^2 & & =0. \end{array}$$

Corollario I. — Questa formola facendo figura di un'equazione del secondo grado, ne segue, che qualunque sia il valore di n, ovvero di m (intendendo per m l'unità, ovvero 3) il problema è sempre solubile mediante la geometria piana, purchè l'equazione medesima non contenga radici immaginarie.

Corollario II. — Se $m=3$, il segno dubbioso $\pm$ sarà positivo, e la formola generale produrrà quest'altra:

$$3n(n-1)a^4+(16n^2-48n+27)a^2x^2+12(n^2-5n+6)x^4=0.$$

Corollario III. — La formola del II corollario equivale a questa:

$$3n(n-1)a^4+(4n-3)(4n-9)a^2x^2+12(n-2)(n-3)x^4=0.$$

Corollario IV. — Egli è manifesto a chi considera la formola del III corollario, che nella supposizione di $m=3$, se n è un numero negativo, ovvero se n è uguale, o maggiore di 3, il valore di x è immaginario; poichè in tutti questi casi i coefficienti di a^4, di a^2x^2, e di x^4

sono tutti positivi, a riserva del caso di $n=3$, in cui il coefficiente di x^4 è zero, e in questo caso ancora è chiaro, che il valore di x è immaginario.

COROLLARIO V. — Se $m=1$, il segno dubbioso $\pm$ dee prendersi per negativo, e la formola generale si cangia nella seguente:

$$n\,(1-n)\,a^4-a^2x^2+4\,n\,(1-n)\,x^4=0.$$

COROLLARIO VI. — L'ispezione della formola del V corollario mostra, che quando $m=1$, se n è un numero negativo, ovvero se n è uguale, ovvero maggiore dell'unità, il valore di x è immaginario, o rispettivamente nullo, perchè nel caso di n maggiore dell'unità, o di n negativo, i coefficienti di a^4, di a^2x^2, e di x^4 sono tutti negativi, e nel caso di $n=1$, si annullano i coefficienti di a^4, e di x^4.

Primo esempio di questa soluzione nel caso di m$=3$. — Posto che sia $m=3$, ed $n=1$, le formole del II, e III corollario dànno quest'equazione $-5\,a^2x^2+24\,x^4=0$, e però in questo caso si à $x=\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ ed essendo $CE=x\sqrt{2}$, sarà ancora $CE=\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Secondo esempio nel caso di m$=3$. — Se $m=3$, ed $n=2$, ambedue le formole del II e III corollario somministrano l'equazione, che segue:

$$6\,a^4-5\,a^2x^2=0,\ \text{cioè}\ x=a\,\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}},$$

e quindi

$$CE=x\sqrt{2}=\frac{2\,a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$

Terzo esempio pel caso di m$=1$. — Ove poi suppongasi $m=1$, ed $n=\frac{1}{2}$, la formola del V corollario diviene $\frac{1}{4}a^4-a^2x^2+x^4=0$, donde si deduce $x^2-\frac{1}{2}a=0$, ed $x=a\sqrt{\frac{1}{2}}$, laonde $CE=x\sqrt{2}$ sarà eguale ad a.

Soluzione del problema, allorchè m$=4$. — Quando m significa 4, l'equazione (A) prende quest'aspetto:

$$\text{(C)}\qquad \frac{n\,a^2+2\,(n-4)\,x^2+2\,(n-2)}{na^2+2\,(n-4)\,x^2-2\,ax}=\frac{a^2-2\,x^2-2\,ax}{a^2+2\,x^2-2\,ax};$$

facciasi $f = na^2 + 2(n-4)x^2$; $g = 2(n-2)ax$, e $z = a^2 + 2x^2$, e l'equazione (C) somministra $\frac{f+g}{f-g} = \frac{z-2ax}{z+2ax}$; da questa poi moltiplicata in croce, risulta, fatte le debite elisioni, e trasposizioni, $4afx = -2gz$, cioè $f = \frac{-gz}{2ax}$, e surrogando in cambio di f, g, e z i loro valori, si trova:

$$na^2 + 2nx^2 - 8x^2 = -na^2 + 2a^2 - 2nx^2 + 4x^2$$

donde proviene $12x^2 - 4nx^2 = 2na^2 - 2a^2$ e finalmente:

$$\text{(D)} \qquad x = a\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{6-2n}}.$$

Corollario. — Allorchè $m = 4$, se $n = 1$, la x è nulla, se $n = 3$, la x è infinita, e se n è minore dell'unità, ovvero maggiore di 3, oppure se n denota un esponente negativo, in tutti e tre questi ultimi casi la x è immaginaria.

Quarto esempio pel caso di m $= 4$. — Posto $m = 4$, se $n = \frac{27}{17}$, l'equazione (D) fa conoscere $x = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, come appunto nel primo esempio.

Quinto esempio pel caso di m $= 4$. — Posto $m = 4$, se $n = \frac{41}{17}$, l'equazione (D) mostra $x = a\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$, come nel secondo esempio.

Sesto esempio pel caso di m $= 4$. — Posto $m = 4$, se $n = 2$, l'equazione (D) mostra $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, come nel terzo esempio.

È curiosa l'uniformità, che s'incontra paragonando il quarto esempio col primo, il quinto col secondo, e il sesto col terzo.

Settimo esempio pel caso di m $= 4$. — Posto $m = 4$, se $n = \frac{2r^2+1}{6r^2+1}$, quest'espressione di n introdotta nell'equazione (D) fa scoprire $x = ra$.

Scolio. — Per indagare se il valore di x somministrato dalla soluzione del presente problema corrisponde ad un minimo, ovvero ad un massimo, convien prima sostituire lo stesso valore di x in quest'espressione:

$$\text{(E)} \qquad \frac{(a^2 + 2x^2 + 2ax)^{\frac{m}{2}} - (a^2 + 2x^2 - 2ax)^{\frac{m}{2}}}{x^n}$$

e poi sostituirvi in luogo di x una quantità poco differente dal valore di x, che la soluzione del problema à dato.

Se la quantità (E) colla seconda sostituzione divien maggiore, che colla prima, il valore di x si riferisce ad un minimo, ma se la quantità (E) divien minore colla seconda sostituzione, che colla prima, il valore di x conviene ad un massimo.

XX.

PROBLEMA CONCERNENTE IL METODO DE' MASSIMI E DE' MINIMI (Fig. 13) (*).

Sia l'angolo dato rettilineo FAG, e in esso dato il cerchio C, si cerca la tangente di questo cerchio, che sia la minima delle comprese dell'angolo dato.

PREPARAZIONE. — Si concepisca tirata la minima tangente FG colla fg infinitamente vicina, le quali tocchino nel medesimo punto T il dato cerchio considerato come un poligono infinitilatero, e taglino i lati dell'angolo dato respettivamente in F, G, e in f, g; si prolunghi il raggio CT, finchè incontri in M il lato AF, e dal vertice A si cali sulla tangente FG la normale AO; indi coi raggi TF, Tg si descrivano i due archi infinitesimi FH, gl, il primo de' quali taglia la fT in H, e il secondo la TG in L.

Ciò fatto si consideri, che pe' triangoli simili fHF, FOA si à $\frac{FH}{Hf}=\frac{AO}{FO}$, siccome pe' triangoli GLg, GOA parimente simili, $\frac{LG}{gL}=\frac{AO}{GO}$, e per conseguenza si ottiene questa proporzionalità $\frac{FH}{Hf}\cdot\frac{gL}{LG}::\frac{AO}{FO}\cdot\frac{AO}{GO}$: ma per la natura del minimo $Hf=LG$; adunque à luogo quest'altra proporzionalità $FH\,.\,gL::\frac{1}{FO}\cdot\frac{1}{GO}::GO\,.\,FO$. Ora per la similitudine dei settori TFH, TgL si à $FH\,.\,gL::FT\,.\,Tg::FT\,.\,TG$; adunque

$$FT\,.\,TG::GO\,.\,FO;$$

ovvero ponendo $FG-FT$ in luogo di TG, ed $FG-FO$ in cambio di GO, ne viene $FT\,.\,FG-FT::FG-FO\,.\,FO$, *e per la composizion contraria di proporzione* $FT\,.\,FG::FG-FO\,.\,FO$; adunque $FT=FG-FO$, e trasponendo:

$$FG=FO+FT. \tag{1}$$

(*) Opuscoli Calogerà tom. XXVII, pag. 379.

Corollario I. — Togliendo FO dall'uno e l'altro membro dell'ultima equazione, si vede $OG=FT$, e togliendo FT da ciascuno di detti membri, si à $TG=FO$.

Corollario II (fig. 13). — Prolungando TM finchè incontri in N l'altro lato AG prodotto, la similitudine de' triangoli FTM, FOA somministra $\frac{FT}{FO}=\frac{TM}{AO}$, e la similitudine de' triangoli GOA, GTN, fa conoscere $\frac{OG}{TG}=\frac{AO}{TN}$: ma per l'antecedente corollario $OG=FT$, e $TG=FO$; adunque $\frac{FT}{FO}=\frac{AO}{TN}$, e perciò $\frac{TM}{AO}=\frac{AO}{TN}$; laonde AO è media proporzionale tra TM, e TN.

Corollario III. — Si è trovato di sopra $FT \,.\, TG :: GO \,.\, FO$, cioè $FT \,.\, TG :: \frac{AO}{FO} \cdot \frac{AO}{GO}$; si à in oltre $\frac{AO}{FO}=\frac{MT}{TF}$, e $\frac{AO}{GO}=\frac{NT}{TG}$, adunque

$$FT \,.\, TG :: \frac{MT}{TF} \cdot \frac{NT}{TG}$$

e per conseguenza $\frac{TG\times MT}{TF}=\frac{FT\times NT}{TG}$, donde si deduce $\frac{TG^2}{NT}=\frac{FT^2}{MT}$.

Corollario IV (fig. 13). — Quindi nasce il teorema seguente:

Teorema. — Sia l'angolo dato FAG, e la sua sottotesa parimente data FG, dai punti estremi della quale s'alzino sui lati dell'angolo le normali FK, GK, che s'incontrano in K, dal qual punto si cali sopra la sottotesa la perpendicolare KT, che taglia la FG in T, e dal punto C preso ad arbitrio sulla normale TK (prolungata indefinitamente, se così si vuole sotto, e sopra il punto K), si descriva un cerchio col raggio CT; io dico, che la data sottotesa FG è un minimo rispetto all'altre tangenti del medesimo cerchio.

Imperciocchè prolungando verso A la normale KT, finchè tagli in M, e in N i due lati dell'angolo dato (uno de' quali è prolungato), si à per la costruzione $KT=\frac{TG^2}{NT}$, e parimente $KT=\frac{ET^2}{MT}$; adunque $\frac{TG^2}{NT}=\frac{FT^2}{MT}$, e pel corollario precedente la tangente FG è un minimo.

Corollario V. — Se il raggio CT diventa nullo, in modo che tutto il cerchio si restringa nel punto T del contatto, egli è chiaro, che tuttavia sussistono le cose finora ritrovate, e la sottotesa FG è la minima di tutte l'altre rette, che passano pel punto T, e sono intercette fra i lati dell'angolo dato FAG.

Corollario VI. — Se la minima sottotesa FG è data, e in essa il punto T, che la divide in due parti disuguali; allora l'angolo FAG non sarà dato, ed avrà luogo il teorema infrascritto, la dimostrazione di cui dipende dal I corollario.

Teorema. — Data la linea retta FG divisa inegualmente in T, si tagli dalla di lei parte maggiore verso l'estremità G la porzione GO eguale alla parte minore FT, e dal punto O si alzi la perpendicolare indefinita OA, da qualsivoglia punto della quale, v. g. da A si tirino le due linee AF, AG all'estremità della linea data; io dico, che la medesima data linea FG è la minima di quante possono passare pel punto T, e rimanere intercette fra le linee AF, AG prolungate verso F, e verso G.

Soluzione I del problema (fig. 14). — Supposte le cose ritrovate nella preparazione, e una parte delle linee espresse nella fig. 13, dal centro C del dato cerchio si tiri ad uno de' lati dell'angolo dato, v. g. ad AF la normale CP, la CQ parallela all'altro lato AG, e la CR parallele alla tangente minima FG.

Sieno le linee cognite $CP=a, PQ=b, PA=c$, il raggio $CT=r$, e le linee incognite $PR=y$, e $CR=x=\sqrt{y^2+a^2}$.

I triangoli simili RPC, RCM mostrano:

$$RP\ (y)\ .\ PC\ (a) :: RC\ (x)\ .\ MC=\frac{ax}{y};$$

laonde $MT=\frac{ax-ry}{y}$.

A cagione delle due parallele FT, RC si à:

$$TC\ (r)\ .\ RF :: MC\ .\ MR :: PC\ (a)\ .\ CR\ (x),$$

e quindi $RF=\frac{rx}{a}$, ed $AF=AR-RF=\frac{ac+ay-rx}{a}$.

I triangoli simili CPR, MTF, AOF dànno:

$$CP\,(a)\,.\,PR\,(y)\,::\,MT\left(\frac{ax-ry}{y}\right).\,FT=\frac{ax-ry}{a}$$

$$CR\,(x)\,.\,RP\,(y)\,::\,AF\left(\frac{ac+ay-rx}{a}\right).\,FO=\frac{acy+ay^2-rxy}{ax}.$$

In fine i triangoli simili RQC, FAG fanno conoscere:

$$RQ\,(y+b)\,.\,RC\,(x)\,::\,AF\left(\frac{ac+ay-rx}{a}\right).\,FG=\frac{x}{a}\left(\frac{ac+ay-rx}{y+b}\right)$$

onde sostituendo nell'equazione (1) in vece di FG, FO, FT i loro valori analitici, si scopre quest'altra:

$$\frac{x}{a}\left(\frac{ac+ay-rx}{y+b}\right)=\frac{acy+ay^2-rxy}{ax}+\frac{ax-ry}{a}$$

e moltiplicando l'uno, e l'altro membro dell'ultima equazione per $ax\,(y+b)$, ne proviene:

$$x^2\,(ac+ay-rx)=(y+b)\,(acy+ay^2+ax^2-2\,rxy). \tag{2}$$

Pongasi in quest'equazione in vece di x^2 il suo valore y^2+a^2, e fatte le debite operazioni si troverà la seguente:

$$ay^3+2\,aby^2+abcy+a^3b-a^3c=rxy^2+2\,brxy-a^2rx \tag{3}$$

che conduce ad un'equazione del sesto grado, per la costruzione di cui mi varrei dell'iperbola equilatera riferita al primo diametro, che è uguale $2\,a$, alla quale spetta quest'equazione $y^2=x^2-a^2$, facendo le di lei abscisse eguali ad x, e le di lei ordinate eguali ad y; indi colle stesse coordinate descriverei la curva del secondo genere, la di cui natura vien'espressa dall'equazione (3). Egli è visibile, che queste due curve dànno colla loro intersezione uno, o più valori determinati, di x, e di y, tra' quali dovrà scegliersi quello, che somministra la minor tangente, e questa sarà la minima di tutte l'altre, che sottendono l'angolo dato. Il che dovea farsi.

Scolio I (fig. 14). — Se l'angolo dato fosse ottuso, allora il punto Q cadrebbe di là dal punto P per rapporto al vertice A, e la PQ (b) di positiva diverrebbe negativa; di modo che nell'equazione (3) dovrebbero cangiarsi i segni di quei termini, che contengono la lettera b.

Similmente, se il punto P, in cui la normale CP incontra il lato AF, cadesse nel prolungamento di esso di là dal punto A, in tal caso la AP (c) diverrebbe negativa, e si mutarebbero i segni di quei termini, che sono affetti dalla lettera c.

Corollario I (fig. 14). — Immaginando annullato il raggio CT (r) in maniera, che tutto il cerchio si restringa nel centro C l'equazione (3) diverrà la seguente:

$$y^3 + 2by^2 + bcy + a^2b - a^2c = 0. \tag{4}$$

Il punto T del contatto cadrà nel centro C, e la tangente FG diventerà la sottotesa RS, che è la retta RC prolungata, finchè incontri in S il lato AG; e in virtù dell'equazione (4) si troverà la linea RS minima fra tutte l'altre, che passano pel punto dato C, e restano intercette tra i lati dell'angolo dato RAG.

Corollario II (fig. 14, e 15). — E se di più l'angolo RAS è retto, allora la QP (b) si annienta, e dall'equazione (4) risulta $y^3 = a^2c$, cioè $RP = \sqrt[3]{PC^2 \times AP}$; tirando poscia dal punto C la CV parallela al lato AR dell'angolo retto dato RAS, si avrà l'angolo CSV eguale all'angolo RCP, e per conseguenza $RP \,.\, PC :: CV \,.\, VS$, ovvero surrogando in cambio di RP il suo valore $\sqrt[3]{PC^2 \times AP}$, cioè $\sqrt[3]{PC^2 \times CV}$, si vedrà

$$\sqrt[3]{PC^2 \times CV} \,.\, PC :: CV \,.\, VS;$$

adunque $VS = \dfrac{PC \times CV}{\sqrt[3]{PC^2 \times CV}}$, e conseguentemente $VS = \sqrt[3]{PC \times CV^2}$.

Corollario III (fig. 15). — Da ciò proviene il teorema, che segue:

Teorema. — Sia fatto colle due rette date CP, e CV, il rettangolo $PCVA$, i due lati del quale AP, ed AV si prolunghino indefinitamente di là da P, e di là da V per rapporto al punto A; se pel punto C si tirerà la retta RCS, che taglia in R il lato AP, e in S il lato AV, ed è la minima di tutte quelle, che passano nel punto C, e rimangono intercette fra i suddetti lati; io dico, che la porzione VS dell'altro lato AS sarà la seconda delle due medie proporzionali tra le due rette date CP, CV.

Corollario IV (fig. 16). — L'equazione (4) si costruisce semplicissimamente, descrivendo tra i lati dell'angolo dato, come asimptoti una iperbola, che passi pel punto dato C, e tagli in O il cerchio $COAC$ descritto sopra il diametro CA; imperocchè congiungendo i due punti C, ed O con una retta, che tagli i lati suddetti in R, e in S, ne segue per la nota proprietà dell'iperbola, che la porzione RC è uguale alla porzione OS; ma a cagione del cerchio l'angolo AOC è retto; adunque AO è normale sopra la RS, e conseguentemente pel I corollario della preparazione, la RS è la minima di tutte l'altre rette, che passano pel punto dato C, e sottendono l'angolo dato RAS.

Corollario V (fig. 15, e 16). — Se l'angolo dato A è retto, cioè se il parallelogrammo $CVAQ$ è rettangolo, l'iperbola, che passa pel punto dato C è equilatera, e quindi deriva una maniera elegante, e geometrica di trovare le due medie proporzionali, e insieme la costruzione non geometrica dello stesso problema praticata da Filone Bizanzio, che senza valersi dell'iperbola cercò *meccanicamente*, e (come suol dirsi) *tentando*, le due linee eguali RC, OS.

Questa antica verità, che inaspettatamente, e per nuove strade qui si presenta, renderà più grata agli eruditi la mia soluzione.

Soluzione II (fig. 14). — Nella precedente soluzione si è trovato

$$FG=\frac{x}{a}\left(\frac{ac+ay-rx}{y+b}\right);$$

adunque il logaritmo del primo membro di quest'equazione è uguale al logaritmo del secondo membro, e per la nota proprietà de' logaritmi si ottiene: $log.FG=log.x+log.(ac+ay-rx)-log.(y+b)-log.a$, e differenziando, come si fa nell'espressioni logaritmiche, ne viene:

$$\frac{dif.FG}{FG}=\frac{dx}{x}+\frac{ady-rdx}{ac+ay-rx}-\frac{dy}{y+b}.$$

Ma per la condizione del minimo, $dif.FG=0$; adunque annullando il primo membro di quest'equazione, e trasponendo:

$$\frac{dy}{y+b}=\frac{dx}{x}+\frac{ady-rdx}{ac+ay-rx}.$$

Ma essendo $x=\sqrt{y^2+a^2}$, sarà $dx=\frac{ydy}{\sqrt{y^2+a^2}}=\frac{ydy}{x}$; adunque surro-

gando nell'ultima equazione $\frac{ydy}{x}$, in cambio di dx, si à:

$$\frac{dy}{y+b}=\frac{ydy}{x^2}+\frac{axdy-rydy}{acx+ayx-rx^2},$$

e moltiplicando per $\frac{x^2}{dy}$, $\frac{dy}{y+b}=y+\frac{ax^2-rxy}{ac+ay-rx}$, e in fine moltiplicando per $(y+b)(ac+ay-rx)$ ne nasce:

$$x^2(ac+ay-rx)=(y+b)(acy+ay^2+ax^2-2rxy)$$

appunto, come nell'equazione (2) della prima soluzione. Il che dovea ritrovarsi.

Soluzione III (fig. 17, e 18). — Sia FG la minima tangente, che incontri in F, e in G i lati dell'angolo dato FAG, dal centro C del dato cerchio passi pel punto T del contatto la retta CN, che tagli in M, ed in N i due lati suddetti, e sia anch'essa tagliata perpendicolarmente in Z, e obliquamente in E dalla retta AL parallela alla tangente minima, e dalla AE normale sopra la retta CA, che congiunge il centro C al vertice A; tirisi poscia pel medesimo centro C la retta BCD parallela ad AE, che sega in B, e in D i lati dell'angolo dato, e dal punto A scenda sopra la FG la perpendicolare AO, che incontra la BD in V.

Si facciano le linee cognite $BC=m$, $CD=n$, $CA=p$, il raggio $CT=r$, e le linee incognite $CZ=u$, $AZ=z$. In virtù dell'angolo retto CAE, e della perpendicolare AZ, che cade sull'ipotenusa, saranno $CE=AV=\frac{p^2}{u}$, $AE=CV=\frac{pz}{u}$, e $p^2-u^2=z^2$.

Per la similitudine de' triangoli BVA, BCM si avrà:

$$BV\left(m+\frac{pz}{u}\right)\cdot AV\left(\frac{p^2}{u}\right)::BC\,(m)\cdot CM=\frac{mp^2}{mu+pz}$$

adunque

$$MT=MC-TC=\frac{mp^2-mru-prz}{mu+pz},$$

e

$$ZM=CZ-ZM=\frac{mu^2+puz-mp^2}{mu+pz}=\frac{puz-mz^2}{mu+pz}.$$

I triangoli simili MZA, MTF daranno:

$$MZ\left(\frac{puz-mz^2}{mu+pz}\right)\cdot ZA(z)::MT\left(\frac{mp^2-mru-prz}{mu+pz}\right)\cdot TF=\frac{mp^2-mru-prz}{pu-mz}.$$

Si noti, che in avvenire ne' segni ambigui il superiore dee valere per la figura 17, e l'inferiore per la figura 18.

Ora per la simiglianza de' triangoli DVA, DCN sarà:

$$DV\left(n\mp\frac{pr}{u}\right)\cdot AV\left(\frac{p^2}{u}\right)::DC(n)\cdot CN=\frac{np^2}{nu\mp pz},$$

e perciò $NZ=CN-CZ=\frac{np^2-nu^2\pm puz}{nu\mp pz}=\frac{nz^2\pm puz}{nu\mp pz}$, e la similitudine de' triangoli NAZ, AOG farà vedere:

$$NZ\left(\frac{nz^2\pm puz}{nu\mp pz}\right)\cdot ZA(z)::AO(u-r)\cdot OG=\frac{nu^2\mp puz-nru\pm prz}{nz\pm pu}$$

ovvero, il che è lo stesso, $OG=\frac{prz-puz\pm nu^2\mp nru}{pu\pm nz}$.

Ma pel I corollario della preparazione, $FT=OG$; adunque eguagliando i loro valori, ne risulta:

$$\frac{mp^2-mru-prz}{pu-mz}=\frac{prz-puz\pm nu^2\mp nru}{pu\pm nz}. \tag{5}$$

Equazione, che compete ad una curva del secondo genere, siccome l'equazione $u^2+z^2-p^2=0$, la quale nasce dall'angolo retto CZA appartiene al cerchio, che à per suo raggio p, e le di cui abscisse prendono dal centro la loro origine. Descrivendo pertanto colle medesime coordinate u, e z questo cerchio, e la sopraddetta curva, le loro intersezioni daranno la CZ, o la AZ idonea allo scioglimento del problema. Il che dovea farsi.

Corollario I (fig 17, e 18). — Prima, che la CD (n) di positiva, com'essa è nella fig. 17, divenga negativa, come è nella fig. 18, dee diventare infinita, e ciò accade, quando l'angolo CAD è retto; in questo caso debbono considerarsi come nulli tutti i termini di quella frazione, che costituisce il secondo membro dell'equazione (5), ne' quali non ritrovasi la n, di maniera che lo stesso secondo membro diverrà:

$$\frac{\pm nu^2\mp nru}{\pm nz},\ \text{cioè}\ \frac{u^2-ru}{z}.$$

Corollario II. — Riducendo l'equazione (5) ad un'altra, che contenga una sola incognita, si giungerà ad un'equazione di sei dimensioni; ma se il raggio r è nullo, e si cerca la minima sottotesa dell'angolo

dato, che passi pel dato punto C, allora l'equazione (5) diviene la seguente: $\frac{mp^2}{pu-mz}=\frac{\pm nu^2-puz}{pu\pm nz}$ dalla quale trattata a dovere si deduce:

$$\pm mnp^2+(p^2\pm mn)u^2=\frac{(\pm n-m)}{\sqrt{p^2-u^2}}pu^3,$$

e quadrando i membri di quest'ultima equazione, se ne troverà un'altra del sesto grado, ma priva di questi termini, ove l'incognita ascende a dimensioni impari, la quale sarà per conseguenza equivalente ad un'equazione del terzo grado.

Soluzione IV (fig. 9). — Sia FT la tangente, che si cerca; dal centro C del dato cerchio si tiri al punto T del contatto il raggio CT, che prolungato tagli in M, ed in N i dati dell'angolo dato; sopra i quali si calino dello stesso centro le due perpendicolari CP, CX colla CQ parallela al lato AG, e la CV parallela al lato AF.

Sieno le linee cognite $CP=a$, $CX=e$, $PQ=b$, $AQ=CV=f$, $CT=r$, e le incognite $CM=y$, $CN=x$.

I triangoli simili MPC, MTF fanno conoscere

$$MP(\sqrt{y^2-a^2}) \,.\, PC(a) :: MT(y-r) \,.\, FT=a\frac{(y-r)}{\sqrt{y^2-a^2}};$$

adunque si à $\frac{FT^2}{MT}=a^2\frac{(y-r)}{y^2-a^2}$.

I triangoli simili NXC, NTG mostrano:

$$NX(\sqrt{x^2-e^2}) \,.\, CX(e) :: NT(x-r) \,.\, TG=e\frac{(y-r)}{\sqrt{x^2-e^2}};$$

adunque $\frac{TG^2}{NT}=e^2\frac{(x-r)}{x^2-e^2}$.

Ma pel III corollario della preparazione $\frac{TG^2}{NT}=\frac{FT^2}{MT}$; adunque in termini analitici $e^2\frac{(x-r)}{x^2-e^2}=a^2\frac{(y-r)}{y^2-a^2}$, e fatte le necessarie operazioni ne viene:

$$xy^2-\frac{a^2}{e^2}yx^2-ry^2+\frac{a^2}{e^2}rx^2+a^2y-a^2x=0. \tag{6}$$

Di più i triangoli simili QCM, VNC somministrano:

$$CN(x) \,.\, CV(f) :: MC(y) \,.\, MQ=\sqrt{y^2-a^2}-b,$$

e perciò $x\sqrt{y^2-a^2}-xb=fr$, e trasponendo, indi quadrando, e poi di nuovo trasponendo:

(7) $$x^2y^2-f^2x^2-2bfxy-(a^2+b^2)x^2=0.$$

Si noti ora, che essendo simili i triangoli CPQ, CXV, perchè gli angoli in P, e in X sono retti, e gli angoli in Q, e in V uguali a cagione del parallelogrammo $CQAV$, si à

$$CP^2(a^2) . CQ^2(a^2+b^2) :: CX^2(e^2) . CV^2(f^2);$$

laonde $a^2+b^2=\frac{a^2f^2}{e^2}$, e l'equazione (7) può esprimersi così:

(8) $$x^2y^2-f^2y^2-\frac{a^2f^2}{e^2}x^2-2bfxy=0.$$

È chiaro, che l'intersezione delle due curve rappresentate dall'equazioni (6), e (8) darebbe lo scioglimento della questione; tuttavia denotando l'equazione (8) una curva del terzo genere, mancherebbe alla costruzione quella semplicità, che richiedono i geometri. Adunque tenterò di dedurre da questa quarta soluzione altre maniere più semplici di costruire il problema; ma prima accennerò l'uso, che può farsi del II corollario della preparazione per ottenere l'equazione (6).

Altra maniera di pervenire alla quarta soluzione (fig. 19). — Dal vertice A cada sulla tangente FG la normale AO.

Pel I corollario della preparazione $OG^2=FT^2=a^2\frac{(y-r)^2}{y^2-a^2}$.

Pel II corollario della preparazione $AO^2=TM\times TN=(y-r)(x-r)$.

Per la similitudine dei triangoli NXC, AOG ottiensi:

$$NX^2(x^2-e^2) . XC^2(e^2) :: AO^2[(y-r)(x-r)]^2 . OG^2\left[\frac{a^2(y-r)^2}{y^2-a^2}\right],$$

e moltiplicando per $\frac{y^2-a^2}{y-r}$ il secondo antecedente, e il secondo conseguente di quest'analogia, ne proviene quella, che segue:

$$x^2-e^2 . e^2 :: (x-r)(y^2-a^2) . a^2y-a^2r,$$

il prodotto degli estremi della quale eguagliato al prodotto de' mezzi dà l'equazione (6). Nel rimanente si continuerà come sopra si è fatto.

Costruzione del problema derivato dalla quarta soluzione. — Dividasi per x^2 l'equazione (7), e si avrà:

$$y^2-\frac{f^2y^2}{x^2}-\frac{2bfy}{x}-b^2-a^2=0.$$

Facciasi $MQ\left(\frac{fy}{x}\right)=z$, e l'antecedente equazione diverrà:

$$y^2-z^2-2bz-b^2-a^2=0, \tag{9}$$

che appartiene all'iperbola equilatera riferita al secondo diametro, il quale è uguale a $2a$, essendo y l'ordinate, e z l'abscisse. Il valore di $x=\frac{fy}{z}$ sostituito nell'equazione (6) la trasforma dopo fatte le debite operazioni in questa:

$$y^2z-\frac{ryz^2}{f}-\frac{a^2fy^2}{e^2}+\frac{a^2z^2}{f}+\frac{a^2frx}{e^2}-a^2z=0, \tag{10}$$

che conviene ad una curva del secondo genere; adunque l'intersezione di questa con l'iperbola equilatera dell'equazione (9) determinerà il valore della y, e della z, proprio a risolvere il problema. Il che dovea farsi.

Se l'angolo dato FAG è acuto, conforme apparisce nella figura 19, allora la distanza tra il centro dell'iperbola equilatera, ed il punto, in cui l'ordinata sega il secondo diametro di detta iperbola, è uguale a $z+b$; ma se l'angolo dato è ottuso, la medesima distanza è uguale a $z-b$; e perchè in questo caso la b diventa negativa, dee cangiarsi nell'equazione (9) il segno, che precede il termine $2bz$; ove poi l'angolo FAG sia retto, la b si annulla, e svanisce.

In tutti questi tre casi l'apparenza litterale dell'equazione (10) rimane invariata.

Scolio II. — L'equazione (9) può cangiarsi in un'altra, che sia al cerchio, e l'equazione (10) in una, che contenga le medesime coordinate, e sia ad una curva del secondo genere; imperocchè supponendo $y=\frac{a^2}{s}$, e $z=\frac{at-bs}{s}$, questi valori di y, e di z introdotti nelle suddette equazioni faranno, che l'equazione (9) divenga $s^2+t^2-a^2=0$, purchè si operi nel debito modo, e che l'equazione (10) si muti nell'infrascritta:

$$a^2(at-bs)-\frac{r}{f}(at-bs)^2-\frac{a^4fs}{e^2}+\frac{s}{f}(at+bs)^2+a^2\frac{frs^2}{e^2}-s^2(at-bs)=0.$$

Similmente ponendo nell'equazione $y^2=x^2-a^2$, e nell'equazione (2) (che servono amendue per la prima soluzione) $\frac{at}{s}$ in luogo di y, ed $\frac{a^2}{s}$ in cambio di x, e operando col dovuto avvedimento, la prima di dette

equazioni si trasforma in questa $t^2=a^2-s^2$, che è al cerchio, e la seconda diviene: $a^2(acs-a^2t-a^2r)=(at-bs)(cst+at^2-a^3-2art)$, laonde si fa manifesto, che nella prima soluzione ancora può costruirsi il problema mediante l'intersezione del cerchio, e di una linea del secondo genere.

Altra costruzione del problema dedotta dalla quarta soluzione (figure 19, e 20). — Si moltiplichi l'equazione (8) per $\frac{e^2}{x^2y^2}$, e ne risulterà:
$e^2-\frac{e^2f^2}{x^2}-\frac{a^2f^2}{y^2}-2\frac{be^2f}{xy}=0$, facciasi $\frac{ef}{x}=s$, cioè $x=\frac{ef}{s}$, ed $\frac{af}{x}=t$, cioè $y=\frac{af}{t}$, e dall'equazione precedente, dopo averla trasposta, nascerà:

$$s^2+t^2+\frac{2best}{af}-e^2s=0.$$

Ma se la linea VX nella figura 19 si chiama g, la simiglianza dei triangoli CPQ, CXV fa conoscere $CP(a).PQ(b)::CX(e).VX(g)$; adunque $\frac{be}{a}=g$, e l'ultima equazione prende questa forma:

$$s^2+t^2+\frac{2gst}{f}-e^2=0 \tag{11}$$

siccome l'equazione (6) per l'introduzione di $\frac{ef}{s}$ in vece di x, e di $\frac{af}{s}$ in luogo di y si cangia (fatte che sieno le debite operazioni) nella seguente:

$$as^2t-est^2-frs^2+frt^2+ef^2s-aft^2=0. \tag{12}$$

Descrivasi ora (fig. 20) col raggio $CX=e$ il cerchio $APXA$, dal di cui centro C si tiri la secante CV, che formi col raggio CX, e colla tangente XV il triangolo XCV simile, ed eguale al triangolo, che è notato colle stesse lettere nella fig. 19, onde anche nella fig. 20 saranno $XV=g$, e $CV=f$.

Questa medesima retta CV sia la linea dell'abscisse (s), e prolungando in R la tangente XV, l'angolo ottuso CVR sia quello, che fanno l'ascisse colll'ordinate (t); io dico che il cerchio $APXA$ è il luogo dell'equazione (11); imperocchè tirando parallela alla RV l'indeterminata PO, che taglia il cerchio in P, e la linea dell'abscisse in O, e prodotta incontra perpendicolarmente in H il diametro AX, si à

$$CV(f).VX(g)::CO(s).OH=\frac{gs}{f};$$

adunque $PH=PO(t)+\frac{gs}{f}$.

Si à eziandio $CV\,(f)\,.\,CX\,(e) :: CO\,(s)\,.\,CH = \frac{es}{f}$, e per la natura del cerchio si vede $CH^2\left(\frac{e^2s^2}{f^2}\right) + PH^2\left(t^2 + \frac{2\,gst}{f} + \frac{g^2s^2}{f^2}\right) = CX^2\,(e^2)$, cioè trasponendo $\left(\frac{e^2+g^2}{f^2}\right) s^2 + t^2 + \frac{2gs^2}{f} - e^2 = 0$, che per l'appunto è la stessa equazione (11), mentre la frazione litterale $\frac{e^2+g^2}{f^2}$ è uguale all'unità, ovvero $e^2 + g^2 = f^2$, a cagione dell'angolo retto CXV.

Se dunque sulla linea dell'abscisse CV, e coll'ordinate, che facciano colle medesime abscisse un angolo uguale all'angolo CVR, si descriverà la curva del secondo genere, a cui conviene l'equazione (12); egli è evidente, che l'intersezione del cerchio $APXA$ con questa curva somministrerà il valore di s, e di t, e per conseguenza di $x = \frac{ef}{s}$, e di $y = \frac{ef}{t}$ idonea a sciorre il problema. Il che dovea farsi.

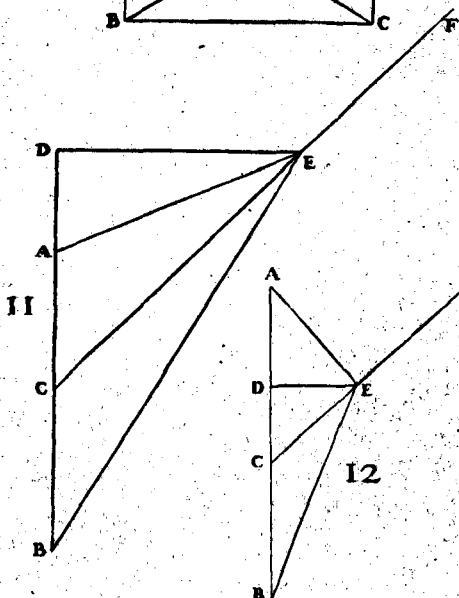
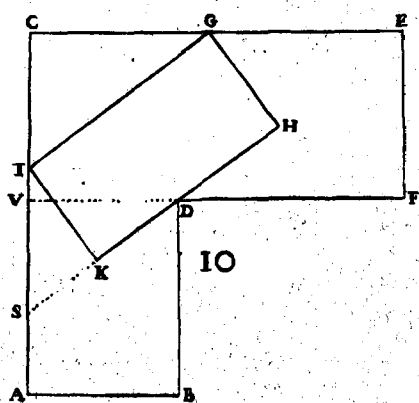
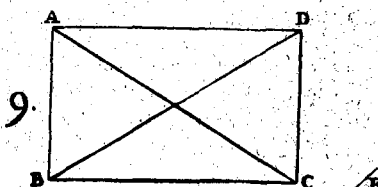
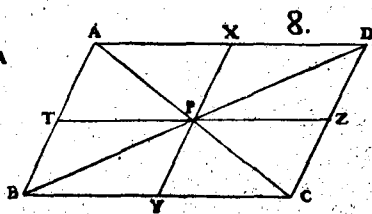
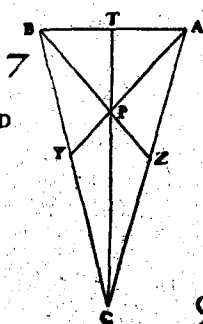
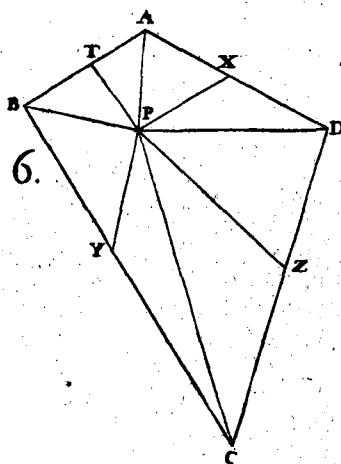
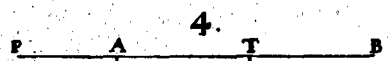
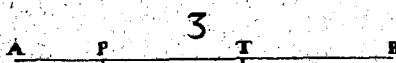
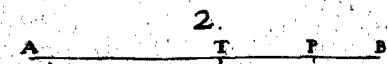
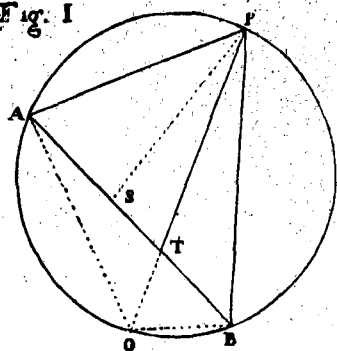
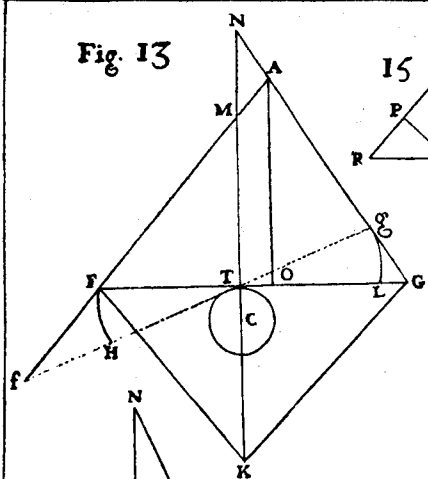
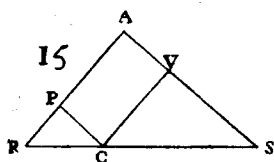
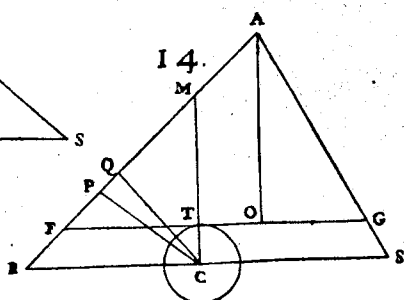
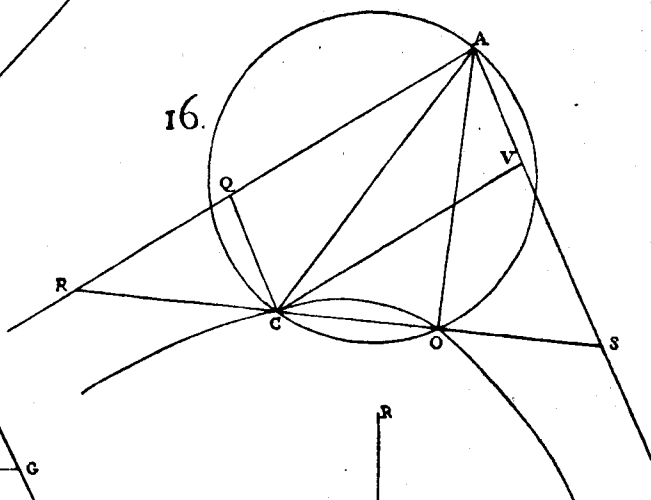
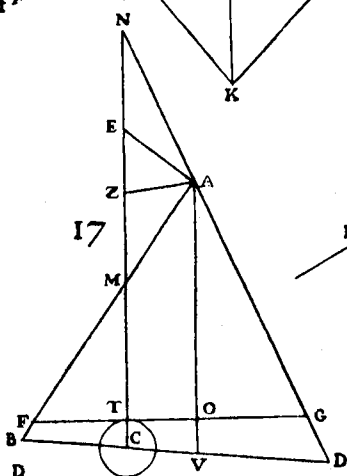
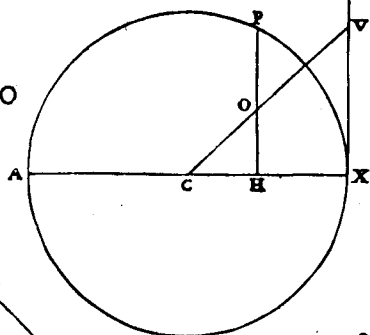
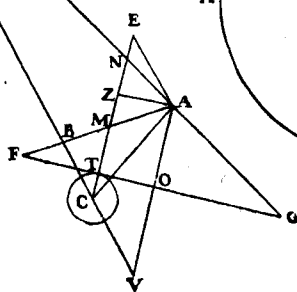
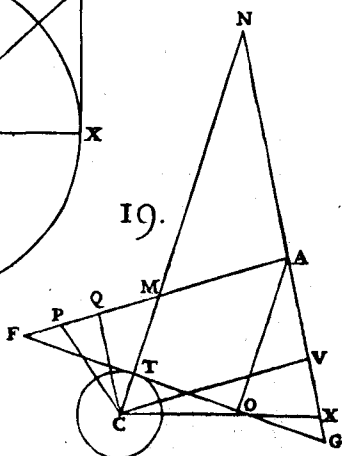
Ove l'angolo dato FAG nella fig. 19 sia ottuso, il punto V dee cadere sotto X, e perciò nella fig. 20 la retta CV taglierà la tangente XR prolungata sotto il diametro AR, la VX (g) diverrà negativa (perlocchè dovrà mutarsi nell'equazione (11) il segno, che affetta il termine $\frac{2\,gst}{f}$) e l'angolo CVR eguale a quello delle coordinate sarà acuto. Ma se l'angolo dato FAG (fig. 19) è retto, il punto V tanto in questa figura, quanto nella fig. 20 coincide col punto X, l'angolo delle coordinate è retto, e nell'equazione (11) svanisce il termine $\frac{2\,gst}{f}$.

In tutti e tre gli accennati casi l'equazione (12) conserva il medesimo aspetto.

Scolio III. — Se il raggio r è nullo, l'equazioni (9), e (10) condurranno ad un'equazione del terzo grado, ove apparirà la sola incognita z; e l'equazioni (11), e (12) maneggiate a dovere faranno ottenere un'equazione del sesto grado, nella quale sarà una sola delle due incognite s, ovvero t, ma quest'equazione equivalerà ad una del terzo grado, poichè in essa non avranno luogo quei termini, che contengono l'incognita elevata a impari dimensioni.

Fine dell'Appendice al Trattato de' triangoli.

Fig. I
2.
3
4.
5
6.
7
8.
9.
10
11
12

Fig. 13
N
A
M
g
F
T
O
L
G
C
H
f
K
15
A
V
P
R
C
S
14.
A
M
Q
P
T
O
G
F
B
C
S
16.
A
V
Q
R
C
O
S
N
E
Z
A
17
M
T
O
F
G
B
C
V
D
R
P
V
20
O
A
C
H
X
D
E
N
18.
Z
A
B
M
F
T
O
C
G
V
N
19.
A
M
Q
P
F
T
V
O
X
C
G

XXI.

RIFLESSIONI IN OCCASIONE DELLA QUADRATURA

DEGLI SPAZJ IPERBOLICI DI QUALUNQUE SPECIE, COLLA DIMOSTRAZIONE DEL CALCOLO INTEGRALE.

Avvertimento. — Io desidero, che il presente scritto sia paragonato con quello del sig. Varignon, inserto nelle memorie dell'accademia reale di Parigi per l'anno 1706, alla pag. 15, e seguenti dell'edizione di Amsterdam.

Teorema. — Sieno le due infrascritte serie di quantità:

(P) $A, B, C, D, E, F\ G, H, I,$ ec.

(Q) $a, b, c, d, e, f, g\ h, i,$ ec.

alle quali competono le seguenti proprietà:

Primo, ambedue le serie costano d'un egual numero di termini, che può esser anche infinito;

Secondo, i termini della serie (P) sono tutti positivi;

Terzo, i termini della serie (Q) possono essere o tutti positivi o tutti negativi, ovvero possono essere prima positivi fino ad un termine, che è zero, e poi negativi, o infine possono essere prima negativi fino ad un termine, che è zero, e poscia positivi;

Quarto, la differenza di due termini prossimi della serie (P) è sempre eguale alla differenza de' due termini prossimi corrispondenti alla serie (Q).

Ciò posto; io dico, che qualunque termine della serie (P) meno qualsivoglia termine della medesima serie, è uguale al termine corrispondente della serie (Q) meno il termine di essa, che corrisponde all'altro termine della serie (P).

Avvertimento. — Quando qualche termine della serie (P), o della serie (Q), o d'ambedue, è *zero*, il medesimo zero si considera come un termine positivo, ovvero come un termine negativo, secondo l'indole particolare delle medesime serie; imperciocchè $+0$, ovvero -0 ànno il medesimo significato.

Dimostrazione. — Per l'ipotesi abbiamo queste equazioni:

$$A-B=a-b$$
$$B-C=b-c$$
$$C-D=c-d$$
$$D-E=d-e$$
$$E-F=e-f, \text{ ec., ec.}$$

Adunque aggiungendo v. g. le due prime equazioni si vede essere $A-C=a-c$.

Aggiungendo la seconda, la terza e la quarta equazione si à

$$B-E=b-e;$$

aggiungendo insieme le cinque prime equazioni, si ottiene $A-F=a-f$, e così, ec. Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I. — Quando i termini della serie (Q) sono tutti positivi.

Se i termini delle due serie (P), e (Q) vanno *decrescendo* dal primo in poi, la differenza di due prossimi termini di esse è *positiva;* ma se i medesimi termini delle due serie vanno *crescendo* dal primo in poi, la detta differenza è *negativa.*

Corollario II. — Quando i termini della serie (Q) sono tutti positivi; e di più, la differenza di due termini prossimi delle serie (*P*), e (Q) è *positiva.*

Se l'ultimo termine della serie (P), v. g. I è zero, e l'ultimo termine della serie (Q) v. g., i non è zero, allora qualunque termine della serie (P) anteriore all'ultimo, è uguale al termine corrispondente della serie (Q) meno l'ultimo termine della stessa serie (Q), v. g.,

$$A=a-i,\ E=e-i.$$

Corollario III. — Quando i termini della serie (Q) sono tutti positivi; e di più la differenza di due termini prossimi delle serie (*P*), e (Q) è *positiva.*

Se gli ultimi termini della serie (P), e (Q) sono ambidue zero, allora qualunque termine della serie (P) anteriore all'ultimo è uguale al termine corrispondente della serie (Q), v. g., $A=a$, $E=e$.

COROLLARIO IV. — Quando i termini delle serie (Q) sono tutti positivi, e di più la differenza di due termini prossimi delle serie (P) e (Q) è *negativa*.

Se il primo termine A della serie (P) è zero, e il primo termine dello serie (Q) non è zero, allora *meno* qualunque termine della serie (P) non è uguale al primo termine della serie (Q) meno quel termine della medesima serie (Q), che corrisponde all'altro della serie (P) v. g., $-E=a-e$, $-I=a-i$.

COROLLARIO V. — Quando i termini della serie (P) sono tutti positivi, e di più la differenza di due termini prossimi delle serie (P), e (Q) è *negativa*:

Se i primi termini delle serie (P), e (Q) sono ambidue zero; allora *meno* qualunque termine posteriore al primo della serie (P) è uguale a *meno* il termine corrispondente della serie (Q), v. g., $-E=-e$, $-I=i$.

COROLLARIO VI. — Quando i termini della serie (Q) sono tutti negativi:

Se i termini della serie (P) vanno *decrescendo* dal primo in poi, e tutti termini della serie (Q) vanno *crescendo* nel *loro essere di negativi*, la differenza di due termini prossimi di esse è *positiva*;

Ma se i termini della serie (P) vanno *crescendo* dal primo in poi, e i termini della serie (Q) vanno *decrescendo* nel *loro essere di negativi*, la detta differenza è *negativa*.

COROLLARIO VII. — Quando i termini della serie (Q) sono tutti negativi, e di più la differenza di due termini prossimi delle serie (P), e (Q) è *positiva*:

Se l'ultimo termine della serie (P), v. g., I è zero, e il primo termine della serie (Q) cioè a non è zero: allora qualunque termine della serie (P) è uguale al termine corrispondente della serie (Q) meno l'ultimo termine della medesima serie (Q), v. g., $E=e-i$, $G=g-i$.

COROLLARIO VIII. — Quando i termini della serie (Q) sono tutti negativi, e di più la differenza di due termini prossimi delle serie (P), e (Q) è positiva.

Se l'ultimo termine della serie (P), v. g., I è zero, e il primo termine della serie (Q) è zero anch'esso; allora il primo termine della serie (P) è uguale a *meno* l'ultimo termine della serie (Q), cioè $A=-i$.

Corollario IX. — Quando i termini della serie (Q) sono tutti negativi, e di più la differenza di due termini prossimi delle serie (P), e (Q) è *negativa*.

Se il primo termine A della serie (P) è zero, e l'ultimo termine, v. g., i della serie (Q) non è zero:

Allora *meno* qualunque termine posteriore al primo termine della serie (P) è uguale al primo termine della serie (Q) meno quel termine della medesima serie (Q), che corrisponde al detto termine della serie (P), v. g., $-E=a-e$, $-G=a-g$.

Corollario X. — Quando i termini della serie (Q) sono tutti negativi, e di più la differenza di due termini prossimi delle serie (P), e (Q) è *negativa*

Se il primo termine A della serie (P) è zero, e l'ultimo termine della serie (Q) è zero anch'esso:

Allora *meno* l'ultimo termine, v. g., I della serie (P) è uguale al primo termine a della serie (Q)

Corollario XI. — Quando i termini della serie (Q) sono positivi sino a zero, indi negativi:

Allora i termini della serie (P) vanno *decrescendo*, e la differenza di due termini prossimi delle serie (P), e (Q) è *positiva.*

Corollario XII. — Nel caso del precedente corollario XI, se l'ultimo termine, v. g., I della serie (P), è zero:

Allora qualunque termine anteriore all'ultimo della serie (P) è uguale al termine corrispondente della serie (Q) meno l'ultimo termine, v. g., i della medesima serie (Q).

Corollario XIII. — Quando i termini della serie (Q) sono negativi sino a zero, indi positivi:

Allora i termini della serie (P) vanno *crescendo,* e la differenza di due termini prossimi delle serie (P), e (Q) è *negativa.*

Corollario XIV. — Nel caso del precedente corollario XIII, se il primo termine A delle serie (P) è zero:

Allora *meno* qualunque termine posteriore al primo della serie (P) è uguale al primo termine delle serie (Q) meno quel termine della medesima serie (Q), che corrisponde al detto termine della serie (P), v. g., $-E=a-e$, $-G=a-g$.

Corollario XV. — In ambidue i casi de' precedenti corollarj XI, e XIII, prendendo nelle serie (P) qualunque termine anteriore a quello, il quale corrisponde in essa al termine della serie (Q), che è zero;

Il medesimo termine anteriore della serie (P) meno il termine, il quale corrisponde in essa al termine della serie (Q), che corrisponde allo stesso termine anteriore della serie (P).

Corollario XVI. — E perciò se nel caso dell'antecedente corollario XIII il primo termine della serie (P) è zero:

Allora *meno* il termine, il quale corrisponde nella serie (P) al termine della serie (Q), ch'è zero, è uguale al primo termine della serie (Q).

Corollario XVII. — In ambidue i casi de' precedenti corollarj XI, e XIII.

Il termine della serie (P), il quale corrisponde in essa al termine della serie (Q), che è zero meno qualunque termine a se posteriore è uguale a *meno* il termine della serie (Q), che corrisponde al detto termine posteriore della serie (P).

Corollario XVIII. — Laonde se nel caso del corollario XI, l'ultimo termine, v. g., *I* della serie (P) è uguale a zero;

Allora, il termine della serie (P), il quale corrisponde in essa al termine della serie (Q), che è zero, è uguale *a meno* l'ultimo termine, v. g., *i* della serie (Q).

Scolio. — I logaritmi d'una quantità variabile, v. g., di x possono servir per esempio della serie (Q) tanto nel caso del corollario XI, quanto nel caso del corollario XIII:

I. Imperciocchè non è oscuro agl'intendenti, che quando la variabile x è maggiore dell'unità a, allora $log.\,x$ rappresenta infiniti termini tutti *positivi*, i quali vanno decrescendo, fintantochè la x è uguale alla unità a.

Che quando $x=a$, allora $log.\,x$ è uguale a zero.

E che quando la x è minore dell'unità a, allora $log.\,x$ rappresenta infiniti termini, che vanno crescendo in *negazione;*

Adunque la serie rappresentata dall'espressione generale $log.\,x$ rappresenta ancora gl'infiniti termini della serie (Q) pel caso del corollario XI; purchè $log.\,x$ denoti prima i logaritmi della x, quando essa è maggiore di a, e poi della x, quando essa è uguale ad a, indi della x, quando essa è minore di a.

II. Sanno ancora gl'intendenti, che in questo medesimo caso la differenza di due termini prossimi di sì fatta serie, rappresentata dalla espressione generale *log.* x, è sempre uguale a $+\frac{a\,dx}{x}$, purchè si chiami dx la differenza delle due x, che è relativa a due termini prossimi della serie;

Imperciocchè se i due termini prossimi non sono posteriori a *log.* a, sottraendo il termine inferiore, che è una quantità positiva, o è zero, dal termine prossimamente superiore, che è positivo, e *maggiore*, la differenza dovrà essere *positiva;*

Ma se i due termini prossimi non sono anteriori a *log.* a, sottraendo il termine inferiore, che è negativo, e *maggiore* dal termine prossimamente superiore, che è una quantità negativa, o è zero, la differenza dovrà essere *positiva.*

III. Quando poi *log.* x significa prima i logaritmi della x, allorchè essa è minore di a, indi il logaritmo della x, allorchè $x=a$, e poi i logaritmi della x, allorchè essa è maggiore di a; in tal caso è chiaro per ciò, che si è spiegato nel primo punto, che la serie denotata dall'espressione generale *log.* x rappresenta gl'infiniti termini della serie (Q) pel caso del corollario XIII.

IV. In questo stesso caso la differenza di due termini prossimi di tal serie è sempre eguale a $-\frac{a\,dx}{x}$.

Imperciocchè se i due termini prossimi non sono posteriori a *log.* a, sottraendo il termine inferiore, che è una quantità negativa, o è zero, dal termine prossimamente superiore, che è negativo, e *maggiore*, la differenza à da essere *negativa.*

Ma se i due termini prossimi non sono anteriori a *log.* a, sottraendo il termine inferiore, che è positivo, e *maggiore*, dal termine prossimamente superiore, che è una quantità positiva, o è zero, la differenza à da essere *negativa.*

V. Dopo queste premesse si rende manifesto, che adattando a agli articoli I, e II di questo scolio l'espressione generale a *log.* x, essa rappresenterà gl'infiniti termini della serie (Q) pel caso del corollario XI; e la differenza di questa serie (Q) sarà sempre rappresentata dall'espressione positiva $+\frac{a^2dx}{x}$.

VI. E che adattando agli articoli III, e IV del presente scolio la espressione generale a *log.* x, essa dinoterà gl'infiniti termini della

serie (Q) relativamente al caso del corollario XIII, e la differenza di questa serie (Q) sarà sempre designata coll'espressione negativa $-\frac{a^2dx}{x}$.

VII. Siccome in questo teorema, e ne' suoi corollarj si contiene la dimostrazione del *Calcolo Integrale;* così ò stimato a proposito di mostrarne l'uso con applicarne alcuni ai quattro esempj seguenti, i quali sono piuttosto semplici, e concernono verità conosciute: indi ne' problemi I, e II passerò alla quadratura degli spazj iperbolici di qualunque specie, e le soluzioni, che, darò de' medesimi due problemi, ne saranno altrettanti esempj.

Esempio I. — *Applicazione del corollario III del teorema alla quadratura della parabola conica* (*fig.* 1). — Per quadrare lo spazio parabolico $ACGA$, si consideri, che concependo diviso l'asse AF della parabola in parti infinitamente piccole, come HG, ed IH, ec. le quali si chiamino generalmente dx, siccome generalmente si chiamino x le abscisse AG, AH, AI, ec.; e immaginando condotte dagl'infiniti punti G, H, I, ec. delle divisioni dell'asse le perpendicolari al medesimo GC, HB, IL, ec. che incontrano la curva in C, B, L, ec., si avrà una serie (P) d'infiniti termini tutti positivi, il primo de' quali sarà lo spazio $AGCA$, il secondo lo spazio $AHBA$, il terzo lo spazio $AILA$, ec., l'ultimo termine poi di questa serie (P) sarà eguale a zero, quando l'abscissa x è nulla.

Dall'altra parte si osservi, che si à un'altra serie (Q) d'infiniti termini tutti positivi, il primo de' quali è $\frac{2}{3}x\sqrt{px}$, allorchè x significa AG, il secondo è similmente $\frac{2}{3}x\sqrt{px}$, allorchè x significa AH, il terzo è pure $\frac{2}{3}x\sqrt{px}$, quando x denota AI, è così sempre, ec.; di modo che l'ultimo termine di questa seconda serie (Q) è zero, allorchè l'abscissa x è nulla, e il numero de' termini della medesima serie (Q) è uguale al numero de' termini della serie (P).

Di più, si sa, che chiamando p il parametro della parabola, la espressione della differenza di due termini prossimi della serie (P), cioè lo spazio infinitamente piccolo $HGCB$, ovvero $IHBL$, ec. è $dx\sqrt{px}$, à misura, che x denota AG, ovvero AH, oppure AI, ec., e che dx denota HG, ovvero IH, ec., cioè a misura, che le abscisse designate per x acquistano l'aumento infinitesimo dx.

Dovendosi riflettere, che la AG (x) rispetto alla AH altra x a sè prossima fa figura di $x+dx$; e che la AH (x) rispetto alla AI altra x a sè prossima fa similmente la figura di $x+dx$, e così, ec.

E si sa ancora, che la differenza de' due termini prossimi della serie (Q) corrispondenti a quelli della serie (P) è uguale a $dx\sqrt{px}$, e che ciò sempre accade.

Adunque pel corollario III del teorema il primo termine della serie (P) è uguale al primo termine della serie (Q), vale a dire lo spazio parabolico $AGCA$ è uguale alla quantità $\frac{2}{3}x\sqrt{px}$, nella quale x rappresenta AG.

Esempio II. — *Applicazione del corollario II dal teorema alla rettificazione della parabola cubica secondaria (fig. 2).* — Concepiscasi l'asse AF della parabola cubica secondaria diviso in parti infinitamente piccole, cioè HG, IG, ec., che si chiamino generalmente dx, mentre l'abiscisse AG, AH, ec. si dicono generalmente x, e tirando per tutti gl'infiniti punti delle divisioni dell'asse le rette GC, HB, IL, ec. perpendicolari allo stesso asse, che taglino la curva in C, B, L, ec., avremo una serie (P) d'infiniti termini tutti positivi, il primo de' quali è l'arco AC, il secondo è l'arco AB, il terzo l'arco AL ec., e l'ultimo termine di questa serie corrispondente all'abscissa, allorchè è nulla, è zero.

È noto, che chiamando p il parametro della curva, la differenza di due archi prossimi di essa, v. g. di AC, e di AB è $\frac{1}{2}dx\frac{\sqrt{4p+9x}}{\sqrt{p}}$.

Considerando ora l'espressione $\frac{1}{27}\frac{(4p+9x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}$, si avrà un'altra serie (Q) costante d'infiniti termini, tutti positivi, il numero de' quali è uguale al numero de' termini della serie (P), purchè x designi generalmente le porzioni AG, ovvero AH, oppure AI, ec. dell'asse AF della parabola cubica secondaria, e dx significhi l'accrescimento infinitamente piccolo dx delle medesime abscisse, cioè significhi HG, IH, ec., e si conoscerà, che quando l'asse suddetto si annulla nel vertice della curva, allora l'ultimo termine della serie (Q) è $\frac{8}{27}p$.

La differenza poi de' termini prossimi della serie (Q) corrispondenti a quelli della serie (P) sarà sempre $\frac{1}{2}dx\frac{\sqrt{4p+9x}}{\sqrt{p}}$, come pure è noto.

Adunque pel corollario II del teorema il primo termine della serie (P) è uguale al primo termine della serie (Q) meno l'ultimo termine di essa, cioè l'arco AC è uguale a $\frac{1}{27} \cdot \frac{(4p+9x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} - \frac{8p}{27}$ intendendo per x la abscissa AC.

Esempio III (fig. 3). — *Applicazione del corollario IX del teorema alla rettificazione dell'arco inverso NL preso ad arbitrio nella cicloide CLNH.* — Chiamisi a l'asse AC di questa cicloide, e dai punti H, N, L, si tirino al medesimo asse le perpendicolari HA, NM, LB; la porzione MC dell'asse terminata nel vertice C della curva s'immagini divisa in parti infinitamente piccole, come sarebbero bB, ed Mm, e queste menome parti di MC si appellino dx, nel tempo stesso, che le parti corrispondenti bC, BC, MC, mC, ec. dell'asse AC si dicono x; dai punti b, m, ec., si concepiscano elevate delle perpendicolari, le quali incontrino la curva ne' punti l, n, ec.

È visibile, che tutto ciò somministra una serie d'infiniti termini tutti positivi, i quali vanno sempre crescendo: il primo di questi termini è zero, il secondo è l'arco infinitesimo Nn, ec., il penultimo è l'arco Nl, e l'ultimo è l'arco NL.

Non s'ignora da' geometri, che la differenza, la quale è *negativa*, di due termini prossimi di questa serie (P), v. g. l'arco infinitesimo Ll, ovvero nN, ec. si esprime nel seguente modo $-\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$.

Si à in oltre una seconda serie (Q) di egual numero di termini tutti negativi, e questa è compresa nell'espressione generale $-2\sqrt{ax}$, allorchè x denota MC, mC, ec., bC, BC. I termini di questa serie (Q) vanno sempre *decrescendo* nel loro essere *di negativi*, in maniera che il primo di essi è $-2\sqrt{a, MC}$, il secondo è $-2\sqrt{a, mC}$, ec., il penultimo è $-2\sqrt{a, bC}$, e l'ultimo è $-2\sqrt{a, BC}$.

La differenza di due termini prossimi della medesima serie (Q) è l'espressione *negativa* $-\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$.

Adunque pel corollario IX del teorema *meno* l'ultimo termine della serie (P) è uguale al primo termine della serie (Q) meno l'ultimo termine di essa, cioè $-arc. NL = -2\sqrt{a, MC} + 2\sqrt{a, BC}$ e trasponendo

$$arc. NL = 2\sqrt{a, MC} - 2\sqrt{a, BC}.$$

Corollarj. — I. Se il punto N della curva cade in H, in tal caso MC diviene AC, e si à l'arco inverso $HL = 2\sqrt{a^2} - 2\sqrt{a, BC}$, vale a dire eguale a $2a - \sqrt{a, BC}$.

II. Se rimane il punto M nel suo pristino sito, e il punto L cade in C, allora BC è zero, e si à l'arco inverso $NC = 2\sqrt{a, MC}$.

III. Se N cade in H, ed L in C, l'arco intiero inverso HC della cicloide è uguale a $2a$.

Scolio. — Questi due ultimi corollarj potrebbero dedursi immediatamente dal corollario X del teorema, ed esserne due esempj.

Esempio IV (fig. 3). — *Altra applicazione del corollario IX del teorema alla maniera di rappresentare in linee i tempi delle cadute di un grave dagli archi inversi della cicloide, principiando dalla quiete.* — Se debbono rappresentarsi in linee i tempi della caduta d'un grave da qualunque arco NL della cicloide $CLNH$ principiando dalla quiete in N (intendo per *qualunque arco* NL una porzione della cicloide, i di cui punti estremi N, ed R sieno presi ad arbitrio della medesima cicloide):

I. Riflettasi primieramente, che si à una serie (P) di linee rappresentatrici di tempi, i termini della quale, che sono infiniti di numero e tutti positivi, vanno sempre crescendo.

Il primo termine di essa serie (P), che si riferisce al punto N della curva, è zero; il secondo termine è la linea rappresentante il tempo della caduta per l'arco infinitesimo nN, ec.; il penultimo termine è la linea rappresentante il tempo della caduta per l'arco Nl, e l'ultimo termine è la linea rappresentante il tempo della caduta per tutto l'arco LN. Tutti questi tempi principiano dalla quiete in N.

II. Secondariamente riflettasi, che la differenza di due termini prossimi di questa serie (P) è la linea rappresentante il tempo infinitamente piccolo, che il grave impiega in cadere per gli archi infinitesimi Nn, ec., ed lL della cicloide; in virtù dell'infinita piccolezza, del qual tempo si può comodamente immaginare, che gli archetti medesimi Nn, ec., ed lL sieno percorsi con moto uniforme, e con velocità tali, ch'esse sieno rappresentate dalle porzioni Mm, ec., ed MB della linea MC, e ciò coerentemente alla dottrina del moto de' gravi, che da me si suppone abbastanza nota a chi legge.

III. Quindi riflettasi in terzo luogo, che i menomi tempi per Nn, ec., e per lL sono proporzionali a queste respettive espressioni $\frac{Nn}{\sqrt{Mm}}$ ec., ed $\frac{lL}{\sqrt{MB}}$, ovvero alle seguenti respettive menome linee $\frac{Nn\sqrt{2e}}{\sqrt{Mm}}$ ec., ed $\frac{lL\sqrt{2e}}{\sqrt{MB}}$. Dovendosi avvertire, che in luogo di $\sqrt{2e}$ potea porsi qualunque linea costante sotto il segno radicale.

Ma si sa, che denotando generalmente colla lettera x l'abscisse CB, Cb, CM, ec., e chiamando $2e$ l'asse AC della cicloide, l'espressione generale de' suoi menomi archi inversi, come Nn, ec., ed lL è $-\frac{dx\sqrt{2e}}{\sqrt{x}}$; ed è chiaro, che nominando $2q$ la MC, le rette Mm, ec., ed MB generalmente si designano con $2q-x$;

Adunque le linee rappresentanti i menomi tempi per Mm, ec., e per lL generalmente si dinotano con quest'espressione $-\frac{dx\sqrt{2e}\sqrt{2e}}{\sqrt{x}\sqrt{2q-x}}$, che equivale a quest'altra $-\frac{2e}{q}\times\frac{qdx}{\sqrt{2qx-x^2}}$, la quale, per quanto si è spiegato di sopra nel secondo punto, è la differenza di due termini prossimi della serie (P).

IV. I periti del calcolo differenziale ben conoscono, che immaginando descritto col raggio MK (q), metà di MC, il semicerchio MsC, gli archi infinitesimi Rr, ec., ed sM di questo semicerchio corrispondenti all'abscisse CB, Cb ec., Cm, CM, cioè alle x, e correlativi agli archi infinitesimi Ll, ec., ed nN si dinotano con questa espressione positiva $\frac{qdx}{\sqrt{2qx-x^2}}$.

V. Vale a dire, la differenza di due archi prossimi di questo semicerchio CsM presi *positivamente*, e tali, che il minore si detragga dal maggiore, come sarebbe la differenza dell'arco *positivo* CR detratto dall'arco *positivo* Cr, ec., e dell'arco *positivo* Cs detratto dall'arco intiero CM, questa differenza, dico, è $+\frac{qdx}{\sqrt{2qx-x^2}}$.

Di modo che la differenza di due archi prossimi di questo semicerchio CsM presi *negativamente*, e tali che il minore degli archi *negativi* si detragga dal maggiore, come sarebbe la differenza di — *arc.* CR

detratto da — *arc. Cr,* ec., e di *arc. Cs* detratto da — *arco intero CM*, questa differenza, dico, è $-\frac{qdx}{\sqrt{2qx-x^2}}$.

VI. E perciò si presenta ora un'altra serie (Q) di termini tutti *negativi*, i quali vanno *decrescendo* nella loro *negazione*, e sono tanti di numero, quanti i termini della predetta serie (P).

Il primo termine di questa serie (Q) è — *arco intiero CsM* $\times \frac{2e}{q}$;

Il secondo termine è — *arco Cr* $\times \frac{2e}{q}$ ec.;

Il penultimo termine è — *arco Cr* $\times \frac{2e}{q}$;

E l'ultimo termine è — *arco CR* $\times \frac{2e}{q}$.

VII. La differenza poi di due termini prossimi della medesima serie (Q) è l'espressione $-\frac{2e}{q}\times\frac{qdx}{\sqrt{2qx-x^2}}$, che in vigore di quanto si è mostrato nel terzo punto è anche la differenza di due termini prossimi della serie (P).

Adunque pel corollario IX del teorema — linea rappresentante il tempo per NL è uguale a — circonferenza $CsM \times \frac{2e}{q} + arc.\, CR \times \frac{2e}{q}$, cioè — linea rappresentante il tempo per NL è uguale a — $arc.\, MR \times \frac{2e}{q}$, e trasponendo, la linea rappresentante il tempo per NL è uguale a

$$\frac{2e}{q} \times arc.\, MR.$$

Corollario I (fig. 3). — L'ultima equazione equivale a questa:

(1) la linea rappresentante il tempo $NL = 2e \times \frac{arc.\, MR}{MK}$.

Ma la frazione $\frac{arc.\, MR}{MK}$ esprimendo l'angolo MKR, e la quantità $2e$ essendo costante, ne segue, che due porzioni di una medesima cicloide saranno *isocrone*, cioè si percorreranno da un grave in tempi eguali, allorchè saranno eguali gli angoli, che corrispondono a dette porzioni cicloidali, come nella fig. 3 l'angolo MKR corrisponde alla porzione cicloidale NL.

Imperciocchè allora la linea rappresentante il tempo della caduta per una di dette porzioni cicloidali sarà alla linea rappresentante il tempo della caduta per l'altra porzione di cicloide, come un angolo ad un angolo eguale.

Corollario II (fig. 3). — Se si considera l'arco cicloidale NC, il di cui punto estremo N è arbitrario, ed il punto L coincide coll'origine della cicloide in C, allora il punto R del semicerchio coincide anch'esso col punto C, e l'equazione (1) si cangia in quest'altra:

(2) la linea rappresentante il tempo per $NC = 2e \times \frac{ar.\, MsC}{MK}$.

Qui la frazione $\frac{arc.\, MsC}{MK}$ esprime due angoli retti.

Corollario III (fig. 3). — Ma se si considera l'arco intiero HC, il punto N coincide col punto H ultimo della cicloide, il punto L col punto C, il semicerchio MsC diventa il semicerchio generatore ASC, il di cui raggio è AO; e l'equazione (2) somministra questa:

(3) la linea rappresentante il tempo per $HC = 2e \times \frac{arc.\, ASC}{AO}$.

Qui la frazione $\frac{arc.\, ASC}{AO}$ esprime parimenti due angoli retti.

Corollario IV (fig. 3). — Confrontando le due equazioni (3), e (2) distintamente si vede, che la linea rappresentante il tempo della caduta per tutto l'arco HC sta alla linea rappresentante il tempo della caduta per qualunque arco NC della stessa cicloide, come due angoli retti stanno a due angoli retti, ed essendo perciò la prima di esse linee eguale alla seconda, anche il primo di essi tempi è uguale al secondo, purchè ambedue le cadute comincino dalla quiete, la prima nell'estremo punto H della cicloide, e la seconda nel punto arbitrario N della medesima cicloide.

La stessa verità si deduce dall'ispezione dell'equazioni (3), e (2), e dal riflettere, che la frazione $\frac{arc.\, ASC}{AO}$ è uguale alla frazione $\frac{arc.\, MsC}{MK}$; perchè il semicerchio ASC verso il suo raggio AO à la medesima proporzione, che il semicerchio MsC verso il proprio raggio MK.

Scolio. — I precedenti corollarj II, e III potrebbero tirarsi con

illazione immediata dal corollario X del teorema, e servire per esempj di quello.

Problema I (fig. 4). — La curva $FYTE$ sia un'iperbola tra gli asimptoti AO, AI, che fanno l'angolo retto OAI. Sull'asimptoto AI, che si concepisca prolungato all'infinito, si prendano le abscisse x, v. g., AB e normali alle abscisse sieno l'ordinate y, v. g., BT. Sia in oltre $y = \frac{a^{m+1}}{x^m}$ (la lettera m rappresenta qualunque numero razionale positivo intiero, o rotto ad arbitrio, ed a denota una quantità costante):

Deve assegnarsi la quadratura dello spazio $BTYH$ compreso dalla porzione YT della medesima curva, dall'ordinate BT, ed HY prese ad arbitrio, e dalla porzione BH dell'asimptoto AI.

Si avverta, che nella fig. 4 i punti O, ed I debbono immaginarsi come le estremità di due rispettivi asimptoti AO, AI, ed i punti F, ed E come le estremità dell'iperbola: che da questi medesimi punti F, ed E debbono concepirsi calate sopra i suddetti asimptoti le normali FO, ed EI: e che le distanze FO, ed EI dai due estremi punti della curva agli asimptoti si concepiscono come quantità infinitesime del prim'ordine.

Prima soluzione. — Si tiri l'ordinata bt infinitamente vicina all'ordinata BT, chiamisi dx la porzione Bb infinitamente piccola dell'asse; e il trapezo $TBtb$, cioè $y\,dx = \frac{a^{m+1}dx}{x^m}$ sarà la differenza de' due spazj iperbolici, $ABTFO$, $AbtFO$.

S'immagini la porzione AB dell'asse tutta divisa in parti infinitamente piccole, che si chiamino parimente dx, e si conoscerà, darsi una serie (P) di spazj iperbolici, come $ABTFO$, $AbtFO$, ec. costante d'un numero infinito di termini tutti positivi e tale, che la differenza di due termini prossimi di essa, v. g., de' due spazi $ABTFO$, $AbtFO$ sarà sempre rappresentata dall' espressione *positiva* $\frac{a^{m+1}dx}{x^m}$; il penultimo termine di detta serie sarà lo spazio $AdfFO$ corrispondente all'abscissa infinitesima Ad, e all'ordinata infinita df prossima all'ultima ordinata DF; e l'ultimo termine sarà il rettangolo $ADFO$, che à per sua altezza l'ordinata infinita DF, e per sua base l'abscissa AD infinitamente piccola del prim'ordine.

Si osservi ora, che l'espressione $\frac{-a^{m+1}}{(m-1)x^{m-1}}$ rappresenta una serie (Q) d'infiniti termini tutti negativi, a misura che la x esprime l'abscissa varia-

bile AB della curva $EYTE$, e che il primo termine di questa serie è $\frac{-a^{m+1}}{(m-1)AB^{m-1}}$, ed uno de' termini susseguenti è $\frac{-a^{m+1}}{(m-1)AH^{m-1}}$.

Si osservi in oltre, che la differenza di due termini prossimi della stessa serie (Q) è $\frac{a^{m-1}dx}{x^m}$, e che tanti sono i termini della serie (Q) tra $\frac{-a^{m+1}}{(m-1)AB^{m-1}}$, e $\frac{-a^{m+1}}{(m-1)AH^{m-1}}$ quanti i termini della serie (P) tra lo spazio iperbolico $ABTFO$, e l'altro spazio iperbolico $AHYFO$.

Si osservi in fine, che il penultimo termine della serie (Q) è

$$\frac{-a^{m+1}}{(m-1)Ad^{m-1}},$$

e l'ultimo suo termine è $\frac{-a^{m+1}}{(m-1)AD^{m+1}}$; e che tanti sono i termini di tutta la serie (Q), quanti i termini di tutta la serie (P) di spazj iperbolici, compresovi il rettangolo $ADFO$, che fa l'ultimo termine della serie (P).

Dopo queste premesse mostra il teorema, che lo spazio iperbolico $ABTFO - AHYFC$ è uguale $\frac{-a^{m+1}}{(m-1)AB^{m+1}} + \frac{a^{m+1}}{(m-1)AH^{m-1}}$ cioè lo spazio iperbolico $BTYH$ è uguale $\frac{a^{m+1}}{(m-1)AH^{m-1}} \; \frac{-a^{m+1}}{(m-1)AB^{m-1}}$. Il che dovea ritrovarsi.

COROLLARIO I. — Se l'esponente m indica un numero rotto minore dell'unità, allora i termini della serie (Q), benchè appajano negativi, sono veramente positivi, e si à

$$Spaz.\ BTYH = \frac{a^{m+1}AB^{1-m}}{1-m} - \frac{a^{m+1}AH^{1-m}}{1-m}.$$

COROLLARIO II. — Supposto il corollario primo precedente, se il punto H cade in D sarà lo spazio iperbolico

$$DBTF = \frac{a^{m+1}AB^{1-m}}{1-m} - \frac{a^{m+1}AD^{1-m}}{1-m}$$

cioè $DBTF = \frac{a^{m+1}AB^{1-m}}{1-m}$, a cagione dell'infinita picciolezza di

$$\frac{a^{m+1}AD^{1-m}}{1-m}.$$

Corollario III. — E supposto il corollario secondo precedente, se il punto B cade in I ultimo dell'asimptoto AI, sarà lo spazio iperbolico $DIEF = \frac{a^{m+1} AI^{1-m}}{1-m}$, e per conseguenza infinito.

Corollario IV. — Nell'iperbola conica equilatera m esprime l'unità, adunque in questo caso lo spazio iperbolico $BTYH = \frac{a^2}{0 . AH^0} - \frac{a^2}{0 . AB^0}$; il che niente fa conoscere.

Corollario V. — Allorchè la m denota un numero intiero, o rotto maggiore dell'unità.

Se il punto B cade in I ultimo dell'asimptoto AI, lo spazio iperbolico infinitamente lungo $AYEY$ sarà eguale ad

$$\frac{a^{m+1}}{(m-1)AH^{m-1}} - \frac{a^{m+1}}{(m-1)\,AI^{m-1}},$$

vale a dire sarà eguale semplicemente ad $\frac{a^{m+1}}{(m-1)\,AH^{m-1}}$, perchè la quantità infinitamente piccola $-\frac{a^{m+1}}{(m-1)\,AI^{m-1}}$ si neglige.

Corollario VI. — Nell'ipotesi del corollario V se il punto H cade in D infinitamente vicino ad A, lo spazio iperbolico $DBTF$ sarà eguale ad $\frac{a^{m+1}}{(m-1)AD^{m-1}} - \frac{a^{m-1}}{(m-1)AB^{m-1}}$ di modo che aggiungendo allo spazio $DBTF$ il rettangolo $ADFO$, eguale ad $AD \times DF$, cioè ad $\frac{a^{m+1}}{AD^{m-1}}$ (in virtù dell'equazione $y = \frac{a^{m+1}}{x^m}$ della curva) lo spazio iperbolico $ABTFO$ è uguale ad $\frac{a^{m+1}}{AD^{m-1}} + \frac{a^{m+1}}{(m-1)AD^{m-1}} - \frac{a^{m+1}}{(m-1)AB^{m-1}}$ cioè ad

$$\frac{ma^{m+1}}{(m-1)AD^{m-1}} - \frac{a^{m+1}}{(m-1)AB^{m-1}},$$

oppure semplicemente ad $\frac{ma^{m+1}}{(m-1)AD^{m-1}}$ essendo questa quantità infinitamente maggiore di $\frac{a^{m+1}}{(m-1)AB^{m-1}}$.

Corollario VII. — Sussistendo la supposizione del corollario VI, se il punto B cade in I ultimo dell'asimptoto, l'intiero spazio iperbolico asimptotico $AIEFO$ sarà eguale ad $\frac{ma^{m+1}}{(m-1)AD^{m-1}} - \frac{a^{m+1}}{(m-1)AI^{m-1}}$, ovvero semplicemente ad $\frac{ma^{m+1}}{(m-1)AD^{m-1}}$.

Corollario VIII. — L'infrascritta equazione

$$y = \frac{a^{m+1}}{x^m} \tag{4}$$

si cangia in quest'altra $y^{\frac{1}{m}} = \frac{a^{1+\frac{1}{m}}}{x}$ cioè nella seguente

$$x = \frac{a^{\frac{1}{m}+1}}{y^{\frac{1}{m}}}. \tag{5}$$

Di maniera che ponendo sull'altro asimptoto AO le y (v. g. AX) *come abscisse*, e immaginando le x (v. g. XY) perpendicolari ad AO, *come ordinate*, la medesima iperbola della figura 4 à per sua equazione costitutiva tanto l'equazione (4), quanto l'equazione (5).

Ciò posto; se l'esponente m è maggiore dell'unità, ne segue, che l'esponente $\frac{1}{m}$ è minore dell'unità; e quindi la medesima iperbola (fig. 4) considerata secondo l'equazione (5) in modo, che le di lei *abscisse* y si prendano sull'asimptoto AO, e le *sue ordinate* x sieno parallele all'asimptoto AI, à i suoi spazj della parte di AI quadrabili per mezzo de' corollarj I, II e III precedenti.

Corollario IX. — I. L'espressione dell'intero spazio iperbolico asimptotico trovata nel corollario VII antecedente rappresenta quantità *infinite di diversi ordini* secondo la diversa significazione dell'esponente $m-1$.

II. Il simile dee dirsi in ordine a quegli spazj iperbolici infiniti considerati nel precedente corollario VI.

Scolio. — È osservabile nelle iperbole (l'equazione generale, delle quali, come si è detto, è $y = \frac{a^{m+1}}{x^m}$) che quando l'abscissa x è infinitamente piccola, allora l'ordinata y è una quantità infinita dell'ordine m, e la diffe-

renza, o sia *decremento* di due prossime y (ordinate infinite, ec.) corrispondenti a due abscisse x infinitesime, vale a dire la differenza $-dy$ è una quantità infinita dell'ordine $m-1$, allorchè l'esponente m è maggiore dell'unità; ella è una quantità finita, allorchè m è eguale all'unità (come accade nell'iperbola conica equilatera) ed è una quantità infinitamente piccola dell'ordine $1-m$, allorchè m è minore dell'unità.

Imperciocchè differenziando l'equazione $y=\frac{a^{m+1}}{x^m}$, ne viene

$$-dy=\frac{ma^{m+1}dx}{x^{m+1}}.$$

E qui si noti, che per essere l'abscissa x infinitamente piccola del primo ordine (giusta l'ipotesi) la sua differenza esser deve una quantità infinitesima del second'ordine, affinchè secondo le leggi del calcolo differenziale possa aversi la suddetta espressione di $-dy$.

Ora non ignorano i conoscitori, che in tal caso la dx equivale ad x^2 (infinitesimo del second'ordine) diviso per la quantità finita b (qualunque ella siasi). Adunque sostituendo nell'espressione di $-dy$ in luogo di dx il suo equivalente $\frac{x^2}{b}$, si vede essere $-dy=\frac{ma^{m+1}x^2}{bx^{m+1}}$, cioè $-dy=\frac{ma^{m+1}}{bx^{m-1}}$ equazione, che nel caso di m minore dell'unità si rappresenta più comodamente così

$$(6) \qquad -dy=\frac{ma^{m+1}x^{1-m}}{b}.$$

Dalchè si deduce in virtù di quanto si è provato nel corollario IX antecedente, che se nelle iperbole delineate nella figura 4 si considerano le ordinarie y parallele all'insimptoto AO, espresse coll'equazione $y=\frac{a^{m+1}}{x^m}$ (in cui m è maggiore dell'unità), le stesse ordinate, allorchè corrispondono all'abscisse infinitamente piccole, sono, come si è detto, grandezze infinite dell'ordine m, e le differenze $-dy$ di due prossime di esse ordinate sono (come pur si è detto) quantità infinite dell'ordine $m-1$.

E che se si considerano nelle medesime iperbole le ordinate x parallele all'altro asimptoto AI espresse coll'equazione $x=\frac{a^{\frac{1}{m}+1}}{y^{\frac{1}{m}}}$ (notata nel corollario VIII, che precede) tali ordinate, quando ànno relazione alle abscisse infinitamente piccole, sono quantità infinite dell'ordine $\frac{1}{m}$,

e le differenze $-dx$ di due prossime di esse ordinate sono quantità infinitamente piccole dell'ordine $1-\frac{1}{m}$; mentre ciò, che nell'equazione (6) si chiama $-dy$, x, ed m, qui si appella respettivamente $-dx$, y, ed $\frac{1}{m}$.

Ma se nell'iperbola conica equilatera si considerano le ordinate x parallele all'altro asimptoto AI, esse si esprimono coll'equazione $x=\frac{a^2}{y}$, di modo che simili ordinate, quando si riferiscono alle abscisse infinitamente piccole, sono quantità infinite del primo ordine, e le differenze $-dx$ di due prossime di esse ordinate sono quantità finite; poichè ponendo nell'equazione (6) $-dx$ in luogo di $-dy$, y in cambio di x, e l'unità in vece di m, si avrà $-dx=a^2y^0=a^2$.

Soluzione Seconda. — Si considerino come inversi gli spazj iperbolici, e si avrà una serie (P) di essi spazj, i termini della quale, che saranno tutti positivi, e infiniti di numero, andranno *crescendo:* il primo termine di tal serie sarà zero; il secondo termine sarà lo spazio inverso infinitesimo $BbtT$, ec., il penultimo termine sarà lo spazio $BdfT$, e l'ultimo termine sarà lo spazio $BDFT$.

Si à ancora un'altra serie (Q), di egual numero di termini, che anche essi vanno crescendo, e tutti i termini di essa, che sono positivi, vengono rappresentati coll'espressione $\frac{+a^{m+1}}{(m-1)x^{m-1}}$, in virtù della quale il primo termine della serie (Q) è $\frac{+a^{m+1}}{(m-1)AB^{m-1}}$, il secondo termine è $\frac{+a^{m+1}}{(m-1)Ab^{m-1}}$, il penultimo termine è $\frac{+a^{m+1}}{(m-1)Ad^{m-1}}$, e l'ultimo termine è $\frac{+a^{m+1}}{(m-1)AD^{m-1}}$.

La differenza (che è *negativa*) di due termini prossimi tanto della serie (P), quanto della (Q) è sempre uguale a $\frac{-a^{m+1}dx}{x^m}$.

Uno de' termini intermedj della serie (P) è lo spazio $BHYT$, e il termine, che nella serie (Q) gli corrisponde è $\frac{+a^{m+1}}{(m-1)AH^{m-1}}$.

Adunque pel corollario IV del teorema si à

$$-BHYT=+\frac{a^{m+1}}{m-1)AB^{m-1}}-\frac{a^{m+1}}{(m-1)AH^{m-1}},$$

e trasponendo:

$$(7)\qquad BHYT = +\frac{a^{m+1}}{(m-1)AH^{m-1}} - \frac{a^{m+1}}{(m-1)AB^{m-1}},$$

come appunto si è trovato nella prima soluzione.

Corollario. — Se il punto H cade in D, sarà in virtù dell'equazione (7)

$$BDFT = +\frac{a^{m+1}}{(m-1)AD^{m-1}} - \frac{a^{m+1}}{(m-1)AB^{m-1}},$$

e aggiungendo a questa ultima equazione quest'altra $DAOF = \frac{+a^{m+1}}{AD^{m-1}}$, ne verrà la seguente:

$$BAOFT = \frac{ma^{m+1}}{(m-1)AD^{m-1}} - \frac{a^{m+1}}{(m-1)AB^{m-1}}.$$

Scolio. — Da questa seconda soluzione possono inferirsi tutti i corollarj, che si sono dedotti dalla prima.

Problema Secondo. — Quadrare gli spazj dell'iperbola conica equilatera col mezzo de' logaritmi.

Prima Soluzione (fig. 4). — Nella prima soluzione del problema primo già si è considerata la serie (P) costante d'infiniti termini tutti positivi, il primo de' quali è lo spazio $ABTFO$, il secondo è lo spazio $AbtFO$, ec., il penultimo è lo spazio $AdfFO$, e l'ultima è il rettangolo $ADFO$.

Applicando ciò all'iperbola conica equilatera, si vede, che la differenza de' due termini prossimi della presente serie (P) come sarebbe il trapezo $bBTt$, ec., è l'espressione generale $\frac{a^2dx}{x}$.

Nello scolio annesso al corollario XVIII, del teorema si è mostrato esservi una serie (Q), la quale costa d'infiniti termini, ec., ciascuno de' quali è compreso nell'espressione generale $a\log. x$; e che la differenza di due termini prossimi della serie (Q) è sempre $+\frac{a^2dx}{x}$: essendo questo il caso del corollario XI del teorema.

È poi facile a conoscere, che prendendo per x nell'espressione $a\log. x$ le abscisse della curva, cioè le porzioni del suo asimptoto AI correlative agli spazj iperbolici, che sono i termini della serie (P) è facile, dico, a conoscere, che il numero de' termini della serie (Q) è uguale al numero de' termini della predetta serie (P).

Adunque in virtù del teorema si à lo spazio $ABTFO$ meno lo spazio $AHYFO$ eguale ad a $log.\ AB$ meno a $log.\ AH$, cioè:

(8) $$Spaz.HBTY = a\,(log.AB - log.AH).$$

Il che dovea ritrovarsi.

Scolio (fig. 5, 6, e 7). — Prendendo sull'asimptoto AI l'abscissa AQ eguale all'unità, cioè ad a, e tirando l'ordinata QR:

I. Se (fig. 5) ambidue i punti H, e B cadono tra Q, e l'ultimo punto I, il quale si concepisce come termine dell'asimptoto infinito AI, allora nell'equazione (8) $+log.\ AB$ esprime una quantità positiva, e $-\ log.\ AH$ una quantità negativa.

II. Se (fig. 6) il punto B cade tra Q, ed I, e il punto H tra A, e Q, allora nell'equazione (8) $+log.\ AB$ significa una quantità positiva, e $-\ log.\ AH$ denota anch'esso una quantità positiva, perchè $log.\ AH$ è negativo.

III. Se (fig. 7) ambidue i punti H, e B cadono tra A, e Q, allora nell'equazione (8) $+log.\ AB$ denota una quantità negativa, e $-log.\ AH$ una quantità positiva.

IV. Se (fig. 5) il punto H cade in Q, e il punto B cade tra Q, ed I, allora l'equazione (8) si cangia in quest'altra

$$Spaz.\ QBTR = a\,(log.\ AB - log.\ AQ);$$

e perchè $log.\ AQ = 0$, si à in questo caso, che è un esempio del corollario XV del teorema, si à, dico, $Spaz.\ QBTR = a\ log.\ AB$ e qui $log.\ AB$ è una quantità positiva.

V. E finalmente se (fig. 6) il punto B cade in Q, e il punto H cade tra A, e Q, allora l'equazione (8) diventa

$$Spaz.\ HQRY = a\,(log.\ AQ - log.\ AH),$$

che a cagione di $log.\ AQ = 0$ equivale a quest'altra

$$Spaz.\ HQRY = a\,(-log.\ AH)$$

dove $-log.\ AH$ è una quantità positiva.

Quest'ultimo articolo è un esempio del corollario XVIII del teorema.

Corollario I. — È noto, che $log.\ AB - log.\ AH = log.\ \frac{a \times AB}{AH}$,

adunque ponendo nell'equazione (8) quest'espressione in luogo dell'altra, si avrà:

$$(9) \qquad Spaz.\, HBTY = a\, log.\, \frac{a \times AB}{AH}.$$

Scolio (fig 5, 6, e 7). — Il secondo membro dell'equazione (9) è sempre una quantità positiva:

I. Imperciocchè nel caso degli articoli I, II, e III dello scolio precedente AH è minore di AB, e conseguentemente $\frac{a \times AB}{AH}$ è maggiore dell'unità a.

II. Nel caso dell'articolo IV del suddetto scolio $log.\, \frac{a \times AB}{AH}$ diventa $log.\, AB$, ed AB è maggiore dell'unità a.

III. E nel caso dell'articolo V del medesimo scolio $log.\, \frac{a \times AB}{AH}$ diviene $log.\, \frac{a^2}{AH}$, ed è maggiore dell'unità a, perchè AH è minore di AQ eguale a.

Corollario II (fig. 4). — Quando il punto H cade in D infinitamente vicino ad A, si deduce dall'equazione (9)

$$Spaz.\, DBTF = a\, log.\, \frac{a \times AB}{AD}$$

cosicchè essendo in questo caso $\frac{a \times AB}{AD}$ una quantità infinita, sarà ancora infinito $log.\, \frac{a \times AB}{AD}$, e conseguentemente anche lo spazio $DBTF$.

Corollario III (fig. 4). — Quando il punto B cade in I ultimo dell'asimptoto, l'equazione (9) fa conoscere $Spaz.\, HYEI = a\, log.\, \frac{a \times AI}{AB}$ e perchè in tal caso $\frac{a \times AI}{AB}$ è quantità infinita, sarà parimente infinito $log.\, \frac{a \times AI}{AB}$, e per conseguenza anche lo spazio $HYEI$.

Corollario IV (fig. 4). — Quando il punto H cade in D infinitamente vicino ad A, e il punto B cade in I, l'equazione (9) mostra

Spaz. $DIEF = a \log. \frac{a \times AI}{AD}$ ed essendo in questo caso infinito tanto $\frac{a \times AI}{AD}$, quanto $\log. \frac{a \times AI}{AD}$, è infinito anche lo spazio $DIEF$.

Scolio (fig. 4). — Il rettangolo $ADFO$ è uguale ad $AD \times DF$, ed essendo $DF = \frac{a^2}{AD}$, il rettangolo $ADFO$ è uguale ad $\frac{AD \times a^2}{AD}$, cioè ad a^2.

Corollario V (fig. 4). — In virtù di questo scolio, e de' precedenti corollarj II, e IV, lo spazio iperbolico $ABTO$ è uguale ad

$$a \log. \frac{a \times AB}{AD} + a^2,$$

e l'intiero spazio iperbolico $AIEFO$ è uguale ad $a \log. \frac{a \times AI}{AD} + a^2$.

Sebbene in ambedue queste espressioni la quantità infinita a^2 può trascurarsi come infinitamente minore dell'altre quantità, alle quali è aggiunta.

Corollario VI (fig. 4). — Se si vuole uno spazio iperbolico $HBYT$ eguale ad un logaritmo dato positivo, moltiplicato per a, v. g., eguale $a \log. c$; suppongasi $a \log. c = a \log. \frac{a \times AB}{AH}$ e dividendo per a l'uno e l'altro membro di quest'equazione, e poscia liberandola dalla caratteristica de' logaritmi, ne risulterà $c = \frac{a \times AB}{AH}$; laonde si à questa proporzionalità $a . c :: AH . AB$, ed una delle due abscisse AH, AH è arbitraria.

Seconda soluzione (fig. 4). — Abbiamo una serie (P) di spazj iperbolici, i termini della quale, che sono infiniti di numero, e tutti positivi, vanno *crescendo*, il suo primo termine è zero, il secondo termine è lo spazio $DdfF$, ec., il penultimo termine è lo spazio $DbtF$, e l'ultimo termine è lo spazio $DBTF$.

Abbiamo ancora un'altra serie (Q) di egual numero di termini, ciascuno de' quali si designa generalmente con questa espressione $a \log. x$, e ciò in conseguenza di quanto si è spiegato nello scolio annesso al corollario XVIII del teorema; e quindi il primo termine di questa serie (Q) è $a \log. AD$; il secondo termine è $a \log. Ad$, ec., il penultimo termine è $a \log. Ab$, e l'ultimo termine è $a \log. AB$.

Oltre di ciò uno de' termini intermedj della serie (P) è lo spazio $DHYF$, e il termine, che gli corrisponde nella serie (Q) è $a\ log.\ AH$.

Infine la differenza (la quale è *negativa*) di due termini prossimi, tanto della serie (P) quanto della serie (Q) è sempre eguale a $-\frac{a^2dx}{x}$, e questo è il caso del corollario XIII del teorema.

Adunque si à pel teorema lo spazio $DHYF$ meno lo spazio $DBTF$ eguale ad $a\ log.\ AH - a\ log.\ AB$, cioè

$$-Spaz.\ HBTY = a\ (log.\ AH - log.\ AB)$$

e trasponendo $Spaz.\ HBTY = a\ (log.\ AB - log.\ AH)$ come nella prima soluzione si è trovato.

Scolio. — I. Tutti i corollarj, che dalla prima soluzione di questo problema si sono dedotti, possono dedursi anche da questa seconda soluzione.

II. Una terza soluzione del problema primo potea darsi somigliante alla seconda soluzione del problema secondo, prendendo la serie (P) come si è presa nella seconda soluzione del problema secondo, e rappresentando generalmente la serie (Q) coll'espressione $\frac{+a^{m+1}}{(m-1)X^{m-1}}$, come si è rappresentata nella seconda soluzione del problema primo.

III. E parimente si potea dare una terza soluzione del problema primo, considerando la serie (P) come si è considerata nella seconda soluzione del problema primo, e denotando in generale la serie (Q) coll'espressione $-a\ log.\ x$.

Problema III (fig. 8). — Sia la curva $FNKSV$ l'iperbola conica equilatera tra gli asimptoti AO, AI, e sia dato in essa lo spazio $MPKN$ compreso tra le due ordinate MN, PK.

Trovare lo spazio $RTVS$ eguale ad $\frac{n}{m}$ $MPKN$ (m, ed n esprimono qualsiasi numero intiero positivo).

Soluzione. — Si chiamino AM (b), AP (c), AR (x), AT (z), e pel I corollario del secondo problema si vedrà essere $MPKN = a\ log.\ \frac{ac}{b}$, ed $RTVS = a\ log.\ \frac{az}{x}$; ma per la condizione del problema presente sarà

$a\ log.\frac{az}{x}=\frac{n}{m}a\ log.\frac{ac}{b}$, cioè $m\ log.=n\ log.\frac{ac}{b}$, ovvero per la nota proprietà de' logaritmi $log.\frac{az^m}{x^m}=log.\frac{ac^m}{b^n}$; adunque togliendo la caratteristica de' logaritmi, e poi dividendo per a, si otterrà l'equazione, che segue:

$$\frac{az^m}{x^m}=\frac{c^n}{b^n} \tag{10}$$

ed una delle due abscisse incognite x, ovvero z sarà arbitraria. Il che dovea ritrovarsi.

Corollario I (fig. 8). — Se tanto m, quanto n sono eguali all'unità, cioè se $RTSV$ dev'essere eguale ed $MPKN$, l'equazione (10) allora diviene $\frac{z}{x}=\frac{c}{b}$, e vale in tal caso questa proporzionalità $b\,.\,c::x\,.\,z$.

Corollario II (fig. 9). — Se i punti R, ed S cadono rispettivamente in M, e N, e lo spazio $RTVS$, cioè lo spazio $MTVN$ dev'esser eguale ad $\frac{1}{m}MPKN$; in questo caso nell'equazione (10) si à $n=1$, ed $x=b$, di modo che l'equazione medesima (10) si cangia in questa $\frac{z^m}{b^m}=\frac{c}{b}$, donde nasce $z^m=cb^{m-1}$, e finalmente $AT\,(z)=(cb^{m-1})\frac{1}{m}$.

E quindi è manifesto, che la AT è la prima di tante medie proporzionali tra AM (b), ed AP (c), quante unità comprende il numero $m-1$.

Perciò è chiaro in virtù del corollario precedente, che se si prenderanno sull'asimptoto AI le abscisse eguali all'altre medie proporzionali, che restano tra AM, ed AP, e sono in numero di $m-2$, queste medesime abscisse determineranno tutti gli spazj parziali allo spazio $MTVN$, che dividono lo spazio dato $MPKN$ in tante parti, quante unità contiene il numero m.

Problema IV (fig. 4). — L'equazione dell'iperbola $FYTE$ sia $y=\frac{a^{m+1}}{x^m}$, e l'esponente m sia dato, e maggiore dell'unità; trovare un'altra iperbola costituita tra i medesimi asimptoti normali AO, AI, la quale sia di tal natura, che lo spazio intiero asimptotico della prima iperbola data stia allo spazio intiero asimptotico della seconda iperbola ricercata, come AD sta ad una quantità finita.

AD significa, come sopra, una porzione infinitesima del primo ordine dell'asimptoto AI, e l'esponente r denota qualunque numero razionale positivo, intiero, o rotto, ed anche può denotare un numero razionale negativo, intiero, o rotto, purchè in questo secondo caso $m+r$ sia maggiore dell'unità.

Soluzione. — Lo spazio intiero asimptotico della prima iperbola data, in virtù del corollario VII della prima soluzione del problema primo è $\frac{ma^{m+1}}{(m-1)AD^{m-1}}$; e immaginando, che l'equazione dell'iperbola ricercata sia $y=\frac{a^{u+1}}{x^u}$, lo spazio intiero asimptotico di questa seconda iperbola sarà $\frac{ua^{u+1}}{(u-1)AD^{u-1}}$, pel citato corollario.

Egli è dunque chiaro agl'intendenti, che il primo spazio starà al secondo, come $\frac{AD^{u-1}}{AD^{m-1}}$ ad $\frac{u}{m}\left[\frac{m-1}{u-1}\right]\frac{a^{u+1}}{a^{m+1}}$, cioè come AD^{u-m} ad

$$\frac{u}{m}\left[\frac{m-1}{u-1}\right]a^{u-m},$$

e questo quarto termine della proporzionalità è una quantità finita.

Facciasi ora $AD^{u-m}=AD^r$, e sarà $u-m=r$, cioè:

$$u=m+r \tag{11}$$

come pure:

$$\frac{u}{m}\left[\frac{m-1}{u-1}\right]a^{u-m}=\left[\frac{m+r}{m}\right]\left[\frac{m-1}{m+r-1}\right]a^r. \tag{12}$$

Il che dovea ritrovarsi.

Esempj. — I. Se la natura dell' iperbola data è $y=\frac{a^4}{x^3}$, ed r deve essere eguale a 2; m è uguale a 3, ed u sarà eguale a 5; perlocchè, in virtù dell'equazioni (11), e (12), la natura dell'iperbola quesita sarà $y=\frac{a^6}{x^5}$; e lo spazio intiero asimptotico della prima iperbola starà allo spazio intiero asimptotico della seconda come AD^2 sta a $\frac{5a^2}{6}$, vale a dire come una quantità infinitamente piccola del second'ordine sta ad una quantità finita.

II. Se l'iperbola data à per sua equazione $y = \frac{a^{\frac{13}{3}}}{x^{\frac{10}{3}}}$, e si vuole $r = -2$, allora $m = \frac{10}{3}$, e l'equazione (11) somministra $u = \frac{4}{3}$; quindi l'equazione dell'iperbola ricercata è $y = \frac{a^{\frac{7}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}$, e sostituendo nel secondo membro dell'equazione (12) $\frac{10}{3}$ in cambio di m, e -2 in luogo di r, si vede, che lo spazio intiero asimptotico dell'iperbola data è allo spazio intiero asimptotico dell'iperbola ritrovata come AD^{-2} è a $\frac{14}{5}a^{-2}$, cioè come $\frac{1}{AD^2}$ a $\frac{14}{5a^2}$, vale a dire come una quantità infinita del second'ordine è ad una quantità finita.

III. Se l'iperbola data à quest'equazione $y = \frac{a^3}{x^2}$, e si vuole $r = \frac{1}{2}$; in tal caso $m = 2$, e l'equazioni (11), e (12) fanno scoprire, che l'iperbola cercata à per equazione $y = \frac{a^{\frac{7}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}}$, e che lo spazio intiero asimptotico della prima iperbola sta allo spazio intiero asimptotico della seconda come $AD^{\frac{1}{2}}$ a $\frac{5}{6}a^{\frac{1}{2}}$, cioè come $\sqrt{AD}$, sta a $\frac{5}{6}\sqrt{a}$,

Corollario (fig. 10). — Si taglino in Y le due iperbole FYE, ed fYe costituite tra i comuni asimptoti AO, AI, i quali formano l'angolo retto OAI: una di dette iperbole abbia per sua equazione $y = \frac{a^{m+1}}{x^m}$, e l'equazione dell'altra sia $y = \frac{a^{u+1}}{x^u}$: oltre di ciò abbiano gli esponenti m, ed r i valori ad essi attribuiti nel presente problema, l'esponente u abbia il valore trovato nella soluzione di questo medesimo problema, espresso nell'equazione (11), e sia AD, come sopra, una porzione infinitesima del primo ordine dell'asimptoto AI.

Io dico, che uno degli spazj iperbolici infiniti $AHYFO$, ed $AHYfo$ starà all'altro (cioè quello di essi spazj, che spetta all'iperbola dell'equazione $y = \frac{a^{u+1}}{x^u}$); come AD^r sta alla quantità finita $\frac{u}{m}\left[\frac{m-1}{u-1}\right]a^{u-m}$.

Imperciocchè l'uno de' suddetti spazj sarà equivalente ad

$$\frac{ma^{m+1}}{(m-1)AD^{m-1}},$$

e l'altro equivalerà ad $\frac{ua^{u+1}}{(u-1)AD^{u-1}}$; e questo a cagione dell'*infinità* dei suddetti spazj, e della *finità* degli altri due spazj iperbolici infinitamente distesi $HIEY$, ed $HIeY$, qual *finità* si riconosce dal corollario VII della prima soluzione del problema primo.

Scolio. — Le due iperbole della figura 10 s'intersecano nel punto Y, che termina l'ordinata comune HY, la quale corrisponde all'abscissa parimente comune AH uguale ad a, e la medesima ordinata comune è anch'essa eguale ad a, come agevolmente si vede, ponendo a in luogo di x nelle due equazioni $y=\frac{a^{m+1}}{x^m}$, ed $y=\frac{a^{u+1}}{x^u}$.

XXII.

DELL'INFINITESIMO, E DELL'INFINITO.

Si è stimato a proposito d'inserire in questo luogo un breve scritto concernente la nozione geometrica dell' INFINITESIMO *e dell'* INFINITO, *mandato dall'autore l'anno 1736, al dotto e degno prelato mons. Niccola Antonelli, a richiesta del fu mons. Giovanni Ernesto d'Harrach, che possedeva e favoriva le buone lettere*

I. Chiamo quantità *finite* quelle, onde possono concepirsi i limiti. La voce *finito* è abbastanza nota. Le quantità, che sono oggetti dei nostri sensi, somministrano degli esempj atti a spiegarne il significato.

II. Dico, che la quantità $a^{+1}A$ è un *incomparabilmente* piccolo dell'ordine *primo*, quando la stessa $a^{+1}A$ replicata qualunque dato numero di volte è sempre minore di qualsivoglia quantità A *finita*, ed omogenea.

III. Dico, che la quantità $a^{+2}A$ è un *incomparabilmente* piccolo dell'ordine *secondo*, quando la stessa $a^{+2}A$ replicata qualunque dato numero di volte è sempre minore di qualsivoglia quantità omogenea $a^{+1}A$ *incomparabilmente* piccola dell'ordine *primo*.

IV. E generalmente dico, che la quantità $a^{+m+1}A$ è un *incomparabilmente* piccolo dell'ordine $m+1$, quando la stessa $a^{+m+1}A$ replicata qualunque dato numero di volte è sempre minore di qualsivoglia quantità omogenea $a^{+m}A$ *incomparabilmente* piccola dell'ordine m.

V. La quantità *finita* A si può denotare ancora in questa guisa: $a^{+0}A$, e così sarà compresa nell'espressione generale $a^{+m}A$; perchè m può significar zero.

VI. Dico ora, che la quantità $a^{-1}A$ è un *incomparabilmente* grande dell'ordine *primo*, quando la stessa $a^{-1}A$ è sempre maggiore di qualsivoglia quantità A *finita*, ed omogenea replicata qualunque dato numero di volte.

VII. Dico, che la quantità $a^{-2}A$ è un *incomparabilmente* grande dell'ordine *secondo*, quando la stessa $a^{-2}A$ è sempre maggiore di qualsivoglia quantità omogenea $a^{-1}A$ *incomparabilmente* grande dell'ordine *primo* replicata qualunque dato numero di volte.

VIII. E generalmente dico, che la quantità $a^{-m-1}A$ è un *incomparabilmente* grande dell'ordine $m+1$, quando la stessa $a^{-m-1}A$ replicata qualunque numero di volte è sempre maggiore di qualsivoglia quantità omogenea $a^{-m}A$ *incomparabilmente* grande dell'ordine m replicata qualunque dato numero di volte.

IX. La quantità *finita* A si può esprimere ancora in questo modo, $a^{-0}A$, e così sarà contenuta nell'espressione generale $a^{-m}A$; potendo m denotar zero.

X. Poste le due quantità B, ed A, la prima delle quali B sia *incomparabilmente* grande dell'ordine *primo*, e la seconda A sia *finita*: se si concepisce una progressione geometrica *decrescente*, onde esse quantità siano i due primi termini; il terzo termine sarà una quantità *incomparabilmente* piccola dell'ordine *primo;* il quarto termine sarà una quantità *incomparabilmente* piccola dell'ordine *secondo*, e così sempre, ec.

XI. Poste due quantità b, ed A, la prima delle quali sia *incomparabilmente* piccola dell'ordine *primo:* concependo una progressione geometrica *crescente*, di cui le suddette quantità siano i due primi termini; il terzo termine sarà una quantità *incomparabilmente* grande dell'ordine *primo;* il quarto termine sarà una quantità *incomparabilmente* grande dell'ordine *secondo*, e così sempre, ec.

XII. Ne' soprascritti articoli in luogo della voce *incomparabilmente* si potrà sostituire *infinitamente*, ovvero *indefinitamente*. Quindi $a^{+m}A$ sarà un *infinitesimo* dell'ordine m, ed $a^{-m}A$ sarà un *infinito* dell'ordine m. Io mi valerò in appresso di questi termini.

XIII. Che l'espressione $a^{+1}A$ rappresenti un *infinitesimo* dell'ordine *primo*, e così $a^{+m}A$ un *infinitesimo* dell'ordine m: come pure; che l'espressione $a^{-1}A$ designi un *infinito* dell'ordine *primo*, e così $a^{-m}A$ un *infinito* dell'ordine m; questo è puramente arbitrario.

XIV. I segni suddetti possono chiamarsi *esponenti d'ordini:* io gli ò assunti per la somiglianza, che ànno cogli *esponenti delle potestà;* volendo nel progresso valermene d'una maniera analoga a quella, che coi medesimi *esponenti delle potestà* si pratica.

Dalle seguenti asserzioni non difficili a comprendere, si vedrà, che gli *esponenti d'ordini* sono assai comodi per far conoscere qual sorta di *infinitesimi*, o d'*infiniti* risulti dal moltiplicare, e dividere gl'*infinitesimi* per gl'*infinitesimi*, gl'*infiniti* per gl'*infiniti*, e gli uni per gli altri: come anche dal cambiar similmente quelli, e questi colle quantità *finite*.

XV. Se l'*infinitesimo* $a^{+m}A$ è moltiplicato per l'*infinitesimo* $a^{+n}A$, il prodotto è $a^{+m+n}A^2$: *infinitesimo* dell'ordine $m+n$.

XVI. Se l'*infinito* $a^{-m}A$ è moltiplicato per l'*infinito* $a^{-n}A$, il prodotto è $a^{-m-n}A^2$: *infinito* dell'ordine $m+n$.

XVII. Se l'*infinitesimo* $a^{+m}A$ è moltiplicato per l'*infinito* $a^{-n}A$, il prodotto è $a^{+m-n}A^2$: *infinitesimo* dell'ordine $m-n$, quando m è maggiore di n; *infinito* dell'ordine $n-m$, quando m è minore di n; e quantità *finita* quando m è uguale ad n.

XVIII. Se l'*infinito* $a^{-m}A$ è moltiplicato per l'*infinitesimo* $a^{+n}A$, il prodotto è $a^{-m+n}A^2$: *infinito* dell'ordine $m-n$, quando m è maggiore di n; *infinitesimo* dell'ordine $n-m$, quando m è minore di n; e quantità *finita*, quando m è uguale ad n.

XIX. Se l'*infinitesimo* $a^{+m}A$ è diviso per l'*infinitesimo* $a^{+n}A$, il quoziente è $a^{+m-n}\frac{A}{A}$: *infinitesimo* dell'ordine $m-n$, quando m è maggiore di n; *infinito* dell'ordine $n-m$, quando m è minore di n; e quantità *finita*, quando m è uguale ad n.

XX. Se l'*infinito* $a^{-m}A$ è diviso per l'*infinito* $a^{-n}A$ il quoziente è $a^{-m+n}\frac{A}{A}$: *infinito* dell'ordine $m-n$, quando m è maggiore di n; *infinitesimo* dell'ordine $n-m$, quando n è minore di m; e quantità *finita*, quando m è uguale ad n.

XXI. Se l'*infinitesimo* $a^{+m}A$ è diviso per l'*infinito* $a^{-n}A$, il quoziente è $a^{+m+n}\frac{A}{A}$: *infinitesimo* dell'ordine $m+n$.

XXII. Se l'*infinito* $a^{-m}A$ è diviso per l'*infinitesimo* $a^{+n}A$, il quoziente è $a^{-m-n}\frac{A}{A}$: *infinito* dell'ordine $m+n$.

XXIII. Se negli articoli XV, e XVIII si farà $m=0$: e se poi negli articoli XV, e XVII si farà $n=0$.

Si conoscerà prima, che dal *finito* moltiplicato per l'*infinitesimo* dell'ordine n risulta un *infinitesimo* dello stess'ordine n.

E poi si conoscerà, che dall'*infinitesimo* dell'ordine m moltiplicato pel *finito* risulta un *infinitesimo* dello stess'ordine m.

XXIV. Se negli articoli XVI, e XVII si farà $m=0$: e se poi negli articoli XVI, e XVIII si farà $n=0$.

Si vedrà prima, che dal *finito* moltiplicato per l'*infinito* dell'ordine n nasce un *infinito* dell'ordine medesimo n.

E si vedrà poi, che dall'*infinito* dell'ordine m moltiplicato pel *finito* nasce un *infinito* dell'ordine medesimo m.

XXV. Facendo nell'articolo XIX $n=0$: e poi nell'articolo XXII $m=0$:

Si vede prima, che dall'*infinitesimo* dell'ordine m diviso pel *finito* proviene un *infinitesimo* dello stesso ordine m.

E poi si vede, che dal *finito* diviso per l'*infinitesimo* dell'ordine n proviene un *infinito* dell'ordine n.

XXVI. Facendo nell'articolo XX $n=0$: e poi nell'articolo XXI $m=0$.

Si vede prima, che dall'*infinito* dell'ordine m diviso pel *finito* proviene un *infinito* dello stesso ordine m.

E poi si vede, che dal *finito* diviso per l'*infinito* dell'ordine n proviene un *infinitesimo* dell'ordine n.

XXIII.

PROBLEMA SPETTANTE AL CALCOLO INTEGRALE.

ESTRATTO DALLA SECONDA RISPOSTA AL SIG. NICCOLÒ BERNULLI (*).

Nell'infrascritta equazione (1) le lettere b, c, f, g, n esprimono qualsisia numero intiero, o rotto, positivo, o negativo, ed anche zero, le maggiori X, e P significano quantità date in qualunque modo per x, e costanti finite, e zero ancora, siccome la Y, e Q denotano quantità date in qualsivoglia maniera per y, e costanti, ed anche zero, e la lettera $\&$ rappresenta una quantità composta in qualsivoglia modo di variabili e di costanti. Trovare la supposizione della differenziale costante, che rende Integrabile la medesima equazione (1)

$$(1) \qquad XYdxdy^n : dx^n = Pdx + \frac{bd^2x}{dx} + \frac{cd^2y}{dy} + Qdy + \frac{gd\&}{\&}.$$

Soluzione prima. — Suppongasi $adz:z = Pdx$, ed $fdb:b = Qdy$ (a, ed f significano qualunque numero intiero, o rotto, positivo, o negativo, e zero ancora, allorchè è nullo P, ovvero Q), e le quantità z, e b saranno date almeno trascendentemente, la prima per x, e la seconda per y, mentre integrando si avrà

$$(2) \qquad al.z = s.Pdx + M$$

$$(3) \qquad fl.b = s.Qdy + N$$

($l.$ è la caratteristica de' logaritmi, M, ed N indicano costanti arbitrarie col loro segno). Ciò posto l'equazione (1) sarà cangiata nella seguente

$$(4) \qquad XYdxdy^n : dx^n = \frac{adz}{z} + \frac{bd^2x}{dx} + \frac{cd^2y}{dy} + \frac{fdb}{b} + \frac{gd\&}{\&}.$$

Il valore della majuscola C espresso nell'infrascritta equazione (5) sia la differenziale costante, che si cerca, ove θ denota un esponente arbitrario, t, u, e, i significano esponenti incogniti, e la maggiore A indica una quantità data in qualsisia maniera per x, e costanti, e conseguentemente anche per z:

$$(5) \qquad C = dx^t\, dx^u\, Y^\theta\, b^e\, A\&^i.$$

(*) Supplementi al Giornale de' letterati d'Italia, tom. I, pag. 180. (Cfr. *Scritti polemici* inseriti nel vol. III della presente edizione).

S'immagini ora quest'equazione, ove r è un numero incognito:

$$\frac{dV}{V} = \frac{ardz}{z} + \frac{brd^2x}{dx} + \frac{crd^2y}{dy} + \frac{frdb}{b} + \frac{grd\&}{\&}. \tag{6}$$

Si moltiplichi l'equazione (4) per questa quantità $rz^p\, dx^n\, dy^{-n}\, Y^{-1}\, A^q$, in cui p, e q rappresentano esponenti non conosciuti ancora, e ponendo nella stessa equazione (4) $dV : V$ in luogo del suo valore, essa prenderà quest'aspetto:

$$rXz^p\, A^q\, dx = z^p\, dx^n\, dy^{-n}\, Y^{-1}\, A^q\, dV : V. \tag{7}$$

Ma affinchè il secondo membro di quest'equazione apparisca integrabile, si concepisca:

$$V^k = z^p\, dx^n\, dy^{-n}\, Y^{-1}\, A^q \tag{8}$$

(k è un esponente incognito), e sostituendo V^k in cambio del suo valore nell'equazione (7) si avrà: $rXz^p\, A^q\, dx = V^{k-1}\, dV$, e integrando

$$r\int Xz^p\, A^q\, dx = \frac{1}{k}\, V^k,$$

indi rimettendo in luogo di V^k il suo valore soprannotato si vedrà:

$$r\int Xz^p\, A^q\, dx = \frac{1}{k}\, z^p\, dx^n\, dy^{-n}\, Y^{-1}\, A^q. \tag{9}$$

.Resta ora a scuoprire il valore delle lettere r, k, p, q, che si trovano in quest'equazione Integrale, e delle t, u, e, i che ànno luogo nella costante supposta (5). Per ciò eseguire s'integri l'equazione (6), e si otterrà:

$$l\,.\,V = l\,.\,z^{ar} + l\,.\,dx^{br} + l\,.\,dy^{cr} + l\,.\,b^{fr} + l\,\&^{gr} + sl\,.\,C.$$

Il logaritmo della costante C moltiplicato pel numero incognito s è la quantità costante, che a me piace d'aggiungere a quest'ultima equazione Integrale, da cui rigettando i logaritmi si deduce

$$V = z^{ar}\, dx^{br}\, dy^{cr}\, b^{fr}\, \&^{gr}\, C^s$$

ed elevando l'uno, e l'altro membro di quest'ultima equazione alla dignità K, e ponendo in luogo di C il suo valore, ottiensi

$$V^k = z^{ark}\,.\,dx^{brk+stk}\,.\,dy^{crk+suk}\,.\,b^{frk+sek}\,.\,\&^{grk+isk}\,.\,Y^{\theta sk}\,.\,A^{sk} \tag{10}$$

eguagliando poscia questo valore di V^k all'altro, che vedesi nell'equazione (8), cioè facendo eguali gli esponenti respettivi dell'uno, e dell'altro

si deduce in primo luogo, che gli esponenti di b, e di $\&$ sono nulli, e perciò ritrovasi

(11) $$e = -fr:s,$$

(12) $$i = -gr:s.$$

Si trovano inoltre questi cinque valori di k:

(13) $$k = p:ar,$$

(14) $$k = n:(br + st),$$

(15) $$k = -n:(cr + su),$$

(16) $$k = -1:s\theta,$$

(17) $$k = q:s,$$

Perlocchè dalla comparazione dell'equazioni (16), e (17) si à:

(18) $$q = -1:\theta.$$

Dalla comparazione dell'equazioni (13), e (16):

(19) $$p = -ar:s\theta.$$

Dalla comparazione dell'equazioni (14), e (16):

(20) $$t = (-ns\theta - br):s.$$

Dalla comparazione dell'equazioni (15), e (16):

(21) $$u = (ns\theta - cr):s.$$

E finalmente i valori di e, i, k, q, p, t, u presi dall'equazioni (11), (12), (16), (18), (19), (20), (21), e sostituiti nell'equazione (9), e nella costante (5) sciolgono il problema. *Q. E. I.*

Si noti, che le lettere r, ed s restano indeterminate, ma r non dev'esser nulla, ed s non può concepirsi eguale a zero, fuorchè nel caso, ove l'equazione (1) è Integrabile senza l'assunzione d'alcuna differenziale costante.

SOLUZIONE SECONDA. — Si moltiplichi il primo membro dell'equazione (4) per $\frac{dy}{dy}$, ed essa assumerà questa sembianza:

(22) $$XYdydx^{1-n}:dy^{1-n} = \frac{fdh}{h} + \frac{cd^2y}{dy} + \frac{bd^2x}{dx} + \frac{adz}{z} + \frac{gd\&}{\&}.$$

Indi con un raziocinio similissimo a quello dell'antecedente soluzione, che non è necessario di ripetere, si troverà, che concependo $e = -ar:s$; $i = -gr:s$; $k = -1:s\theta$; $q = -1:\theta$; $p = -fr:s\theta$; $t = (ns\theta - s\theta - cr):s$; $u = (s\theta - ns\theta - br):s$, e facendo costante l'infrascritto valore di G (ove la E rappresenta una quantità data in qualsisia modo per y, e costanti, e conseguentemente anche per h)

(23) $$G = dy^t\, dx^u\, X^\theta\, z^e\, E\&^i.$$

L'Integrale dell'equazione (22), cioè dell'equazione (1) sarà quella, che segue

(24) $$r \int Yh^p\, E^q\, dy = \frac{1}{k} h^p\, dx^{n-1}\, dy^{1-n}\, X^{-1}\, E^q.$$

Corollario I. — Per conoscere in quali casi l'equazione (1) è integrabile senza l'assunzione d'alcuna differenziale costante, facciasi nella costante (5), e nell'equazione (10) la $A = 1$, e le θ, t, u, e, i tutte eguali a zero, e la comparazione della equazione (10) così modificata coll'equazione (8) farà conoscere $Y = h^{-frk}$; $k = n:br = -n:cr = p:ar$, e da questi valori di k si dedurrà $c = -b$; $Y = h^{-fn:h}$; $p = na:b$; di modo che se nella equazione (1) si avrà $Y = h^{-fn:b}$; $c = -b$, e inoltre $g = 0$, l'integrale della stessa equazione si otterrà senza l'assunzione d'alcuna costante, e sarà l'equazione (9), purchè si sostituiscano in luogo di A, p, k i loro valori espressi in questo corollario. La lettera X secondo questo metodo resta nella sua universalità.

Corollario II. — Parimente immaginando nella costante (23) la $E = 1$, e le lettere θ, t, u, e, i tutte eguali a zero, e procedendo con un'analisi simile a quella dell'antecedente corollario, si vedrà, che la equazione (22), e per conseguenza l'equazione (1), che è la medesima, s'integra senza l'assunzione della costante, allorchè si à $X = z^{a(n-1):c}$; $b = -c$, e $g = 0$, e che l'Integrale è l'equazione (24), purchè si faccia $K = (1-n):cr$; $p = f(1-n):c$; $E = 1$. La Y qui ritiene la sua generalità.

Corollario III. — Laonde ogni volta, che nell'equazione (1) si à $X = z^{(n-1):c}$; $Y = h^{-fn:b}$; $b = -c$; $g = 0$, i due corollarj, che precedono, e le equazioni (9), e (24) somministrano due formole per integrare la medesima equazione (1) senza l'assunzione d'alcuna differenziale costante.

Corollario IV. — Se nell'equazione (1) b, c, g, n sono nel medesimo tempo eguali a zero, s'annullino queste medesime lettere nell'equa-

zione (4), suppongasi poscia la costante (5) eguale all'unità, e sarà per conseguenza anche $A=1$; indi si osservi, che in tali supposizioni l'equazione (8) somministra $V^k = z^p\,Y^{-1}$ e l'equazione (10) $V^k = z^{ark}\,h^{frk}$.

Dalla comparazione poi di queste due espressioni di V^k risulta $K=p:ar$; $Y=h^{-frk}=h^{-pf:a}$, e ponendo i valori di K, Y, A, n nell'equazione (9) si ritrova, che (supposte le due equazioni (2), e (3), nelle quali contengonsi almeno trascendentemente i valori di z, e di h) l'equazione seguente: $Xdx:h^{pf:a}=Pdx+Qdy$, à per sua Integrale quest'altra

$$\int Xz^p\,dx = \frac{a}{p}\,z^p h^{pf:a}.$$

Scolio. — Non sarà inutile l'avvertire, che quando Pdx, ovvero Qdy possono risolversi in differenziali di quantità logaritmiche moltiplicate per quantità costanti, il valore di z nell'equazione (2), ovvero di h nella equazione (3) sarà dato per x, ovvero per y, mediante un'equazione algebraica, oppure trascendentale.

Esempio dell'equazione algebraica. — Sia $Qdy=e^3\,dy:(y^3-e^2y)$; il secondo membro di quest'equazione, nella quale e significa una quantità costante, si risolve nelle seguenti differenziali logaritmiche

$$\frac{1}{2}\,e\,dy:(y+e);\ +\frac{1}{2}(\pm e\,dy):(\pm y\mp e);\ -e\,dy:y,$$

di modo che si à

$$\int Qdy = \frac{1}{2}\,l.(y+e)+\frac{1}{2}\,l.(\pm y\mp e)-l.y.$$

Or ponendo questo valore di $\int Qdy$ nell'equazione (3), e facendo in essa $N=l.F$, e poscia togliendo colle note maniere i logaritmi, la stessa equazione (3) in quest'altra si cangia $hf=\frac{eF}{y}(\pm y^2\mp e^2)^{\frac{1}{2}}$, ove F è una quantità costante col suo segno.

Scolio II. — Considerando l'equazioni (1), e (4), come se non avessero alcun rapporto all'equazione (22), si conoscerà, che tanto nelle equazioni suddette (1), e (4), quanto nella costante (5), e nell'Integrale (9) in luogo di $dx^{\pm n}$, e dx^t può sostituirsi rispettivamente $dw^{\pm n}$, e dw^t, purchè in vece di $\frac{d^2x}{dx}$ si surroghi $\frac{d^2w}{dw}$ nell'equazioni (1), e (4). La stessa

riflessione dee valere in ordine a $dy^{\mp n}$, e dy^u, in vece delle quali può surrogarsi $d\Delta^{\mp n}$, $d\Delta^u$, purchè nell'equazioni (1), e (4) in luogo di $\frac{d^2y}{dy}$ pongasi $\frac{d^2\Delta}{d\Delta}$.

ESEMPIO. — Una delle formole, che sciolgono il problema diretto intorno al raggio del cerchio osculatore, senza la supposizione d'alcuna differenziale costante, è questa:

$$\varepsilon = x\,dx\,dw^2 : (a\,dy\,dx\,dw + x dw\,d^2y - x\,dw\,d^2w)$$

ove ε significa il raggio dell'evoluta, dw in quest'esempio indica l'elemento della curva, ed a denota l'unità, in caso che l'applicate x partano da un medesimo punto fisso, ed esprime zero, mentre l'applicate sieno perpendicolari all'asse. Tutto ciò si deduce dalla prima delle formole del raggio dell'evoluta dimostrate dal celebre sig. Varignon nelle Memorie dell'Accademia reale delle scienze degli anni 1701, e 1706, dove egli chiama y, dy, d^2y, dx, ds quelle quantità, che io nomino respettivamente x, dx, d^2x, dy, dw,

Or moltiplicando questa formola per

$$(a\,dy\,dx\,dw + x\,dw\,d^2w - x\,dy\,d^2w) : \varepsilon,$$

e poi dividendo quella, che ne risulta per $x\,dy\,dw$, ritrovasi quest'altra:

$$\frac{dx\,dw}{\varepsilon\,dy} = \frac{a\,dx}{x} - \frac{d^2w}{dw} + \frac{d^2y}{dy} \tag{25}$$

la quale supponendo il raggio, dato in qualsisia modo per x e costanti, è un'equazione, che serve a sciorre il problema inverso intorno al raggio del cerchio osculatore, e per integrarla si osservi, che essa si riduce alla equazione (4), e al caso del I corollario concependo $Y = 1 = y^0$; $X = 1 : \varepsilon$; $n = -1$; $dx^n = dw^n = dw^{-1}$; $d^2x : dx = d^2w : dw$; $b = -1$; $c = -b = 1$; $z = x$; $f = 0$, e perciò l'integrale dell'equazione (25) è l'equazione (9), purchè in essa e nelle formole, che ànno ad essa relazione, s'introducano i suddetti valori di Y, X, n, dx^n, b, c, z; e facciasi $E = 1$; $p = a$; $K = 1 : r$, di maniera che sostituendo $(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ in luogo di dw nella stessa equazione così modificata, e maneggiandola col debito avvedimento, si ottiene:

$$dy = dx \int \frac{x^a\,dx}{\varepsilon} : \left(x^{2a} - \int \frac{x^a\,dx}{\varepsilon} \cdot \int \frac{x^a\,dx}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

XXIV.

PROBLEMA CONSIMILE AL PRECEDENTE SCIOLTO IN MANIERA DIVERSA,

ESTRATTO DALLA TERZA RISPOSTA AL SIG. NICCOLÒ BERNULLI (*).

Trovar la supposizione della differenziale costante, onde integrabile si renda quest'equazione:

$$(1) \qquad XPdy^r : dx^{r-1} = \frac{adz}{z} + \frac{bd^2x}{dx} + \frac{cd^2y}{cy} + \frac{fdh}{h} + \frac{gd\&}{\&}.$$

Ove r significa qualsisia numero, ec., P designa una quantità data in qualsivoglia forma per x, y, e costanti; a, b, f, g rappresentano numeri arbitrarj, ma costanti; X, e z quantità in qualsivoglia modo date per x, e costanti, ed h quantità data in qualunque maniera per y, e costanti; $\&$ quantità espressa in qualsisia guisa per x, y, e costanti.

Avvertimento. — Quasi non differisce questo problema dal precedente. La soluzione, che sono per darne, scioglierà del pari l'altro problema suddetto, bastando porre Y in luogo di P, e far, che Y continui a denotare una quantità data in qualsivoglia guisa per y, e costanti, senza mescolanza delle x.

Soluzione. — Ogni attento analista discerne, che il secondo membro dell'equazione (1) equivale a quest'espressione $\frac{dif.\ (z^a\, dx^b\, dy^c\, h^f\, \&^g)}{(z^a\, dx^b\, dy^c\, h^f\, \&^g)}$.

Dimodochè l'equazione (1) non è diversa dalla seguente

$$XPdy^r : dx^{r-1} = \frac{dif.\ (z^a\, dx^b\, dy^c\, h^f\, \&^g)}{(z^a\, dx^b\, dy^c\, h^f\, \&^g)}.$$

Si moltiplichi quest'equazione per la quantità $A^t\, P^{-1}\, z^q\, dx^r\, dy^{-r}$ (nella quale A rappresenta una quantità in qualunque modo data per x, e

(*) Opuscoli Calogerà, Tom. XXIII, pag. 103. (Cfr. *Scritti polemici* inseriti nel vol. III della presente edizione).

costanti, siccome t, e q espongono numeri arbitrarj, ma costanti, e zero ancora), e nominando V la quantità $z^a\,dx^b\,dy^c\,h^f\,\vartheta^g$, si avrà:

$$(2) \qquad XA^t z^q\,dx = A^t P^{-1} z^q\,dx^r\,dy^{-r}\,dV : V.$$

Supponendo ora quest'equazione:

$$(3) \qquad A^t P^{-1} z^q\,dx^r\,dy^{-r} = V^k = z^{ak}\,dx^{bk}\,dy^{ck}\,h^{fk}\,\vartheta^{gk}$$

ove k espone un numero arbitrario ma costante, l'equazione (2) diviene

$$XA^t z^q\,dx = V^{k-1}\,dV$$

e integrando

$$\int XA^t z^q\,dx = \frac{1}{k} V^k .$$

Ponendo in quest'ultima equazione in cambio di V^k il suo valore $A^t P^{-1} z^q\,dx^r\,d^{-r}$ espresso nell'equazione (3) ritrovasi:

$$(4) \qquad \int XA^t z^q\,dx = \frac{1}{k} A^t P^{-1} z^q\,dx^r\,dy^{-r}.$$

Finalmente dall'equazione (3) si deduce operando a dovere:

$$(5) \qquad A^{\frac{t}{k}}\,P^{-\frac{1}{k}}\,z^{\frac{q}{k-a}}\,dx^{\frac{r}{k-b}}\,dy^{\frac{r}{k-c}}\,h^{-f}\,\vartheta^{-g} = 1 .$$

E per conseguenza il primo membro di quest'equazione essendo eguale all'unità, è una quantità costante, supposta la quale rendesi integrabile l'equazione (1).

Il che dovea ritrovarsi.

XXV.

TEOREMA CONCERNENTE IL CALCOLO DIFFERENZIALE

ESTRATTO DALLA TERZA RISPOSTA AL SIG. NICCOLÒ BERNULLI (*).

Denoti Dds la differenziale dell'elemento d'una curva, in cui le dy differenziali dell'ordinate si prendono costanti, e ∂ds significhi la differenziale dell'elemento ds della medesima curva, in cui le dx differenziali delle abscisse si prendono costanti; io dico, che $Dds = -\frac{dx^2 \partial ds}{dy^2}$.

Dimostrazione. — L'infrascritta equazione (1) designi il rapporto della dx alla ds.

$$dx = qds \tag{1}$$

adunque

$$dx^2 = q^2 ds^2 \tag{2}$$

e $ds^2 = dy^2 + q^2 ds^2$, donde nascono le due infrascritte equazioni

$$dy^2 = (1 - q^2)\, ds^2 \tag{3}$$

$$dy = ds\sqrt{1-q^2}. \tag{4}$$

Pongasi dx costante, e dall'equazione (1) differenziata, indi moltiplicata per q viene:

$$q\, dq\, ds + q^2 \partial ds = 0. \tag{5}$$

Facciasi dy costante, e dall'equazione (4) differenziata si à

$$\frac{-q\, dq\, ds}{\sqrt{1-q^2}} + Dds\sqrt{1-q^2} = 0,$$

e moltiplicando per $\sqrt{1-q^2}$ si à ancora

$$-q\, dq\, ds + (1 - q^2)\, Dds = 0. \tag{6}$$

(*) Opuscoli Calogerà, tomo XXIII, pag. 86. (Cfr. *Scritti polemici* inseriti nel vol. III della presente edizione).

Aggiungendo le due equazioni (5), e (6), trovasi

$$(1 - q^2)\, Dds + q^2\, \delta ds = 0,$$

e fatte le debite operazioni

$$Dds = -\frac{q^2\, \delta ds}{1 - q^2}. \tag{7}$$

Dividendo l'equazione (2) per l'equazione (3) si vede $\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{q^2}{1 - q^2}$.

Adunque ponendo nell'equazione (7) invece di $\frac{q^2}{1 - q^2}$ il suo valore, si ottiene $Dds = -\frac{dx^2\, \delta ds}{dy^2}$. Il che dovea dimostrarsi.

DIMOSTRAZIONE II. — Il signor Varignon trovò nelle Memorie dell'Accademia reale delle scienze di Parigi per l'anno 1701, che nella supposizione di dx costante chiamando R il raggio del cerchio osculatore si à $R = \frac{y\, dy\, ds^2}{dx\, dy\, ds - y\, dx\, \delta ds}$.

Adunque dividendo il numeratore, e il denominatore per dy sarà nella supposizione di dx costante

$$R = \frac{y\, ds^2}{dx\, ds - \frac{y\, ds\, \delta ds}{dy}}. \tag{8}$$

Trovò lo stesso autore nel medesimo luogo, che nella supposizione di dy costante si ottiene $R = \frac{y\, dx\, ds^2}{ds\, dx^2 + y\, dy\, Dds}$.

Adunque dividendo il numeratore, e denominatore per dx sarà nella supposizione di dy costante

$$R = \frac{y\, ds^2}{dx\, ds + \frac{y\, dy\, Dds}{dx}}. \tag{9}$$

Si paragonino le due equazioni (8), e (9), e chiaramente si vedrà, che $\frac{y\, dy\, Dds}{dx} = -\frac{y\, dx\, \delta ds}{dy}$, e dividendo per $\frac{y\, dy}{dx}$, rimarrà dimostrato, che

$$Dds = -\frac{dx\, \delta ds}{dy}.$$

Il che dovea dimostrarsi.

DIMOSTRAZIONE III, *che è geometrica* (fig. 11, e 12). — Dal punto A, in cui s'incontrano le ordinate della curva BDF, si tirino alla periferia di essa le tre ordinate prossime AB, AD, AF, che la tagliano in B, D, F. Co' raggi AB, AD si descrivano i respettivi archetti circolari BC, DE, che tagliano in C, ed in E le due respettive ordinate AD, AF. Si concepiscano eguali i due archetti BC, DE e si prolunghi l'elemento BD della curva, finchè incontri in G l'ordinata AF prolungata, se bisogna. Co' raggi DG, AG si descrivano i respettivi archetti circolari GH, GI taglianti la curva respettivamente in H, e in I, e si tiri l'ordinata AI, che dall'archetto DE (continuato se bisogna) rimanga tagliata in K.

È manifesto, che DF è la ds nel caso di dx costante, e che DI è la ds del caso di dy costante, ed essendo $DI = DG = BD$, è del pari visibile, che FH è $\mp \delta ds$, e che HI è $\pm Dds$; i segni superiori servono per la fig. 1, e gl'inferiori per la 2.

Ora in virtù del triangolo FGI rettangolo in G, e della GH normale in H, e conseguentemente media proporzionale tra FH, ed HI, la FH dee stare alla HI, come FH^2 sta a GH^2, ma per la similitudine de' triangoli FHG, FED à luogo questa proporzionalità

$$FH^2 \,.\, GH^2 :: FE^2 \,(dy) \,.\, DE^2 \,(dx^2),$$

adunque $FH\,(\mp \delta ds) \,.\, HI\,(\pm Dds) :: dy^2 \,.\, dx^2$, e quindi $Dds = -\dfrac{dx^2 \delta ds}{dy^2}$.

Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO. — I. Se il punto A si concepisce infinitamente lontano dalla periferia della curva, le ordinate divengono parallele tra loro, e gli archetti circolari BC, DE, DK, GI degenerano in vere menome rette perpendicolari alle ordinate respettive AD, AF, AI rimanendo tuttavia nel suo vigore questa terza dimostrazione.

II. Le due formole del raggio del cerchio osculatore, delle quali ci siam valuti nella seconda dimostrazione, servono ancora per le curve, che ànno l'ordinate parallele tra loro, e perpendicolari all'asse (come a tutti è noto), purchè s'immagini, che l'ordinata y divenga in esse due formole infinita, e nelle medesime abbiansi per nulli quei termini, che in tale ipotesi restano finiti, e per conseguenza incomparabilmente minori degli altri, che la supposizione della y infinita rende infinitamente grandi.

Dimostrazione IV. — La natura della curva sia rappresentata da questa equazione

$$(10)\qquad dx = b\,dy$$

adunque essendo $ds^2 = dy^2 + dx^2$, la stessa ds^2 avrà i due infrascritti valori

$$(11)\qquad ds^2 = dy^2 + b^2 dy^2$$

$$(12)\qquad ds^2 = dx^2 + \frac{dx^2}{b^2}.$$

Differenziando l'equazione (11) nella supposizione di dy costante, ne viene

$$(13)\qquad 2\,ds\,Dds = 2\,b\,db\,dy^2.$$

E differenziando l'equazione (12) nell'ipotesi di dx costante ne risulta

$$(14)\qquad 2\,ds\,\delta ds = -\frac{2\,db\,dx^2}{b^3}.$$

Dividasi l'equazione (13) per l'equazione (14), e si otterrà

$$\frac{Dds}{ds} = -\frac{b^4 dy^2}{dx^2},$$

e ponendo in luogo di b^4 il suo valore $\frac{dx^4}{dy^4}$ tratto dall'equazione (10) si avrà:

$$(15)\qquad \frac{Dds}{\delta ds} = -\frac{dx^2}{dy^2}$$

e insieme $Dds = -\frac{dx^2\,\delta ds}{dy}$. Il che doveva dimostrarsi.

Avvertimento. — Ne' corollarj, che seguono, Ddx rappresenterà la differenziale di dx nell'ipotesi di dy costante, e δdy rappresenterà la differenziale di dy nella supposizione di dx costante.

Corollario I. — Se si differenzia l'equazione (10) con supporre dx costante, si à $b\,\delta dy + db\,dy = 0$, cioè $-\frac{b\,\delta dy}{dy} = db$, e sostituendo nell'equazione (14) in cambio di db questo suo valore, e poscia dividendo per

2, si à ancora $ds\,\delta ds = \frac{\delta dy\, dx}{dy\, b^2}$, surroghiamo ora nel secondo membro di quest'equazione in vece di b^2 il suo valore $\frac{dx^2}{dy^2}$ desunto dall'equazione (10), e troveremo $ds\,\delta ds = dy\,\delta dy$, e in fine

$$(16) \qquad \delta dy = \frac{ds\,\delta ds}{dy}.$$

Corollario II. — Se differenzieremo l'equazione (10) nell'ipotesi di dy costante, avremo $Ddx = db\, dy$, e moltiplicando quest'equazione per l'equazione (10) avremo ancora $dx\, Ddx = b\, db\, dy^2$, e collocando questo valore di $b\, db\, dy^2$ nell'equazione (13), e dividendo per due, si ritrova

$$ds\, Dds = dx\, Ddx,$$

donde nasce

$$(17) \qquad Ddx = \frac{ds\, Dds}{dx}.$$

Corollario III. *Che dimostra il lemma del sig. Bernulli.* — L'equazione (17) divisa per l'equazione (16) somministra $\frac{Ddx}{\delta dy} = \frac{dy\, Dds}{dx\,\delta ds}$, pongasi qui il valore di $\frac{Dds}{\delta ds}$ preso dall'equazione (15), e si scoprirà $\frac{Ddx}{\delta dy} = -\frac{dx}{dy}$ vale a dire $Ddx = -\frac{dx\,\delta dy}{dy}$, e questo è il lemma del sig. Bernulli.

XXVI.

PROBLEMA DA CUI SI DEDUCE UN TEOREMA
SPETTANTE AL CALCOLO INTEGRALE

ESTRATTO DALLA TERZA RISPOSTA AL SIG. NICCOLÒ BERNULLI (*).

Posto, che all'equazione infrascritta

$$A\, d^2s + B\, d^2y + C\, d^2x + Q = 0 \tag{18}$$

(dove le lettere A, B, C, Q esprimono quantità in qualunque maniera date per x, y, dx, dy, ds, e costanti, ed alcune di esse possono denotare anche zero) siasi pervenuto senza supporre veruna differenziale per costante, liberare la medesima equazione delle quantità differenzio-differenziali.

Soluzione. — Suppongasi in primo luogo dy costante, l'equazione (18) diverrà $A\, Dds + C\, Ddx + Q = 0$, e ponendo in vece Ddx il suo valore $\frac{ds\, Dds}{dx}$ secondo l'equazione (17) ne risulterà

$$A\, Dds + \frac{C\, ds\, Dds}{dx} + Q = 0. \tag{19}$$

Facciasi dipoi costante la dx, e una tale ipotesi muterà l'equazione (18) in questa $A\, \delta ds + B\, \delta dy + Q = 0$, ove pongasi il valore di δdy tratto dall'equazione (16), e si avrà $A\, \delta ds + \frac{B\, ds\, \delta ds}{dy} + Q = 0$.

La Q dell'equazione (19) esser dee sempre la stessa, che la Q della equazione ultima, perciò comparando queste due equazioni si vede nascere la seguente $A\, Dds + \frac{C\, ds\, Dds}{dx} = A\, \delta ds + \frac{B\, ds\, \delta ds}{dy}$.

Si surroghi qui in vece di Dds la quantità $-\frac{dx^2\, \delta ds}{dy}$, che gli è uguale in virtù del teorema precedente, si otterrà

$$-\frac{A\, dx^2\, \delta ds}{dy^2} - \frac{C\, ds\, dx\, \delta ds}{dy^2} = A\, \delta ds + \frac{B\, ds\, \delta ds}{dy}$$

(*) Opuscoli Calogerà, Tom. XXIII, pag. 95. (Cfr. *Scritti polemici* inseriti nel vol. III della presente edizione).

moltiplicando quest'equazione per $\frac{dy^2}{\delta ds}$, vedesi

$$-A\,dx^2 - C\,ds\,dx = A\,dy^2 + B\,ds\,dy\,;$$

e trasponendo si à $-C\,ds\,dx = A(dx^2 + dy^2) + B\,ds\,dy$, vale a dire

$$-C\,ds\,dx = Ads^2 + B\,ds\,dy,$$

e dividendo per ds, indi trasportando si scopre

$$Ads + Bdy + Cdx = 0. \tag{20}$$

Il che dovea ritrovarsi.

Corollario I. — Quindi risulta il seguente

Teorema. — *Nella proposta equazione si tralascino quei termini, che non sono moltiplicati per verun secondo differenziale, si mutino i secondi differenziali ne' primi, e si avrà un' equazione differenziale del primo grado, che sarà l'Integrale della proposta.*

Corollario II. — Egli è manifesto, che nel teorema presente comprendesi il teorema del sig. Bernulli, imperciocchè se nell'equazione (18) la A è zero, la B significa l'unità, la C denota $-A$, e la Q esprime $-B$, allora si à $dy - Adx = 0$, che è l'integrale dell'equazione differenzio-differenziale Bernulliana.

$$d^2y - Ad^2x - B = 0. \tag{21}$$

Scolio. — I. Mediante la nota equazione $ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y$, che proviene da $ds^2 = dx^2 + dy^2$, la nostra equazione (18) può mutarsi nella equazione (21) del sig. Bernulli, ma ciò facendo, si diminuisce di molto l'eleganza dello scioglimento di questo problema.

II. I coefficienti A, B, C possono alcune volte esser tali, che l'equazione (20) riesca un'equazione identica, e niente faccia scoprire.

XXVII.

DUE SOLUZIONI DI UN PROBLEMA

SPETTANTE AL CALCOLO INTEGRALE

DA CUI SI DEDUCE LO SCIOGLIMENTO DEL PROBLEMA PROPOSTO DAL SIG. TAYLOR INGLESE A TUTTI I MATEMATICI NON INGLESI (*), EC.

PROBLEMA. — Sia l'infrascritto trinomio H, ove m indica qualsivoglia potestà del binomio, cioè qualsivoglia numero di questa progressione 2, 4, 8, 16, ec.; f significa qualunque numero intiero positivo, o negativo, ed anche zero; c esprime qualsisia quantità costante positiva, o negativa col suo segno, ed anche zero; a^{2m} rappresenta una quantità positiva, e zero ancora. Integrare il trinomio H senza valersi di quadrature superiori a quelle del cerchio, e dell'iperbola

$$H = \frac{x^f\,dx}{x^{2m} + cx^m \pm a^{2m}}.$$

SOLUZIONE PRIMA. — Lo scioglimento di questo problema sarà contenuto ne' cinque teoremi, che seguono, e ne' loro corollarj, che ne comprenderanno tutti i casi soggetti a qualche difficoltà.

TEOREMA I. — L'integrale del binomio $\frac{x^g\,dx}{x^2 \pm a^2}$, ove g significa qualunque numero intiero positivo, dipende dalla quadratura del cerchio, o dell'iperbola.

DIMOSTRAZIONE. — Dividendo il numeratore del binomio pel denominatore, lo stesso binomio si vedrà eguale a un aggregato di differenziali semplici più il binomio $\frac{dx}{x^2 \pm a^2}$ moltiplicato da una una quantità costante, quando il numero g è pari, ovvero più il binomio $\frac{xdx}{x^2+a^2}$ moltiplicato parimente da una quantità costante, quando il numero g è impari; ma è già noto, che $\frac{dx}{x^2 \pm a^2}$ dipende dalla rettificazione di un arco

(*) Supplimenti al Giornale de' Letterati d'Italia, Tom. III, pag. 481.

di cerchio, allorchè il segno indifferente significa più, e dalla descrizione della logaritmica, allorchè significa meno, ed è noto altresì, che $\frac{xdx}{x^2 \pm a^2}$ à per suo Integrale il logaritmo di $\sqrt{x^2 \pm a^2}$; adunque, ec. Il che era a dimostrarsi.

Corollario I. — L'integrale del binomio $\frac{dx}{x^g\,(x^2 \pm a^2)}$, ove g à la significazione soprannotata, dipende dalla quadratura del cerchio, o dell'iperbola; imperciocchè ponendo $x = \frac{1}{y}$, il binomio si trasforma in quest'altro $\frac{\pm y^g\, dy}{a^2\left(y^2 \pm \frac{1}{a^2}\right)}$, che si somma in vigore di questo teorema.

Corollario II. — L'integrale del trinomio $\frac{x^e\, dx}{x^2 + px \pm a^2}$, ove p denota qualsisia quantità costante positiva, o negativa col suo segno, ed e indica qualunque numero intiero positivo, e può denotare anche zero, dipende dalle quadrature del cerchio, e dell'iperbola, poichè facendo $x = u - \frac{1}{2}p$, il trinomio si cangia in questo differenziale

$$\frac{du\left(u - \frac{1}{2}p\right)^e}{u^2 - \frac{1}{4}p^2 \pm a^2},$$

che in virtù del presente teorema riceve la sua integrazione.

Corollario III. — L'integrale del trinomio $\frac{\frac{dx}{x^e}}{(x^2 + px \pm a^2)}$, ove p, ed e serbano la stessa significazione, dipende dalle quadrature del cerchio, e dell'iperbola; perchè ponendo $x = \frac{1}{t \pm \frac{p}{2a^2}}$, il trinomio si trasmuta in quest'altra espressione $\mp \frac{\frac{dt}{a^2}\left(t \pm \frac{p}{2a^2}\right)^e}{\left[t^2 \mp \frac{p^2}{4a^4} \pm \frac{1}{a^2}\right]}$, che s'integra mediante questo teorema.

Teorema II. — Nei trinomj infrascritti A, B, C abbiano c, ed a^{2m} la significazione notata nell'esposizione del problema, ed f, ed m esprimano qualunque numero intiero, o rotto, positivo, e negativo, con questo, che f può denotare anche zero; io dico, che

$$A = B + C$$

$$A = \frac{x^f\, dx}{x^{2m} + cx^m + a^{2m}}$$

$$B = \frac{\dfrac{x^{f-\frac{m}{2}}\, dx}{2\sqrt{2a^m - c}}}{x^m - x^{\frac{m}{2}}\sqrt{2a^m - c} + a^m}$$

$$C = -\frac{\dfrac{x^{f-\frac{m}{2}}\, dx}{2\sqrt{2a^m - c}}}{x^m + x^{\frac{m}{2}}\sqrt{2a^m - c} + a^m}.$$

Il calcolo mostrerà la verità di questo teorema.

Corollario I. — Se nel trinomio A, c^2 è minore di $4a^{2m}$ (conforme s'intenderà sempre ne' corollarj di questo teorema) i trinomj B, e C sono sempre reali, e in ciascuno di essi il quadruplo dell'ultimo termine supera sempre il quadrato del coefficiente del secondo termine.

Corollario II. — Il trinomio A rappresenta generalmente qualunque trinomio reale, il di cui ultimo termine moltiplicato per quattro supera il quadrato del coefficiente del secondo ternine; laonde, siccome il trinomio A è uguale ai due trinomj B, e C, che, per così dire, egli genera, e che io chiamo del prim'ordine, in ciascuno de' quali il quadruplo dell'ultimo termine supera il quadrato del coefficiente del secondo termine coll'altre circostanze, che questo teorema espone agli occhi degli analisti; così ciascuno de' due trinomj reali B, e C considerato senza la frazione costante positiva, o negativa, che lo moltiplica, è uguale a due trinomj reali, ch'egli genera, e che io chiamo del second'ordine, tali, che in ognuno di essi il quadruplo dell'ultimo termine supera il quadrato del coefficiente del secondo termine, e sono similmente condizionati in ordine al trinomio generante, come i due trinomi B, e C in ordine al trinomio A, dal quale vengono generati. Per la stessa ragione

ciascuno de' trinomj del second'ordine ne genera due, che io chiamo del terz'ordine, e sono dotati delle medesime proprietà esposte in questo corollario, e così in infinito, dimodochè ciascun trinomio di qualunque ordine è reale, e il quadruplo del suo ultimo termine supera il quadrato del coefficiente del suo secondo termine, ec. conforme si è spiegato.

Corollario. — Se m indica qualunque potestà del binario (come s'intenderà sempre ne' seguenti corollarj) il trinomio A sarà resolubile in tanti trinomj, quante unità contiene il numero m, e ciascuno di questi trinomj reali semplici sarà rappresentato dalle seguente formola $\frac{x^{f-w}dx}{mq\,(x^2 \pm hx + a^2)}$, ove le lettere q, ed h esprimono quantità costanti, ma diverse in ciascuno de' suddetti trinomj semplici; l'esponente però $f-w$ è in tutti lo stesso.

Scolio. — Si noti: Primo, che l'esponente w è uguale a questa serie $\frac{m}{2}+\frac{m}{4}+\frac{m}{8}+\frac{m}{16}$, ec., la quale s'intenda continuata, finchè l'ultimo termine di essa sia eguale all'unità. Secondo, che in ciascuno dei sopraddetti trinomj semplici $4a^2$ è maggiore di h^2 per la ragione addotta nel II corollario di questo teorema. Terzo, che moltiplicando insieme tutti i denominatori degl'istessi trinomj semplici (considerati però detti denominatori senza la quantità costante, che li moltiplica), ne viene il denominatore del trinomio A.

Corollario IV. — L'espressione $\frac{\frac{x^{f-w}dx}{mq}}{(x^2 \pm hx + a^2)}$ è uguale a quest'altra $\frac{\frac{x^{f-m+1}dx}{mq}}{(x^2 \pm hx + a^2)}$; imperocchè la serie $w=\frac{m}{2}+\frac{m}{4}+\frac{m}{8}$, ec., è composta di termini, che sono in progressione geometrica, e l'ultimo termine di questa progressione è l'unità; adunque $(w-1)$ aggregato degli antecedenti, sta ad $\left(w-\frac{m}{2}\right)$ aggregato de' conseguenti, come $\frac{m}{2}$ sta ad $\frac{m}{3}$, cioè come due ad uno; donde nasce, operando nel debito modo, $w=m-1$.

Corollario V. — Se f rappresenta un numero intiero positivo, o negativo, ed anche zero, il trinomio A è integrabile, poste le sole quadrature del cerchio, e dell'iperbola, mentre si è già mostrato, che il tri-

nomio A è uguale all'aggregato di tanti trinomj reali semplici espressi in questa formola $\frac{\frac{x^{f-m+1}dx}{mq}}{(x^2 \pm hx + a^2)}$ quante unità comprende il numero m, e questa medesima formola s'integra dipendentemente dalle sole quadrature del cerchio, e dell'iperbola pel II, e III corollario del primo teorema.

Corollario VI. — Qualunque binomio, il di cui secondo termine è positivo, potendosi considerare, come rappresentato dal trinomio A, in cui c sia uguale a zero, e quindi il quadruplo dell'ultimo termine di questo trinomio, superando necessariamente il quadrato del coefficiente del secondo termine ne risulta, che la formola $\frac{x^f dx}{x^{2m}+a^{2m}}$, ove f esprime un numero intiero positivo, o negativo, ed anche zero, è sommabile, mediante le sole quadrature del cerchio, e dell'iperbola.

Teorema III. — Sia l'infrascritto binomio E, ove r rappresenta qualsisia numero di questa progressione 4, 8, 16, 32, ec., f indica qualunque esponente, ed anche zero, ed a denota qualsivoglia quantità costante; sia inoltre l'infrascritta serie F di binomj, la quale intendasi continuata, finchè l'esponente del primo termine di uno di essi binomj sia $=\frac{1}{2}r$ (la legge della serie F apparisce chiaramente). Io dico, che il binomio E uguale alla serie F divisa per ra^r

$$E = \frac{x^f dx}{x^r - a^r}$$

$$F = \frac{2a^2 x^f dx}{x^2 - a^2} - \frac{2a^2 x^f dx}{x^2 + a^2} - \frac{4a^4 x^f dx}{x^4 + a^4} - \frac{8a^8 x^f dx}{x^8 + d^8} - \frac{16a^{16} x^f dx}{x^{16} + a^{16}}, \text{ ec.}$$

Il calcolo dimostrerà anche questo teorema.

Corollario. — Se f esprime qualsivoglia numero intiero positivo, o negativo, ed anche zero, i due primi binomj della serie F s'integrano mediante il I teorema, e il suo I corollario, e gli altri binomj della medesima serie F si sommano mediante il VI corollario del II teorema; adunque il binomio E non ricerca per la sua integrazione quadrature superiori a quelle del cerchio, e dell'iperbola.

Scolio. — Se nel trinomio H del problema c è nulla, e se il segno indifferente significa meno, il trinomio H non differisce dal binomio E.

Teorema IV. — Sia l'infrascritto trinomio G, ove m rappresenta qualunque potestà del binario; ed f qualsivoglia numero intiero positivo, o negativo, ed anche zero; io dico, che il trinomio suddetto è sommabile indipendentemente dalle sole quadrature del cerchio e dell'iperbola.

$$G = \frac{x^f dx}{x^{2m} \pm 2 a^m x^m + a^{2m}}.$$

Dimostrazione. — L'integrale del trinomio G è il seguente:

$$\frac{\pm x^{f+1}}{ma^m(x^m \pm a^m)} \mp \frac{(f-m+1)}{ma^m} \int \frac{x^f dx}{(x^m \pm a^m)}.$$

Ora se $m=2$; $\int \frac{x^f dx}{x^m \pm a^m}$ si à pel I teorema, e suo I corollario, e se m è uguale a qualunque altra potestà del binario $\int \frac{x^f dx}{x^m \pm a^m}$ si ottiene pel VI corollario del II teorema, quando $\pm$ significa più, e pel corollario del III teorema, quando $\pm$ significa meno; adunque, ec.

Il che dovea dimostrarsi.

Teorema V. — Negl'infrascritti trinomio H, e binomj I, e K, resti alla c, ed alla a^{2m} la medesima significazione attribuita loro nell'esposizione del problema, ed f, ed m esprimano qualunque numero intiero, o rotto, positivo o negativo, con questo, che f possa significare anche zero: io dico, che il trinomio H è uguale ai due binomj I, e K.

$$H = \frac{x^f dx}{x^{2m} + cx^m \pm a^{2m}}$$

$$I = \frac{\dfrac{x^f dx}{\sqrt{c^2 \mp 4 a^{2m}}}}{x^m + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\sqrt{c^2 \mp 4 a^{2m}}}$$

$$K = -\frac{\dfrac{x^f dx}{\sqrt{c^2 \mp 4 a^{2m}}}}{x^m + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 \mp 4 a^{2m}}}.$$

Anche questo teorema si dimostra col calcolo.

Scolio. — Si avverta, che se nel trinomio H il segno indifferente significa più, allora c^2 denoterà una quantità non minore di $4a^{2m}$, affinchè i binomj I, e K non contengano quantità immaginarie, anzi in questo medesimo caso c^2 nemmeno dev'essere uguale a $4a^{2m}$; poichè se ciò fosse, il teorema nulla farebbe conoscere.

Corollario I. — Se c esprime una quantità positiva tale, che c^2 sia maggiore di $4a^{2m}$; e se nel trinomio H si prende $+a^{2m}$ in vece di $\pm a^{2m}$, i secondi termini d'ambedue i binomj I, e K sono positivi, e se di più m rappresenta qualunque numero di questa progressione 4, 8, 16, 32, ec., gl'istessi binomj sono integrabili mediante il VI corollario del II teorema.

Corollario II. — Se m esprime come sopra qualsisia numero della progressione 4, 8, 16, 32, ec., e se c indica una quantità negativa tale, che c^2 sia maggiore di $4a^{2m}$, e se in luogo di $\pm a^{2m}$ si assume $+a^{2m}$ nel trimonio H (donde nasce, che i secondi termini de' binomj I, e K sono negativi), l'integrazione di essi binomj si ottiene pel corollario del III teorema.

Corollario III. — Se m denota parimente qualsivoglia numero della progressione 4, 8, 16, 32, ec., se c significa qualsivoglia quantità positiva, o negativa, e se nel trinomio H in vece di $\pm a^{2m}$ si prende $-a^{2m}$ (donde apparisce, che il secondo termine del binomio I è negativo, e il secondo termine del binomio K è positivo), allora il binomio I si somma mediante il corollario del III teorema, e il binomio K mediante il VI corollario del II teorema.

Corollario IV. — Se $a=0$, il binomio I si cangia in questo differenziale semplice $\frac{x^{f-m}dx}{c}$, e il binomio K prende questa sembianza

$$-\frac{x^f\,dx}{c(x^m+c)},$$

onde allorchè m esprime qualunque numero di questa progressione 4, 8, 16, 32, ec., se c denota una quantità positiva, il binomio K s'integra pel VI corollario del II teorema, e se c indica una quantità negativa, lo stesso binomio K si somma pel corollario III del teorema.

Corollario V. — Se $m=2$, i due binomj I, e K s'integrano in tutti i casi dei tre primi corollarj di questo teorema, e il binomio K

s'integra nel caso del precedente corollario, poste le sole quadrature del cerchio, e dell'iperbola, in virtù del I teorema, e suo I corollario; adunque in tutti gli accennati casi il trinomio H non esige quadrature più alte per la sua integrazione.

Scolio. — Egli è chiaro, che in questi cinque teoremi, e loro corollarj si contiene lo scioglimento del problema, mediante il quale resta sciolto anche il problema proposto a tutti i matematici non Inglesi dal sig. Taylor, segretario della regia Società d'Inghilterra. Ecco il problema di questo insigne geometra: Integrare mediante le sole quadrature del cerchio, e dell'iperbola questo trinomio $\frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}q-1}dz}{e+fz^q+gz^{2q}}$, dove q indica qualsivoglia numero intiero, o rotto positivo, o negativo, δ qualunque numero intiero positivo, o negativo, λ qualsivoglia numero di questa progressione 2, 4, 8, 16, ec., ed e, f, g esprimono quantità costanti. Facendo pertanto $z=x^{\frac{\lambda}{q}}$, il trinomio del sig. Taylor si trasforma in quest'altro

$$\frac{x^{\delta-1}dx}{x^{2\lambda}+\frac{f}{g}x^{\lambda}+\frac{e}{g}}$$

moltiplicato per $\frac{\lambda}{qg}$, il quale non differisce dal trinomio H moltiplicato per una quantità costante.

Soluzione II. Teorema VI. — Sieno i tre polinomj infrascritti L, M, N, ove le lettere c, a, f, m serbano la stessa significazione assegnata loro nel II teorema. Io dico, che il polinomio L è uguale ai due polinomj M, N.

$$L=\frac{x^f dx\,(x^{2m}-a^{2m})}{x^{2m}+cx^m+a^{2m}}$$

$$M=\frac{\frac{1}{2}x^f dx\,(x^m-a^m)}{x^m+x^{\frac{m}{2}}\sqrt{2a^m-c}\;+a^m}$$

$$N=\frac{\frac{1}{2}x^f dx\,(x^m-a^m)}{x^m-x^{\frac{m}{2}}\sqrt{2a^m-c}\;+a^m}$$

Questo teorema ancora si dimostra col calcolo, e se ne deducono de' corollarj simili a quelli del II teorema.

COROLLARIO I. — Se nel polinomio L la c è tale, che c^2 non sia maggiore di $4a^{2m}$, i polinomj M, ed N sono sempre reali, e nel denominatore di ciascuno di essi il quadrato del coefficiente del secondo termine non supera il quadruplo dell'ultimo termine.

COROLLARIO II. — Il polinomio L rappresenta generalmente qualsivoglia polinomio reale della sua specie, il di cui denominatore è tale, che in esso il quadrato del coefficiente del secondo termine non supera il quadruplo dell'ultimo termine, e però siccome il polinomio L si risolve ne' due polinomj M, ed N, a se simili (se non che sono divisi per due), e dotati della suddetta proprietà, che nel loro denominatore il quadrato del coefficiente del secondo termine non supera il quadruplo dell'ultimo termine; così ciascuno de' polinomj M, ed N, che io chiamo del primo ordine, considerato senza il numero 2, che lo divide, si risolve in due altri polinomj reali, che io chiamo del second'ordine, e che sono simili ai polinomj del prim'ordine, dai quali vengono, per così dire, generati; questi polinomj del second'ordine sono anch'essi divisi per 2, regna ne' loro denominatori la medesima proprietà, che il quadrato del coefficiente del secondo termine non supera il quadruplo dell'ultimo termine, e ciascuno di loro genera due polinomj del terz'ordine, che sono reali, e serbano le stesse affezioni, ec., come si è bastantemente spiegato, e così in infinito, di maniera che se m significa qualsivoglia potestà del binario, proseguendo a risolvere i polinomj subalterni in altri polinomj simili inferiori, si otterranno finalmente tanti polinomj semplici simili al polinomio L, ne' quali la x non ascenderà a dimensione più elevata della seconda, prescindendo dalla x^f , che li moltiplica, e questi polinomj semplici saranno tutti reali.

SCOLIO. — Ogni attento analista vedrà chiaramente: primo, che questi polinomj semplici sono tanti, quante unità contiene il numero m; secondo, che ciascuno di essi è diviso per m; terzo, che il prodotto de' denominatori di tutti questi polinomj semplici (considerati senza il numero m, che li divide) è uguale al denominatore del polinomio L.

COROLLARIO III. — Il polinomio L è uguale a tanti trinomj semplici moltiplicati per $(x^2-a^2)\frac{x^f}{m}$ quante unità comprende il numero m

(posto che m indichi qualsivoglia potestà del binario, come s'intenderà sempre per l'avvenire); laonde chiamando Ydx l'aggregato di tutti i trinomj semplici suddetti, si avrà la seguente equazione

$$(1)\qquad \frac{x^f dx\,(x^{2m}-a^{2m})}{x^{2m}+cx^m+a^{2m}}=\frac{Y}{m}\,dx\,(x^2-a^2)\,x^f.$$

Corollario IV. — Dividendo il numeratore dell'equazione (1) pel suo denominatore, e poi trasponendo si à

$$(2)\qquad -\frac{x^f dx\,(cx^m+2a^{2m})}{x^{2m}+cx^m+a^{2m}}=Y\frac{dx}{m}\,(x^2-a^2)\,x^f-x^f dx.$$

Aggiungendo l'equazione (1) moltiplicata per c all'equazione (2) moltiplicata per x^m, ne risulta

$$(3)\qquad -\frac{a^{2m}x^f dx\,(2x^m+c)}{x^{2m}+cx^m+a^{2m}}=\frac{c}{m}\,Ydx\,(x^2-a^2)\,x^f+\frac{Ydx}{m}\,(x^2-a^2)\,x^{f+m}-x^{f+m}dx$$

e finalmente sottraendo l'equazione (2) moltiplicata per $2a^{2m}$ dall'equazione (3) moltiplicata per c, ne viene

$$(4)\qquad \frac{a^{2m}\,(4a^{2m}-c^2)\,x^f dx}{x^{2m}+cx^m+a^{2m}}=\frac{(c^2-2a^{2m})}{m}\,Ydx\,(x^2-a^2)\,x^f+$$
$$+\frac{c}{m}\,Ydx\,(x^2-a^2)\,x^{f+m}+\frac{(2a^{2m}-c)}{x^m}\,x^{f+m}dx.$$

Corollario V. — Aggiungendo l'equazione (1) moltiplicata per $\frac{c}{x^m}$ all'equazione (2) si trova

$$(5)\qquad -\frac{a^{2m}x^f dx\,(2+cx^{-m})}{x^{2m}+cx^m+a^{2m}}=\frac{c}{m}\,Ydx\,(x^2a^2)\,x^{f-m}+\frac{Ydx}{m}\,(x^2-a^2)\,x^f-x^f dx$$

e sottraendo l'equazione (5) moltiplicata per 2 dall'equazione (2) moltiplicata per $\frac{c}{x^m}$, ne proviene

$$(6)\qquad \frac{(4a^{2m}-c^2)\,x^f dx}{x^{2m}+cx^m+a^{2m}}=(2x^m-c)\,x^{f-m}dx-\frac{c}{m}\,Ydx\,(x^2-a^2)\,x^{f-m}-$$
$$-\frac{2}{m}\,Ydx\,(x^2-a^2)\,x^f.$$

Corollario VI. — Se f indica un numero intiero positivo o negativo, ed anche zero, i secondi membri delle due equazioni (4), e (6) sono integrabili supposte le sole quadrature del cerchio, e dell'iperbola in virtù de' corollarj II, e III del I teorema.

Corollario VII. — Per una ragione similissima a quella, che si è esposta nel VI corollario del II teorema, la lettera c può significare anche zero nel presente teorema, e ne' suoi corollarj.

Scolio. — Ponendo questo VI teorema, e i suoi corollarj in luogo del II teorema, e suoi corollarj, e procedendo come si è fatto nella prima soluzione, si ottiene un secondo modo di sciogliere il problema espresso in due formole differenti, le quali formole si contengono nell'equazioni (4) e (6).

Il teorema, che segue, renderà forse più grato agl'intendenti il mio metodo.

Teorema VII. — Nel polinomio infrascritto O la m denoti qualunque numero di questa progressione 1, 2, 4, 8, 16, ec., c significhi qualsivoglia quantità positiva, o negativa col suo segno, ed anche zero; ed a^{2m} qualsivoglia quantità positiva; con questo però, che c^2 non sia maggiore di $4a^{2m}$; P rappresenti questa serie

$$a^{2m-2}+a^{2m-4}x^2+a^{2m-6}x^4+a^{2m-8}x^6, \text{ ec.},$$

la quale s'intenda continuata, finchè l'ultimo termine di essa sia x^{2m-2}; io dico, che il polinomio O è integrabile, posta la sola quadratura del cerchio.

$$O=\frac{Pdx}{x^{2m}+cx^m+a^{2m}}.$$

Dimostrazione. — I. Se $m=1$, che è il caso semplicissimo, il polinomio O diverrà questo trinomio $\frac{dx}{x^2+cx+a^2}$, l'integrale, di cui è uguale ad un arco di cerchio, che à per sua tangente $x+\frac{1}{2}c$, e per suo raggio $\sqrt{a^2-\frac{1}{4}c^2}$, dovendo il detto arco esser diviso per $a^2-\frac{1}{4}c^2$.

II. Ma negli altri casi essendo P l'aggregato de' termini di una progressione geometrica, il cui termine ultimo è x^{2m-2}, si à questa pro-

porzione $P - x^{2m-2}$ cioè la somma degli antecedenti sta a $P - a^{2m-2}$ cioè alla somma de' conseguenti, come a^{2m-2} primo antecedente sta ad $a^{2m-4}x^2$ primo conseguente, cioè come a^2 ad x^2, e quindi fatte le dovute operazioni ritrovasi $P = \frac{x^{2m} - a^{2m}}{x^2 - a^2}$; laonde il polinomio O è uguale a quest'altra espressione $\frac{dx\,(x^{2m} - a^{2m})}{x^2 - a^2}$ div. per $(x^{2m} + cx^m + a^{2m})$ e conseguentemente in virtù del III corollario del VI teorema lo stesso polinomio O è uguale a questa formola $\frac{Ydx}{m}$, cioè all'aggregato di tanti trinomj reali semplici, quante unità contiene il numero m, ciascuno de' quali trinomj semplici può esprimersi così $\frac{dx}{m\,(x^2 \pm hx + a^2)}$, e questo differenziale s'integra mediante la rettificazione d'un arco circolare, come si è veduto nel primo punto di questa dimostrazione. Adunque, ec.

Il che era a dimostrarsi.

Scolio. — I termini della serie P sono tanti, quante unità contiene il numero m, e per conseguenza il polinomio O è uguale a tanti trinomj semplici divisi per m quanti termini contiene la serie P.

Se $c = \pm 2a$, ed $m = 1$, il polinomio O diviene $\frac{dx}{(x \pm a)^2}$ espressione assolutamente integrabile. Questa medesima riflessione à luogo ne' trinomj registrati nel II, e III corollario del I teorema quando $g = 0$; $p = \pm 2a$, e l'ultimo termine dei detti trinomj è positivo.

Se $c = -2a^2$, ed $m = 2$, il polinomio O ritrovasi eguale a due trinomj semplici assolutamente integrabili; e se m esprime qualunque numero di questa progressione 4, 8, 16, 32, ec., e $c = -2a^m$, il polinomio O è uguale a un aggregato di trinomj semplici, due de' quali sono assolutamente integrabili, e gli altri s'integrano mediante la rettificazione d'un arco circolare.

XXVIII.

SOLUZIONE DI DUE PROBLEMI MECCANICI.

Nell'anno 1713 un letterato incognito, che prese il finto nome di *Prete Studiapesi Canonico Perugino,* fece spargere in un foglio volante impresso i due seguenti problemi meccanici, ch'egli proponeva ai matematici d'Italia.

PROBLEMA I. — Due muri verticali convengono in un angolo rettilineo, al quale si sottotendono più travicelli contigui d'uguale grossezza, tra di loro paralleli, formandovi come un piano orizzontale: si vorrebbe sopra di questo piano alzare una parete, con cui separata venisse dal resto una porzione della stanza, che dai muri suddetti è compresa; ma perchè alzando essa parete sopra una linea retta, o fosse questa parallela ad uno de' muri, o concorresse con entrambi, è manifesto, che non la reggebbero tutti i travicelli con egual resistenza, io domando, che mi si disegni una tal curva nel dato piano orizzontale, secondo il contorno, di cui alzando ad una pari altezza la desiderata parete, ritrovi ne' soggetti correnti da per tutto un'egual resistenza: non ostante l'esser questi quanto si voglia più lunghi, secondo che più si scostano dall'angolo, a cui sono sottotesi.

PROBLEMA II. — Trovare due prismi d'eguale lunghezza, e della stessa materia, le basi de' quali possano esser iscritte in un medesimo rettangolo, ma abbiano tra di loro (siccome la mole, ed il peso d'ambi i solidi) una data ragione: e con tutto ciò sieno questi prismi d'ugual resistenza, o s'intendano ambidui fitti nel muro, o nell'estremità loro vengano a due sostegni appoggiati.

Soluzione del I Problema (fig. 13). — Sia PQS l'angolo rettilineo, in cui convengano i due muri verticali, e l'indeterminata PR rappresenti la posizione, e lunghezza di qualsivoglia travicello: si prenda sopra uno de' lati v. g. QP la retta arbitraria QT, che si chiami b, e pel punto T si tiri parallela a PR la TS, che si chiami f. La QP chiamisi x,

e conseguentemente PR sarà $\frac{fx}{b}$. La lettera r esprima la resistenza dei travicelli in qualunque punto, v. g. in O. La grossezza costante de' travicelli si rappresenti col rettangolo ak, di cui a significhi l'altezza, e k la base.

Ciò posto, considerando attentamente l'articolo XXVI dello scritto del signor Varignon sopra la resistenza de' solidi inserto nelle Memorie dell'Accademia reale delle scienze di Parigi per l'anno 1702, e facendo nella formola in detto articolo contenuta le debite sostituzioni, si avrà

$$r = \frac{ak \times PR \times \frac{1}{2}a}{PO \times OR}. \tag{1}$$

La distanza del centro di gravità del rettangolo ak all'asse d'equilibrio (come il signor Varignon lo chiama) è qui $\frac{1}{2}a$.

Ora l'indeterminata PO dicasi y, e si esprima analiticamente l'equazione (1), la quale diverrà

$$r = \frac{\frac{1}{2}a^2kfx}{fxy - by^2}.$$

Affinchè la resistenza sia sempre la stessa, pongasi $\frac{1}{2}kc$ in luogo di r (c rappresenta una retta arbitraria, ma costante).

Indi fatte le dovute operazioni, si dedurrà

$$xy = \frac{by^2}{f} + \frac{a^2x}{c} \tag{2}$$

che è un luogo all'iperbola apolloniana, il quale si costruisce così:

QS chiamisi g, prendasi sul lato QP la porzione $QV = \frac{a^2b}{cf}$, dal punto V si tiri l'indeterminata VI parallela a QR, e sulla stessa VI si pigli la porzione $VK = \frac{a^2g}{cf}$; poscia dal punto K si meni la retta KX indeterminata, e parallela a QT, e sulla VI prendasi l'altra porzione KI, eguale a QS, cioè a g. Ciò fatto si tiri dal punto I la IM parallela a QT, e pigliando la porzione $IM = \frac{a^4b}{c^2f^2}$, descrivasi tra gli asimptoti KI, e KX un'iperbola, che passi pel punto M; io dico esser questa la curva ricercata.

Il che dovea ritrovarsi.

Dimostrazione di questa costruzione (fig. 13). — Si tirino le due rette OG, ed OL, la prima delle quali sia parallela a QR, e tagli la QP in G, e la KX in H; la seconda poi sia parallela a QP, e tagli la VI in F, e la TS in L.

La simiglianza de' triangoli TSQ, ed OPG somministra queste due analogie

$$TS\,(f) \cdot QS\,(g) :: OP\,(y) \cdot OG = \frac{gy}{f}$$

$$TS\,(f) \cdot TQ\,(b) :: OP\,(y) \cdot PG = \frac{by}{f}.$$

Si avrà dunque VG (cioè FO) $= QP\,(x) - QV\left[\frac{a^2b}{cf}\right] - GP\left[\frac{by}{f}\right]$ come pure $OH = OG\left[\frac{gy}{f}\right] - VK\left[\frac{a^2g}{cf}\right]$.

Cosicchè l'espressione analitica del rettangolo $FO \times OG$ sarà (togliendo ciò, che vicendevolmente si distrugge)

$$\frac{gxy}{f} - \frac{bgy^2}{f^2} - \frac{a^2gx}{cf} + \frac{a^4bg}{c^2f^2}.$$

Ora per la natura dell'iperbola MO tra gli asimptoti KI, KX, il rettangolo $IM \times IK\left[\text{cioè } \frac{a^4\,b}{c^2\,f^2} \times g\right]$ è uguale al rettangolo $FO \times OG$; adunque si ottiene quest'equazione

$$\frac{a^4bg}{c^2f^2} = \frac{gxy}{f} - \frac{bgy^2}{f^2} - \frac{a^2gx}{cf} + \frac{a^4bg}{c^2f^2}.$$

Tolgasi dall'uno, e dall'altro membro ciò, che vi è di comune, e dividasi per $\frac{g}{f}$ ciò, che rimane, indi si trasponga, e si vedrà nascere la equazione (2).

Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I. — È visibile, che a cagione dell'arbitraria c può farsi in maniera che una delle cinque rette QV, VK, QD, DM, IM sia eguale ad una retta data.

Corollario II. — Se si vuole, che la IM sia eguale alla KI, suppongasi $IM\left[\frac{a^4\,b}{c^2f^2}\right] = KI\,(g)$, e ne verrà $c = \frac{a^2}{f}\sqrt{\frac{b}{g}}$.

Ma se oltre di ciò l'angolo QTS è uguale all'angolo QST, essendo in tal caso $QT\,(g) = QS\,(b)$, sarà $c = \frac{a^2}{f}$.

Corollario III. — In virtù della medesima arbitraria c può farsi ancora in modo, che la curva passi per un punto dato dentro l'angolo PQR, purchè non cada sopra i lati; attesochè in questo caso tanto la x, quanto la y saranno determinate, e mediante l'equazione (2) si determinerà il valore idoneo della retta c.

Corollario IV. — Per conoscere il valore di $AP\,(x)$, allorchè la $PO\,(y)$ diviene tangente della curva MO; dall'equazione (2) trasposta, e divisa per $\frac{b}{f}$ traggasi la seguente

$$y^2 - \frac{f}{b}\,xy + \frac{fa^2x}{bc} = 0,$$

che à le due radici infrascritte

$$y = \frac{fx}{2b} \pm \frac{1}{2b}\sqrt{f^2x^2 - \frac{4bfa^2x}{c}}.$$

Acciò queste due radici siano tra di loro eguali, vale a dire, acciò la $PO\,(y)$ sia tangente della curva MO; si eguagli a zero l'espressione che sta sotto il segno radicale, e si avrà $f^2x^2 = \frac{4bfa^2x}{c}$; cioè $x = \frac{4ba^2}{fc}$, che è il valore ricercato di $QP\,(x)$.

Questo valore di x surrogato nell'antipenultima equazione, farà conoscere TL, cioè $PO\,(y) = \frac{2a^2}{c}$, allorchè la PO diviene tangente della curva MO.

Soluzione del II Problema (fig. 14 e 15). — Nel rettangolo $BDFH$ (fig. 14) ambidue i lati BH, e BD siano arbitrarj, e suppongasi iscritto in esso il rettangolo $ACEG$ base quesita di uno dei prismi.

Nell'altro rettangolo, pure arbitrario, $ILMN$ (fig. 15) iscrivasi il parallelogrammo $VXYZ$ tale, che la LV sia la metà di IL, ed LX sia la metà di LM.

Questo parallelogrammo $VXYZ$ sia la base dell'altro prisma; e il primo di questi prismi stia al secondo, come f sta a g.

Riflettasi, che da quanto dimostra il signor Varignon nel citato suo scritto, e facendo in questo caso ancora le sostituzioni dovute, si rac-

coglie, che la *resistenza* del primo prisma, il quale à per base il rettangolo $ACEG$ sta alla *resistenza* del secondo prisma, che à per base il parallelogrammo $VXYZ$, come $ACEG \times \frac{1}{2} CE$ sta ad $VXYZ \times \frac{1}{2} IL$; e che tale proporzionalità sussiste, o s'intendano ambidue i prismi fitti orizzontalmente in un muro, o nell'estremità loro vengano a due sostegni appoggiati. Imperciocchè la lunghezza totale arbitraria, e le lunghezze parziali, ec. si suppongono eguali in entrambi, e le rette $\frac{1}{2} CE$, e $\frac{1}{2} IL$ sono le distanze del centro di gravità del rettangolo $ACEG$, e del parallelogrammo $VXYZ$ ai respettivi *assi d'equilibrio.*

Supponiamo pertanto quest'equazione

$$ACEG \times \frac{1}{2} CE = VXYZ \times \frac{1}{2} IL \tag{3}$$

che soddisfarebbe ad una delle condizioni del problema, se il rettangolo arbitrario $ILMN$ (fig. 15) fosse lo stesso, che il rettangolo $BDFH$ (fig. 14).

Ma perchè dall'altra condizione di esso problema nasce quest'analogia: $ACEG \cdot VXYZ :: f \cdot g$, e conseguentemente $VXYZ = \frac{g}{f} ACEG$: perciò ponendo questo valore di $VXYZ$ nell'equazione (3), si trova

$$CE \text{ (ed anche } AG) = \frac{g}{f} IL = \frac{pg}{f},$$

se p significa IL ed essendo come sopra

$$\frac{g}{f} ACEG \text{ (cioè } \frac{g}{f} AC \times CE) = VXYZ, \text{ vale a dire } \frac{g^2}{f^2} AC \times IL = \frac{1}{2} IL \times LM;$$

trovasi ancora

$$AC = \frac{f^2}{2g^2} LM = \frac{qf^2}{2g^2}, \text{ se } q \text{ significa } LM.$$

Ora si consideri (fig. 14), che i triangoli CAB, ECD, GAH sono simili, mentre gli angoli in H, in B, in D, in A, ed in C sono retti per l'ipotesi, e primieramente l'angolo BAC è uguale all'angolo DCE, perchè tanto l'uno, quanto l'altro di essi fa un angolo retto insieme coll'angolo BCA; di modo che anche l'angolo BCA, è uguale all'angolo DEC, adunque il triangolo CAB è simile al triangolo ECD.

Secondariamente l'angolo BCA è uguale all'angolo HAG, perchè sì l'uno, come l'altro fa un angolo retto insieme coll'angolo HAG, talchè anche l'angolo BAC è uguale all'angolo HGA; adunque il triangolo CAB è simile al triangolo GAH.

Chiamando pertanto u l'incognita AB (fig. 14), e z l'altra incognita BC, come pure a il lato BH, e b l'altro lato BD del rettangolo $BDFH$; la similitudine dei suddetti triangoli CAB, ECD, GAH fornisce le due seguenti analogie

$$AC\left[\frac{qf^2}{2g^2}\right] \cdot AB\,(u) :: CE\left[\frac{pg}{f}\right] \cdot CD = \frac{2pg^3u}{qf^3}$$

$$AC\left[\frac{qf^2}{2g^2}\right] \cdot BC\,(z) :: AG\left[\frac{pg}{f}\right] \cdot HA = \frac{2pg^3z}{qf^3}.$$

Laonde si scoprono queste due equazioni

$$BD\,(b) = BC\,(z) + CD\left[\frac{2pg^3u}{qf^3}\right]$$

$$BH\,(a) = AB\,(u) + HA\left[\frac{2pg^3z}{qf^3}\right]$$

dalla prima delle quali viene

$$z = b - \frac{2pg^3u}{qf^3}$$

e dalla seconda ben maneggiata

$$z = (a - u)\,\frac{qf^3}{2pg^3}.$$

Si confrontino questi due valori di z, e operando a dovere si troverà

$$4p^2g^6u - q^2f^6u = 2bpqf^3g^3 - aq^2f^6$$

donde nasce

$$u = \frac{(2bpg^3 - aqf^3)\,qf^3}{4p^2g^6 - q^2f^6}$$

e conseguentemente

$$u = \frac{(2bpg^3 - aqf^3)\,qf^3}{(2pg^3 - qf^3)\,(2pg^3 + qf^3)}. \tag{4}$$

Trovato questo valore di $BA\,(u)$, dal punto A (fig. 14) col raggio $AC = \dfrac{qf^2}{2g^2}$ descrivasi un arco di cerchio, che dovrà tagliare in C il lato

BD del rettangolo *BDFH;* e dai punti *C*, ed *A* coi raggi *CE*, ed *AG* ambidue uguali a $\frac{pg}{f}$ si descrivano due archi di cerchio, che dovranno tagliare in *G*, ed in *E* respettivamente i lati *HF*, e *DF* del medesimo rettangolo *BDFH:* mentre così avvenendo, il rettangolo *ACEG* rimarrebbe iscritto nell'altro *BDFH*, e sarebbe sciolto il problema, se il rettangolo *ILMN* (fig. 15) fosse lo stesso, che il rettangolo *BDFH* (fig. 14).

Ma il suddetto rettangolo indeterminato *ILMN* in due maniere può esser lo stesso che il rettangolo *BDFH:*

Primieramente se *IL* (p) è uguale a *BH* (a), ed *IN* (q) è uguale a *BD* (b).

Secondariamente se *IL* (p) è uguale a *BD* (b), ed *IN* (q) è uguale a *BH* (a).

In virtù della prima maniera pongasi nell'equazione (4) a in luogo di p, e b, in vece di q; si vedrà essere

$$(5) \qquad u = \frac{(2g^3 - f^3)\, ab^2 f^3}{(2ag^3 - bf^3)\,(2ag^3 + bf^3)}$$

AC sarà eguale a $\frac{bf^2}{2g^2}$, e *CE* sarà eguale ad $\frac{ag}{f}$.

In virtù della seconda maniera si surroghi nell'equazione (4) b in cambio di p, ed a in luogo di q, e ne risulterà

$$(6) \qquad u = \frac{(2b^2g^3 - a^2f^3)\, af^3}{(2bg^3 - af^3)\,(2bg^3 + af^3)}$$

AC sarà eguale ad $\frac{af^2}{2g^2}$, e *CE* sarà eguale a $\frac{bg}{f}$.

Questa doppia soluzione è diversa dalle tre, che io diedi del medesimo problema nel tomo XV del Giornale de' letterati d'Italia. Essa è più semplice, e più universale.

Corollario I (fig. 14). — Se il rettangolo *BDFH* è un quadrato, sostituiscasi a invece di b in ambedue l'equazioni (5), e (6), e dall'una, e dall'altra risulterà la seguente

$$u = \frac{(2g^3 - f^3)\, af^3}{(2g^3 - f^3)\,(2g^3 + f^3)}$$

vale a dire questa equazione elegante

$$(7) \qquad u = \frac{af^3}{2g^3 + f^3}.$$

Corollario II (fig. 14). — Nella stessa supposizione di $BDFH$ quadrato, in conseguenza dell'equazione (7) viene questa proporzionalità:

a, cioè HB, sta ad u, cioè ad AB, come $2g^3 + f^3$ sta ad f^3; laonde per quel modo di argomentare, che dal Clavio appellasi *division di ragione*, $\frac{a-u}{u}$, cioè $\frac{HA}{AB} = \frac{2g^3}{f^3}$.

Avvertimento.

Nel tomo XIX del Giornale de' letterati d'Italia pag. 438 si legge l'infrascritto problema proposto dall'autore.

Problema. — Sia data una parabola biquadratica primaria, che à per equazione costitutiva $x^4 = y$, e sia data ancora una porzione di essa; dimando, che si assegni un'altra porzione nella medesima curva tale, che la differenza delle porzioni suddette sia rettificabile.

Se i geometri si degneranno riflettere a quanto scrive l'incomparabile signor Giovanni Bernulli negli Atti di Lipsia dell'anno 1698 alla pag. 465 dopo la linea 5, non giudicheranno questo problema affatto indegno della loro attenzione.

Sono dunque pregati a darne fuori lo scioglimento insieme coll'analisi, e a determinare una certa limitazione che il problema richiede.

Non essendo comparsa veruna soluzione di questo problema, l'autore pubblicò nel tomo XXII del suddetto Giornale pag. 229, il seguente schediasma.

XXIX.

NUOVO METODO

PER RETTIFICARE LA DIFFERENZA DI DUE ARCHI

(UNO DE' QUALI È DATO) IN INFINITE SPECIE DI PARABOLE IRRETTIFICABILI: COLLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA PROPOSTO NEL XIX TOMO DEL GIORNALE DE' LETTERATI D'ITALIA; E COLLA MANIERA DI TAGLIARE PER METÀ IL QUADRANTE DELLA CURVA LEMNISCATA (*).

AVVERTIMENTO. — Per dar giudizio di questo metodo può vedersi ciò, che dice il sommo geometra sig. Giovanni Bernulli negli Atti di Lipsia dell'anno 1697 alla pag. 465.

LEMMA I (fig. 16, e 17). — Sia la parabola OAB di tal natura, che si abbia $x^{\frac{m+2}{2}} = \frac{m+2}{2} y$ (m esprime qualsivoglia esponente, x significa l'abscisse, e y le ordinate, che sono perpendicolari alle medesime abscisse; e parallele alla retta OZ, che passa pel vertice), abbiasi ancora $OF = x$, $Of = z$; indi si tirino le ordinate Fa, fa; dico che

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^m + 1}} + \int \frac{dz}{\sqrt{z^m + 1}}$$

è uguale alla somma dei due archi OA, ed Oa moltiplicata per $\frac{m+2}{m}$, meno la somma delle due tangenti AV, ed au moltiplicata per $\frac{2}{m}$.

DIMOSTRAZIONE. — Il secondo membro dell'equazione espressa qui sopra si risolve nella seguente quantità complessa, il di cui differenziale è lo stesso, che il differenziale del primo membro della suddetta equazione, come ciascuno potrà sperimentare da se medesimo

$$\frac{m+2}{m} \int dx \sqrt{x^m+1} - \frac{2}{m} x \sqrt{x^m+1} + \frac{m+2}{m} \int dz \sqrt{z^m+1} + \frac{2}{m} z \sqrt{z^m+1}.$$

Dunque, ec. $Q. E. D.$

(*) Giornale de' letterati d'Italia, tomo XX, pag. 229.

Lemma II problematico. — Sommare il binomio $x^{cm}dx\,(x^m+1)^{f-1}$ in maniera che nell'Integrale di esso altro di curvo non si contenga, fuorchè questa espressione $\int dx\,(x^m+1)^{f-1}$ affetta da quantità costanti, e il resto costi di sole espressioni rettilinee, la lettera c denota qualsivoglia numero intero positivo, o negativo, ed f qualsivoglia esponente.

Preparazione. — Prima di tentare lo scioglimento della presente questione (la quale potrebbe risolversi anche più generalmente) sarà bene avvertire, che la differenza di $x^{1+\varphi m}(x^m+1)^f$, in cui f, e φ esprimono qualunque esponente, è uguale alla seguente quantità complessa $[(1+\varphi m)\,x^{\varphi m} + (1+\varphi m+fm)\,x^{\varphi m+m}]\,dx\,(x^m+1)^{f-m}$.

Soluzione. — Concepiscasi, che questa quantità complessa

$$Gx^{cm}dx\,(x^m+1)^{f-1} + dx\,(x^m+1)^{f-1},$$

la quale per brevità si chiami R, abbia per suo Integrale l'infrascritta serie Q continuata dall'una, e dall'altra parte, quanto bisogna, avvertendo, che in essa gli esponenti di x sono in progressione aritmetica, e che G, b, A, B, ec. sono costanti indeterminate.

$$\text{(Q)} \qquad [bx^{1-m} + Ax + xB^{1+m}]\,(x^m+1)^f$$

la medesima serie Q differenziata produce in virtù di quanto si è detto nella preparazione l'infrascritta serie P, in cui gli esponenti di x sono anch'essi in progressione aritmetica; questa serie P è composta nel caso nostro dei quattro seguenti termini, ma può facilissimamente continuarsi in infinito dall'una, e l'altra parte, conforme la serie Q.

(P) Primo termine $(1-m)\,bx^{-m}$; secondo termine $Ax^o + (1-m+fm)\,bx^o$; terzo termine $(1+fm)\,Ax^m + (1+m)\,bx^m$; quarto termine $(1+m+fm)\,Bx^{2m}$. Tutti questi termini, e gli altri, quando vi sieno, debbono essere moltiplicati per $dx\,(x^m+1)^{f-1}$.

S'eguagli ora la quantità complessa R alla serie P, immaginando i due termini della prima eguali a quei due termini della seconda, che sono dotati de' medesimi esponenti; gli altri termini della serie P si facciano eguali a zero, e in questa forma resteranno determinati tutti i coefficienti G, b, A, B, ec. La serie Q costerà d'un numero finito di termini, e si avrà la serie $P = R$, onde integrando, trasponendo, e divi-

dendo per G ne risulterà $\int x^{cm} dx\,(x^m+1)^{f-1}$ eguale alla serie Q divisa per G, meno $\int dx\,(x^m+1)^{f-1}$ divisa anch'essa per G. Q. E. I.

Definizioni. — La serie Q sarà per l'avvenire espressa colla lettera majuscola $X : OF\,(x)$, ed $OH\,(t)$ sono due abscisse date, o arbitrarie: $Of\,(z)$ è un'abscissa, il cui valore è dato algebraicamente per x, e costanti, ed $Oh\,(u)$ è un'altra abscissa data per t, come appunto x è data per x.

Una serie data per z, o per t, ovvero per u, come la serie Q è data per x, si esprimerà respettivamente colle altre tre lettere majuscole Z, T, V.

Egli è dunque manifesto, ch'essendo date le abscisse x, e t coll'espressione algebraica di z, è data ancora l'espressione algebraica di u, e che avendosi X, si ànno eziandio Z, T, V.

Un polinomio si dirà trasformato in un altro polinomio negativavamente simile, quando moltiplicando il primo col segno positivo, e l'altro col segno negativo, si ritrova, che l'uno è dato per la sua variabile, come l'altro per la propria, verbigrazia, se il binomio $\frac{x^{cm}\,dx}{\sqrt{x^m+1}}$ è cangiato in questo altro $-\frac{z^{cm}\,dz}{\sqrt{z^m+1}}$ egli si dirà trasformato in un altro binomio negativamente simile.

Corollario I (fig. 16, e 17.) — Se nella parabola OAB l'abscissa $Of\,(z)$ è di tal natura, che essa decresca al crescere di x, e che per suo mezzo il binomio $\frac{x^{cm}\,dx}{\sqrt{x^m+1}}$ sia trasformato in un altro negativamente simile, si avrà questa equazione $\frac{x^{cm}\,dx}{\sqrt{x^m+1}}+\frac{z^{cm}\,dz}{\sqrt{z^m+1}}=0$. Prendasi ora mediante il secondo lemma l'Integrale di amendue i termini della stessa equazione, ponendo $\frac{1}{2}$ in cambio di f nelle serie Q, e P, indi moltiplicando per G, e trasponendo, si troverà la seguente espressione costante

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^m+1}}+\int\frac{dz}{\sqrt{z^m+1}}-X-Z.$$

Indi pongasi, in luogo de' primi due termini di questa espressione, il loro valore ritrovato nel primo lemma, e dividendo per $\frac{m+2}{m}$ si scoprirà, che

La somma di due archi OA, ed Oa; meno $\frac{m}{m+2}(X+Z)$; meno la somma delle due tangenti AV, ed au moltiplicata per $\frac{m}{m+2}$ è una quantità costante.

Per la stessa ragione facendo $OH = t$, ed assumendo $Oh = u$, si vedrà, che la somma de' due archi OB, ed Ob; meno $\frac{m}{m+2}(T+V)$; meno la somma delle due tangenti BZ, e bz moltiplicata per $\frac{2}{m+2}$ è parimente una quantità costante. Dunque sottraendo la prima delle due ultime quantità costanti dalla seconda, si scopre, che

L'arco AB meno l'arco ab è uguale ad $\frac{m}{m+2}(V+T-X-Z)$; più la somma delle due tangenti estreme BZ, e bz moltiplicata per $\frac{2}{m+2}$; meno la somma delle due tangenti medie AV, ed au moltiplicata per $\frac{2}{m+2}$.

Corollario II. — Ma se per mezzo di z il binomio $x^{cm} dx \sqrt{x^m+1}$ venisse trasformato in un altro negativamente simile, allora ponendo nella serie Q, e P $\frac{3}{2}$ in luogo di f si troverà in simigliante maniera, che la somma de' due archi OA, ed Oa; meno X; meno Z è una quantità costante, e si vedrà finalmente, operando come si è fatto nel precedente corollario che

L'arco AB, meno l'arco ab è uguale a $T+V-X-Z$.

Teorema. — Sia il polinomio (Y) $\frac{x^{n-1}dx\,(x^n+p)^{h-1}}{E^h}$, nel quale

$$\begin{aligned} E = lx^{2n} &+ 2\,lpx^n + lp^2, \\ &+ lqx^n \quad + lpq \\ &\qquad\qquad + lr \end{aligned}$$

dico, che se si prenderà

$$z^n = \frac{r - px^n - p^2}{x^n + p}, \tag{1}$$

il polinomio Y sarà trasformato in un altro negativamente simile. Le lettere l, p, q, r significano qualsivoglia quantità costante, ed anche zero a riserva di l, che non può essere nulla, e le lettere n, ed h esprimono qualunque esponente possibile.

DIMOSTRAZIONE. — Suppongasi

$$x^n = s - p, \tag{2}$$

e operando a dovere il polinomio Y si muterà in quest'altro

$$\frac{\frac{1}{n} s^{h-1} ds}{(ls^2 + lqs + lr)^h},$$

prendasi poscia

$$s = \frac{r}{z^n} + p, \tag{3}$$

e fatte le debite operazioni ne risulterà $\frac{1}{n} s^{h-1} ds = -\frac{rhz^{n-1}dz}{(z^n+p)^{h+1}}$, che riducesi a quest'altra espressione equivalente $-\frac{rhz^{n-1}dz\,(z^n+p)^{h-1}}{(z^n+p)^{2h}}$; troverassi ancora $ls^2 + lqs + lr$ eguale a questa quantità complessa

$$lr + \frac{lqr}{z^n + p} + \frac{lr^2}{(z^n + p)^2}.$$

Dunque riducendo il tutto ad una succinta espressione, e comparando le due equazioni (2), e (3), si conoscerà chiaramente, che se si attribuisce a z^n il suo valore espresso nell'equazione (1) il polinomio Y sarà trasformato in un altro negativamente simile.

COROLLARIO I (fig. 16, e 17). — Se nel polinomio Y, e nell'equazione (1) si suppone $p=0$; $l=1$; $q=0$; $h=-\frac{1}{2}$; $n=-\frac{2}{1-4c}$ (c rappresenta, come sopra, qualunque numero intiero, positivo, o negativo, anzi ne' corollarj susseguenti potrà rappresentare anche zero) si ottiene $z=\frac{1}{x}$, e il seguente binomio, cioè $x^{\frac{4c}{-1-4c}}dx$, moltiplicato per la radice della quantità complessa $x^{\frac{4}{-1-4c}}+1$ sarà trasformato in un altro negativamente simile, di modo che confrontando questo corollario col II corollario del II lemma, si à $m=\frac{4}{-1-4c}$, e la parabola OAB à per sua equazione $x^{\frac{1-4c}{-1-4c}} = \left(\frac{1-4c}{-1-4c}\right) y$.

Corollario II (fig. 16, e 17). — Ma se (salve tutte le altre supposizioni dell'antecedente corollario) $h = \frac{1}{2}$; $n = \frac{2}{1-4c}$; allora il seguente binomio, cioè $x^{\frac{4c}{1-4c}}$ diviso per la radice di questa quantità complessa $x^{\frac{4}{1-4c}} + 1$ si trasforma in un altro negativamente simile, e il presente corollario comparato col I corollario del II lemma somministra $m = \frac{4}{1-4c}$, e l'equazione della parabola OAB è $x^{\frac{3-4c}{1-4c}} = \left(\frac{3-4c}{1-4c}\right) y$ dovendosi avvertire che $z = \frac{1}{x}$, come sopra.

Corollario III. — La semplice supposizione di $b = \frac{1}{2}$ cangia il polinomio Y in quest'altro polinomio W, che per conseguenza si trasforma, mediante il teorema, in un altro negativamente simile.

(W) $x^{n-1}dx$ diviso per la radice della quantità complessa

$$\begin{aligned} &lx^{3n} + 3\,lpx^{2n} + 3\,lp^2x^n + lp^3 \\ &\quad + lqx^{2n} \quad + 2\,lqpx^n + lqp^2 \\ &\qquad\qquad\quad + lrx^n \quad + lrp \end{aligned}$$

Corollario IV (fig. 16 e 17). — È manifesto, che il quadrinomio W rappresenta qualsivoglia quadrinomio della sua specie a cagione delle costanti indeterminate, che egli contiene, epperò facendo $n = \frac{1}{1-3c}$; $l = 1$; $3\,lp + lq = 0$; $3\,lp^2 + 2\,lqp + lr = 0$; $lp^3 + lqp^2 + lrp = 1$, ne risulta $r = 3$; $p = 1$, e per conseguenza l'equazione (1) mostra, che $z^{\frac{1}{1-3c}}$ è uguale alla quantità complessa $2 - x^{\frac{1}{1-3c}}$ divisa per la quantità complessa $x^{\frac{1}{1-3c}} + 1$, e il seguente binomio, cioè $x^{\frac{3c}{1-3c}}$ diviso per la radice della quantità complessa $x^{\frac{3}{1-3c}} + 1$ viene trasformato in un altro negativamente simile; laonde la comparazione di questo corollario col I corollario del II lemma determina $m = \frac{3}{1-3c}$, e dà per equazione della parabola OAB $x^{\frac{5-6c}{2-6c}} = \left(\frac{5-6c}{2-6c}\right)y$. Il valore di $z^{\frac{1}{1-3c}}$ espresso qui sopra

fa vedere, che OF, ed OH debbono essere maggiori di $\frac{1}{2}$ elevato alla potestà $3c-1$, quando c esprime un numero positivo, ma che non debbono essere maggiori di 2 elevato alla potestà $1-3c$, quando c rappresenta un numero negativo, o pur zero.

Corollario V (fig. 16 e 17). — Lasciando nel quadrinomio W tutte le supposizioni del corollario precedente a riserva di n, che deve ora supporsi $= -\frac{2}{1-6c}$, l'equazione (1) fa scoprire che $z^{\frac{2}{1-6c}}$ è uguale alla quantità complessa $x^{\frac{2}{1-6c}}+1$ divisa per la quantità complessa $2-x^{\frac{2}{1-6c}}$; si trova eziandio, che il seguente binomio, cioè $x^{\frac{-3+6c}{1-6c}}dx$ diviso per la radice della quantità complessa $x^{\frac{-6}{1-6c}}+1$, ovvero quest' altro binomio equivalente, cioè $x^{\frac{6c}{1-6c}}dx$ diviso per la radice della quantità complessa $x^{\frac{6}{1-6c}}+1$, si trasforma in un altro binomio negativamente simile. Quindi è, che il confronto del presente corollario col I corollario del II lemma somministra $m=\frac{6}{1-6c}$, e ne siegue, che l'equazione della parabola OAB è $x^{\frac{4-6c}{1-6c}}=\left(\frac{4-6c}{1-6c}\right)y$. Il valore di $z^{\frac{2}{1-6c}}$ notato qui sopra dimostra, che OF, ed OH non debbono esser maggiori di 2 elevato alla dignità $\frac{6c-1}{2}$, quando c esprime un numero positivo, ma che debbono esser maggiori di $\frac{1}{2}$ elevato alla dignità $\frac{1-6c}{2}$, quando c è un numero negativo, o pur zero.

Corollario VI generale. — Egli era visibile, che i precedenti corollarj I, II, IV, e V rettificano la differenza di due archi (uno de' quali è dato) in quattro infinità di specie di parabole irrettificabili; imperciocchè i valori di z espressi ne' corollarj suddetti sono tali, che al crescere di x, la stessa z decresce, e in fatti si trova sempre z eguale a una frazione, in cui l'aumento di x o lascia invariato il numeratore, e fa crescere il denominatore, o se fa crescere il numeratore, aumenta assai più il denominatore, oppure diminuisce il numeratore, ed accresce il denominatore, come potranno i lettori accertarsi da se medesimi.

Scolio. — Ne' seguenti esempj, che sono i più semplici, si avverta, che la lettera a rappresenta l'unità arbitraria, la quale serve a rendere le dimensioni uniformi. La brevità, che voglio osservare, non mi permette di esporre molte verità, che nascono da questi principj; tra le quali si comprendono alcune altre maniere di giungere a queste rettificazioni, ne dedurrò solamente la soluzione dell'infrascritto problema concernente la curva lemniscata famosa pel suo uso nella costruzione delle curve elastica, e isocrona paracentrica.

Esempio I pel I corollario del teorema (fig. 17). — Se $c = 1$, allora $m = -\frac{4}{5}$, e l'equazione della parabola è $x^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}y$, cioè $y^5 = \frac{3125}{243}a^2x^3$; $z = \frac{a^2}{x}$; $X = x\sqrt{x^{\frac{-4}{5}} + 1} = \frac{AV^3}{OF^2}$, e si à l'arco AB meno l'arco ab eguale a $\frac{BZ^3}{OH^2}$; più $\frac{bz^3}{Ob^2}$; meno $\frac{AV^3}{OF^3}$; meno $\frac{au^3}{Of^2}$.

Esempio II pel II corollario del teorema (fig. 16). — Se $c = 0$, allora $m = 4$; l'equazione della parabola è $x^3 = 3a^2y$; $z = \frac{a^2}{x}$; $X = 0$, e si à l'arco AB meno l'arco ab eguale al terzo delle due tangenti estreme BZ, e bz; meno il terzo delle due tangenti medie AV, ed au.

Esempio III pel II corollario del teorema (fig. 17). — Se $c = 1$, allora $m = -\frac{4}{3}$; l'equazione della parabola è $x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}y$, cioè $y^3 = 27a^2x$; $z = \frac{a^2}{x}$; $X = x\sqrt{x^{\frac{-4}{3}} + 1} = AV^3$, e si à l'arco AB meno l'arco ab eguale alle due tangenti estreme BZ, bz; meno le due tangenti medie AV, ed au.

Corollario. — L'espressione analitica della somma delle due tangenti AV, ed au equivale a $x\left[x^{\frac{-4}{3}} + 1\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{AV^3}{OF^2}$, se si pone $\frac{1}{x}$ in luogo di z, ed equivale ancora a $z\left[z^{\frac{-4}{3}} + 1\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{au^3}{Of^2}$, se si pone $\frac{1}{2}$ in luogo di x, ec.

Esempio IV pel IV corollario del teorema (fig. 16). — Se $c = 0$; allora $m = 3$; l'equazione delle parabola è $x^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}y$, cioè $x^5 = \frac{25}{4}a^3y^2$; $z = \frac{2a^2 - ax}{x + a}$; $X = 0$, e si à l'arco AB meno l'arco ab eguale a due

quinti delle due tangenti estreme BZ, e bz; meno due quinti delle due tangenti medie AV, ed au.

L'abscisse OF, ed Ob non debbono essere maggiori di $2a$.

Esempio V pel corollario V del teorema (fig. 17). — Se $c = 1$, allora $m = \frac{-6}{5}$; l'equazione della parabola è $x^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}y$, cioè $y^5 = \frac{3195}{32}a^3x^2$; $z^{\frac{2}{5}}$ è uguale alla quantità complessa $2a^{\frac{2}{5}} - x^{\frac{2}{5}}$ moltiplicata per $\frac{a}{x^{\frac{2}{5}} + a^{\frac{2}{5}}}$;

$X = x\sqrt{x^{-\frac{6}{5}} + 1} = AV$, e si à l'arco AB meno l'arco ab eguale alle due tangenti estreme BZ, e bz; meno le due tangenti medie AV, ed au.

Le abscisse OF, e OH non debbono esser maggiori di $4a\sqrt{2}$.

Esempio VI pel corollario V del teorema, che scioglie il problema da me proposto nel XIX tomo del giornale de' letterati d'Italia (fig. 16). — Se $c = 0$, allora $m = 6$, l'equazione della parabola è $x^4 = 4a^3y$;

$$z = a\sqrt{\frac{x^2 + a^2}{2x^2 - a^2}};\ X = 0,$$

e si à l'arco AB meno l'arco ab eguale al quarto delle due tangenti estreme BZ, e bz; meno il quarto delle due tangenti medie AV, ed au.

Le abscisse OF, e OH debbono esser maggiori di $a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Esempio VII pel IV corollario del teorema, che scioglie diversamente lo stesso problema (fig. 17). — Se $c = 1$ allora $m = -\frac{3}{2}$, l'equazione della parabola è $x^{\frac{1}{4}} = \frac{y}{4a^{\frac{3}{4}}}$, cioè $y^4 = 256a^3x$; $z = \frac{ax + 2a\sqrt{ax} + a^2}{4x - 4\sqrt{ax} + a}$;

$X = x\sqrt{x^{-\frac{2}{3}} + 1} = AV$, e si à l'arco AB meno l'arco ab eguale alle due tangenti estreme BZ, e bz; meno le due tangenti medie AV, ed au.

Le abscisse OF, ed OH debbono esser maggiori di $\frac{1}{4}a$.

PROBLEMA (fig. 18). — Sia l'arco $CLPA$ la quarta parte della periferia della curva lemniscata, che à per sua equazione $x^2 + y^2 = a\sqrt{2x^2 - 2y^2}$

(prendendo x per l'abscisse, e y per l'ordinate, che sono ad esse normali) dividere per mezzo l'arco suddetto $CLPA$.

Soluzione. — Facciasi

$$x = \sqrt{ag + g^2}. \tag{4}$$

e si avrà $y = \sqrt{ag - g^2}$, e in conseguenza l'elemento dell'arco CL sarà $\dfrac{dg}{\sqrt{-\frac{2g^3}{a^3} + \frac{2g}{a}}}$; suppongasi dunque nel quadrinomio W; $g = x$; $n = 1$; $l = -\frac{2}{a^3}$; $3lp + lq = 0$; $3lp^2 + 2lgp + lr = \frac{2}{a}$; $lp^3 + lqp^2 + lrp = 0$, e si otterrà $r = 2a^2$, e $p = a$, e questi valori introdotti nell'equazione (1), dove si dee porre ancora g in cambio di x, faranno vedere, che facendo

$$z = \frac{a^2 - ag}{g + a}, \text{ si avrà } \frac{dg}{\sqrt{-\frac{2g^3}{a^3} + \frac{2g}{a}}} = \frac{-dz}{\sqrt{-\frac{2z^3}{a^3} + \frac{2z}{a}}} \tag{5}$$

in virtù del teorema; ma già si è veduto, che il primo membro di questa ultima equazione esprime l'elemento dell'arco diretto CL, purchè l'abscissa CV sia $= x$, e la letttera g abbia il valore positivo, che si deduce dall'equazione (4). Di più il secondo membro di questa ultima equazione rappresenta l'elemento dell'arco inverso PA, purchè chiamando w l'abscissa CM si abbia

$$w = \sqrt{az + z^2}, \tag{6}$$

dunque l'arco diretto CL è uguale all'arco inverso PA.

Da tutto questo deducesi una nuova maniera di adoperare la curva lemniscata nella costruzione delle celebri curve elastica, e isocrona paracentrica. Per meglio assicurarsi dell'esattezza di questo raziocinio, si osservi, che quando $CV\ (x) = 0$, allora l'equazione (4) mostra, che $g = 0$; e ponendo zero in vece di g nell'equazione (5) ritrovasi $z = a$, e questo valore di z sostituito nell' equazione (6) somministra $w = a\sqrt{2}$, come appunto deve essere, mentre dall'equazione della curva si deduce, che l'asse $CA = a\sqrt{2}$.

Ciò supposto fingasi fatto quello, che il problema richiede, e sia l'ordinata ST quella, che taglia per mezzo l'arco intiero $CLPA$; dunque essendo in questo caso l'arco diretto CT eguale all'arco inverso TA, i due punti V, ed M coincidono in S, e $CV\ (x)$ diviene eguale a $CM\ (w)$,

e conseguentemente g diventa anch'essa eguale a z per cagione dell'equazioni (4), e (6); laonde ponendo nell'equazione (5) g in cambio z ritrovasi

$$(7) \qquad g^2 + 2\,ag = a^2,$$

donde si deduce $ag = -a^2 + a^2\sqrt{2}$; ordinando poi l'equazione (4) si à $g^2 + ag = x^2$, e sottraendo quest'ultima equazione dall'equazione (7) ne risulta $ag = a^2 - x^2$, comparando finalmente i due valori di ag si scuopre $CS\,(x) = a\sqrt{1 - 2\sqrt{2}}$ e però calando dal punto C dell'asse la normale CQ ad esso eguale, prolunghisi questa dall'altra parte di C sino ad O in modo, che QO sia eguale all'ipotenusa QA, prendasi poscia $CR = \frac{1}{2}\,QO$, e sul diametro OR descrivasi il semicerchio OSR, che taglia l'asse nel punto S, dico, che l'ordinata ST divide per mezzo l'arco intiero $CLPA$. $Q.E.I.$

Si noti, che possono ritrovarsi due altri valori di z capaci di trasformare il binomio $\dfrac{dg}{\sqrt{-\dfrac{2\,g^3}{a^3} + \dfrac{2\,g}{a}}}$ in un altro negativamente simile, ma questi valori sono inutili per lo scioglimento del presente problema, com'è facile a dimostrarsi.

XXX.

GIUNTA AL PRECEDENTE SCHEDIASMA

SOPRA LA MANIERA DI RETTIFICARE LA DIFFERENZA DI DUE ARCHI IN INFINITE SPECIE DI CURVE PARABOLICHE IRRETTIFICABILI, CON UNA NUOVA PROPRIETÀ DELLA PARABOLA D'ARCHIMEDE, EC. (*).

AVVERTIMENTO. — Tutto quello, che io dico nel presente scritto à relazione all'altro, che l'à preceduto, ed è necessario di averlo sotto gli occhi per intendere ciò, che segue.

Pongasi nel quadrinomio W (registrato nel III corollario del teorema), e nell'altro quadrinomio a lui negativamente simile $-\frac{4}{t}$ in vece di x^n, e $\frac{1}{b^2}$ in luogo di z^n, facciasi poscia $l = -\frac{1}{4}$; $3lp + lq = 1$, il coefficiente dei terzi termini delle quantità sotto il vincolo, e gli ultimi termini di esse eguali a zero; e si troverà $p = -4$; $r = 16$; l'equazione (1) del teorema si cangerà in quest'altra $b = \frac{1}{2}\sqrt{t+1}$, e col suo mezzo si otterrà in virtù del teorema quest'equazione differenziale

$$\frac{dt}{\sqrt{t^2+t}} = \frac{2dh}{\sqrt{h^2-\frac{1}{4}}}.$$

Suppongasi ora $t = x^{\frac{2}{2c+1}}$, e $h = z^{\frac{2}{2c+1}} + \frac{1}{2}$, e si vedrà che mediante quest'equazione

$$z^{\frac{2}{2c+1}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^{\frac{2}{2c+1}} + 1} \tag{8}$$

(*) Giornale de' Letterati d' Italia, tomo XXIV, pag. 363.

si salverà quest'altra equazione differenziale

$$\frac{x^{\frac{-2c}{2c+1}}dx}{\sqrt{x^{\frac{xc}{2c+1}}+1}}-\frac{2z^{\frac{-2c}{2c-2}}dz}{\sqrt{z^{\frac{2}{2c+1}}+1}}=0.$$

L'ultima equazione integrata e maneggiata col metodo del I e II lemma conduce a questa nuova equazione (9) (vedasi la figura 19).

(9) L'arco OA; meno due archi Oa; meno $\frac{m}{m+2}X$; meno $\frac{2AV}{m+2}$; più $\frac{2mZ}{m+2}$; più $\frac{4au}{m+2}$ sono eguali a zero.

Dovendosi concepire, che $m=\frac{1}{2c+1}$, e che c esprime qualsivoglia numero intero, positivo, ed anche zero, e non mai negativo.

S' immagini eziandio che la curva OAa sia una parabola di questa equazione $x^{\frac{2c+2}{2c+1}}=\left(\frac{2c+2}{2c+1}\right)y$; che la retta OV parallela alle ordinate passi pel vertice O, e che le rette AV, au siano tangenti nei punti respettivi A, ed a. Finalmente si noti, che intanto il secondo membro dell'equazione (9) è zero, in quanto l'equazione (8) mostra, che l'annullamento di x annulla anche z ec.

Esempio. — Se $c=0$, la curva OaA è la parabola d'Archimede, che à per equazione $x^2=2ay$; in questo caso la lettera majuscola X esprime zero, e dall'equazioni (8), e (9) si deduce, che prendendo l'arco OA determinato dall'abscissa arbitraria x, e in esso l'arco Oa determinato dall' abscissa $OR\ (z)=\sqrt{-\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}\sqrt{x^2+a^2}}$, ovvero dall'ordinata $aR=-\frac{a}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{x^2+a^2}$ si ottiene

$$\text{Arco } OA-2 \text{ arco } Oa-\frac{1}{2}AV+au=0.$$

Ma la tangente $au=\frac{z}{a}\sqrt{z^2+a^2}$ è uguale alla metà dell'abscissa $OT\ (x)$, come si prova sostituendo il valore di z in x; di più egli è chiaro, che il punto S divide per mezzo la tangente AV, e l'abscissa OT, e finalmente assumendo la porzione OM dell'abscissa eguale all'ottava

parte del parametro, cioè alla metà della distanza dall'umbilico al vertice della curva, e conducendo l'indefinita MN parallela ad OV, trovasi, che la porzione NV della tangente AV compresa tra queste parallele meno la costante OM è uguale all'ordinata aR. Resta dunque dimostrato il seguente teorema, che contiene una nuova e bella proprietà di questa in ogni tempo famosissima curva.

TEOREMA. — Dividasi qualunque arco OA di questa parabola nel punto a in maniera, che l'abscissa aR sia eguale alla porzione NV della tangente del detto arco meno la costante OM; io dico, che la porzione Aa dell'arco intiero AO meno l'altra porzione di esso aO è uguale alla metà della tangente AV meno la metà dell'abscissa OT.

SCOLIO. — L'arco Aa meno l'arco aO è dunque eguale ad $AS-ST$, ovvero a $SV-SO$, e tutte quest'espressioni equivagliono a quest'altra $\frac{1}{2}AV-au$; ma chi desidera espresso in z il valore della differenza degli archi suddetti, lo ritroverà eguale alla seguente quantità $\frac{2x^3}{a^3}\sqrt{z^2+a^2}$, che equivale a quest'altra $\frac{aR \times au}{OM}$.

Egli è visibile che questo teorema somministra la genuina soluzione d'alcuni problemi sopra la rettificazione della differenza di certi archi della parabola Archimedea, i quali problemi debbono essere considerati come piani, di modo che peccarebbe in geometria secondo la frase del Cartesio, chi tentasse di sciorli coll'ajuto dell'iperbola.

ALTRO ESEMPIO. — Se $c=1$, allora la curva OaA è la terza parabola del quarto grado, detta ancora cubico-biquadratica, ed à per equazione $x^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}y$, cioè $x^4=\frac{64}{27}y^3$; in questo caso la lettera majuscola X è uguale alla tangente AV moltiplicata per $\frac{3}{2x^{\frac{2}{3}}}$, e l'equazione (8), e (9) fanno scoprire, che assumendo l'abscissa OR (z) eguale a questa quantità complessa $=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^{\frac{2}{3}}+1}$ elevata alla dignità, che à per esponente $\frac{2}{3}$, e tirando l'ordinata Ra, allora si avrà

L'arco OA; meno l'arco Oa eguale alla tangente AV moltiplicata per la quantità complessa $\frac{3}{8x^{\frac{2}{3}}} + \frac{3}{4}$; meno la tangente au moltiplicata per la quantità complessa $\frac{3}{4z^{\frac{2}{3}}} + \frac{3}{2}$.

Io non voglio allungare il presente schediasma con dedurre dal mio metodo quelle curve geometriche di genere differente dal parabolico, alle quali compete la medesima proprietà di essere irrettificabili, e di avere degli archi, la di cui differenza sia capace di un'esatta rettificazione; ma prima di finire mostrerò brevemente, come possa trasformarsi il binomio $\frac{h^{m-1}\,dh}{\sqrt{c^3 - b^{3m}}}$ in quest'altro $\frac{n}{m}\frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{c^3 + z^{3n}}}$.

Suppongasi nel quadrinomio W, e nell'equazione (1) del teorema generale $x^n = -h^m$, e concepiscasi $l = 1$; i coefficienti del secondo, e terzo termine della quantità sotto il vincolo eguali a zero, e il quarto termine di essa eguale a c^3, mentre in questi casi l'equazione suddetta (1) diverrà $z^n = \frac{2c^2 + ch^m}{c - h^m}$, e si otterrà l'intento.

Ciò serve a costruire il primo de' due antecedenti binomj, e gli altri infiniti, che ne dipendono mediante la rettificazione di un'infinità di specie di curve paraboliche.

Esempio. — Se si suppone $m = n = -2$; $c = \frac{1}{b^2}$, e si prende $z = b\sqrt{\frac{h^2 - b^2}{2h^2 + b^2}}$, il binomio $\frac{dh}{\sqrt{\frac{h^6+1}{b^6}}}$ si trasformerà in quest'altro $\frac{dz}{\sqrt{\frac{z^6+1}{b^6}}}$, che si costruisce semplicissimamente, mediante l'estensione della prima parabola del quarto grado, la quale merita per conseguenza di aver luogo tra quelle curve, che seguitano immediatamente la circolare, e la parabola Archimedea nella costruzione delle meccaniche.

XXXI.

TEOREMA

DA CUI SI DEDUCE UNA NUOVA MISURA DEGLI ARCHI ELITTICI, IPERBOLICI, E CICLOIDALI (*).

TEOREMA. — Ne' due polinomj infrascritti X, e Z, e nell' equazione (1) le lettere h, l, f, g rappresentino qualsivoglia quantità costante.

Io dico in primo luogo, che se nell'equazione (1) l'esponente s significa l'unità positiva, l'integrale dell'aggregato de' due polinomj $X-Z$ è uguale a $\frac{-hxz}{\sqrt{-fl}}$.

Io dico in secondo luogo, che se nella medesima equazione (1) l'esponente s esprime l'unità negativa, allora l'integrale di $X+Z=\frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$.

$$(X) \qquad \frac{dx\sqrt{hx^2+l}}{\sqrt{fx^2+g}}$$

$$(Z) \qquad \frac{dz\sqrt{hz^2+l}}{\sqrt{fz^2+g}}$$

$$(1) \qquad (fhx^2z^2)^s+(flx^2)^s+(flz^2)^s+(gl)^s=0.$$

Dimostrazione della prima parte del teorema. — Dall'equazione (1) nasce la seguente

$$(2) \qquad z=\frac{\sqrt{-flx^2-gl}}{\sqrt{fhx^2+fl}}$$

e di più dalla medesima equazione (1) si deduce un valore di x tale, che la medesima x è data per z, come appunto z nell'equazione (2) è data per x. Laonde introducendo z nel polinomio X, e x nel polinomio Z si à

$$(3) \qquad X+Z=\frac{dx\sqrt{-l}}{z\sqrt{f}}+\frac{dz\sqrt{-l}}{x\sqrt{f}}.$$

(*) Giornale de' Letterati d'Italia, tom. XXVI, pag. 266.

Ma l'equazione (1) differenziata, e poi divisa per $2fxz$ fa conoscere

$$hz\,dx + hx\,dz + \frac{l\,dx}{z} + \frac{l\,dz}{x} = 0$$

cioè trasponendo e dividendo per $\sqrt{-fl}$

$$\frac{dx\sqrt{-l}}{z\sqrt{f}} + \frac{dz\sqrt{-l}}{x\sqrt{f}} = -\frac{hz\,dx}{\sqrt{-fl}} - \frac{hx\,dz}{\sqrt{-fl}}$$

dunque sostituendo il secondo membro di quest'ultima equazione in luogo del primo di essa nell'equazione (3), e poscia integrando si ottiene

$$(4)\qquad \int X + \int Z = -\frac{hxz}{\sqrt{-fl}}.$$

Il che dovea dimostrarsi, $\int$ significa somma, ovvero integrale.

Dimostrazione della seconda parte del teorema. — Ponendo l'unità negativa in vece di s nell'equazione (1), e facendo le debite operazioni ritrovasi

$$(5)\qquad z = \frac{\sqrt{-ghx^2 - gl}}{\sqrt{fhx^2 + gh}}$$

vedesi ancora, che x è data per z, come z nell'antecedente equazione (5) è data per x, di modo che l'introduzione di z nel polinomio X, e di x nel polinomio Z somministra

$$X + Z = \frac{z\,dx\sqrt{-h}}{\sqrt{g}} + \frac{x\,dz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$$

e integrando

$$(6)\qquad \int X + \int Z = \frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}.$$

Il che dovea dimostrarsi.

Applicazione della prima parte del teorema all'elisse (fig. 20). — Uno degli assi dell'elisse $AGHI$, sul quale si vogliono prendere l'abscisse, v. g. l'asse IG si nomini $(2a)$, il suo parametro (p), e x l'abscissa variabile CD, che à per origine il centro C. È noto agl'intendenti della geometria interiore, che se per abbreviare si suppone $h = p - 2a$, l'elemento dell'arco AB corrispondente all'abscissa CD è

$$\frac{dx\sqrt{hx^2 - 2a^3}}{\sqrt{2a^3 - 2ax^2}}.$$

Suppongasi dunque questo polinomio eguale al polinomio generale X, e si avrà $l = 2a^3$; $f = -2a$; $g = 2a^3$, i quali valori surrogati nell'equazioni (2), e (4) fanno conoscere, che prendendo l'altra abscissa CF (z) di tal natura, che sia

$$z = \frac{a\sqrt{2a^3 - 2ax^2}}{\sqrt{hx^2 + 2a^3}}$$

si à

$$\text{Arc. } AB + \text{arc. } AF = -\frac{hxz}{2a^2} + K.$$

Per trovare il valore della costante K si osservi, che quando $x = 0$ allora l'arco AB è nullo, come anche l'espressione rettilinea $\frac{hxz}{2a^2}$, ma in questo caso l'arco AF diviene uguale all'arco intiero AG, dunque K è uguale a questo medesimo arco, e però trasponendo l'ultima equazione, e sostituendo l'arco GF negativo in cambio di arc. AF — arc. AG finalmente si scopre

$$\text{Arc. } AB - \text{arc. } GF = -\frac{hxz}{2a^2}.$$

Applicazione della seconda parte del teorema all'iperbola (fig. 21). — Il primo asse HA dell'iperbola ABF si chiami ($2a$), il suo parametro (p), e (x) l'abscissa variabile CD, che nasce dal centro C, suppongasi ancora $h = p + 2a$; sanno i conoscitori, che l'elemento dell'arco AB, il quale corrisponde all'abscissa CD, è

$$\frac{dx\sqrt{hx^2 - 2a^3}}{\sqrt{2ax^2 - 2a^3}}.$$

E questo polinomio essendo uguagliato al polinomio generale X, mostra, che $t = -2a^3$; $f = 2a$; $g = -2a^3$, i quali valori posti nell'equazioni (5), e (6) fanno vedere, che assumendo l'altra abscissa CE (z) tale, che si abbia $z = \frac{a\sqrt{hx^2 - 2a^3}}{\sqrt{hx^2 - ha^2}}$ si ottiene

$$\text{Arc. } AB + \text{arc. } AF = \frac{xz\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}} + K. \tag{7}$$

Si noti, che z decresce al crescere di x, come ciascuno potrà da se medesimo assicurarsi.

Chiamisi ora (t) l'abscissa Cd, ed (u) l'altra abscissa Ce in modo però, che u sia data per t, come z per x, e per la stessa ragione si avrà

$$\text{Arc. } Ab + \text{arc. } Af = \frac{tu\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}} + K.$$

Dunque sottraendo quest'ultima equazione dall'equazione (7) in fine si scoprirà

$$\text{Arc. } Ff - \text{arc. } Bb = \frac{xz\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}} - \frac{tu\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}}.$$

Egli è visibile, che uno dei due archi Ff, Bb è arbitrario.

Applicazione della prima parte del teorema alle cicloidi (fig. 22, e 23). — La cicloide $ABFG$ è generata dal cerchio NTR rotato sull'arco circolare RSV, e il punto A, che la descrive, è preso sulla circonferenza del cerchio generatore, ovvero fuori di essa; la semiperiferia circolare $AICH$ è descritta dal centro K comune al cerchio generatore, e dal raggio KA; AB è un arco variabile della cicloide, e Bl è un arco circolare descritto dal centro O comune al cerchio, che è base, e dal raggio variabile OB; l'arco suddetto BI taglia il semicerchio $AICH$ nel punto I, da cui discende sul diametro AH la perpendicolare ID.

Chiamisi ora OB (b), KA (a), KN (c), l'abscissa AD del semicerchio $AIOH$ si nomini (t), e per maggior brevità suppongasi $a + c = q$. Il celebre sig. Nicole nel suo *Schediasma* inserito nelle Memorie dell'Accademia delle scienze di Parigi del 1708, mostra, che l'elemento dell'arco cicloidale AB è uguale al polinomio seguente

$$dt\,\frac{\sqrt{q^2 - 2\,ct}}{\sqrt{2\,at - t^2}} \times \frac{b + c}{b}.$$

Ciò posto chiamisi x la corda AI, e si avrà $t = \frac{x^2}{2a}$, e $dt = \frac{x\,dx}{a}$; dunque l'elemento dell'arco cicloidale AB sarà eguale al polinomio che segue

$$dx\,\frac{\sqrt{aq^2 - cx^2}}{\sqrt{4\,a^3 - ax^2}} \times \frac{2\,b + 2\,c}{b}.$$

Concepiscasi pertanto quest'ultimo polinomio eguale al polinomio generale $X \cdot \frac{2\,b + 2\,c}{b}$, si troverà $h = -c$; $l = aq^2$; $f = -a$; $g = 4\,a^3$, di modo che sostituendo questi valori nell'equazioni (2), e (4), e procedendo,

come si è fatto nell'elisse, si vedrà parimente, che se si prende l'altra corda AC, la quale si chiami z tale, che abbiasi

$$z = aq \frac{\sqrt{4\,a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 q^2 - acx^2}}.$$

E se dal centro O col raggio OC descrivesi l'arco circolare CF, che sega la cicloide nel punto F, si avrà

$$\text{Arc. } AB - \text{arc. } GF = \frac{2cxz}{aq} + \frac{2c^2xz}{abq}.$$

Corollarj. — I. Quando $a = c$; allora $q = 2a$, e z è sempre uguale al diametro $AH = 2a$, di maniera che l'arco GF è nullo, e per conseguenza Arc. $AB = 2x + \frac{2\,ax}{b}$.

II. Ma quando b è infinita, l'arco RSV cangiasi in una linea retta, e si ottiene Arc. AB — arc. $GF = \frac{2\,cxz}{a^2 + ac}$.

III. Se oltre quest'ultima supposizione $a = c$, la curva $ABFG$ è la cicloide ordinaria, e ritrovasi Arc. $AB = 2x$.

Altro teorema, che serve per misurare differentemente gli archi dell'iperbola.

Teorema. — Siano come sopra i due polinomj X, e Z; io dico, che se si prenderà $z = \frac{\sqrt{gl}}{x\sqrt{fh}}$, l'integrale di $X + Z$ sarà

$$\frac{1}{f}\sqrt{fx^2 + g}\sqrt{h + \frac{l}{x^2}}.$$

Dimostrazione. — Introducendo nel polinomio Z in luogo di z, e dz i loro valori in x, e dx, e operando nel debito modo, si avrà

$$Z = -\frac{ldx\sqrt{fx^2 + g}}{fx^2\sqrt{hx^2 + l}}.$$

Perlocchè $Z + X$ sarà eguale al differenziale di

$$\frac{1}{f}\sqrt{fx^2 + g}\sqrt{h + \frac{l}{x^2}}.$$

Dunque, ec. *Q. E. D.*

Applicazione all'iperbola. — Chiamisi $(2b)$ il secondo asse dell'iperbola, e (q) il suo parametro, prendasi sul medesimo secondo asse prolungato qualunque abscissa x; egli è già noto, che l'arco corrispondente a detta abscissa à per suo elemento

$$dx\,\frac{\sqrt{qx^2+2bx^2+2b^3}}{\sqrt{2bx^2+2b^3}}.$$

Dunque uguagliando questo polinomio al polinomio generale X, si troverà $h=q+2b$; $l=g=2b^3$; $f=2b$, e si vedrà, che l'abscissa

$$z=\frac{b^2\sqrt{b}}{x\sqrt{\frac{1}{2}q+b}}$$

determina un secondo arco della medesima iperbola tale, che la somma di questi due archi è uguale alla sottoscritta quantità variabile più, o meno una quantità costante

$$\sqrt{\frac{x^2}{b}+b}\,\sqrt{\frac{1}{2}q+b+\frac{b^3}{x^2}}.$$

Nel resto si procederà, come sopra, ec.

XXXII.

METODO PER MISURARE LA LEMNISCATA.

SCHEDIASMA I (*).

I due sommi geometri signor Giacomo e signor Giovanni fratelli Bernulli ànno renduta celebre la lemniscata, servendosi de' suoi archi per costruire l'isocrona paracentrica, come può vedersi negli Atti di Lipsia dell'anno 1694. Egli è visibile, che misurando la lemniscata mediante qualche altra curva di lei più semplice, si ottiene una costruzione più perfetta non solo dell'isocrona paracentrica, ma ancora delle altre infinite curve, che per essere costruite possono dipendere dalla lemniscata; e però mi lusingo, che non sieno per dispiacere agl'intendenti le misure di questa curva da me scoperte, le quali esporrò successivamente in due schediasmi.

Supposizioni note agl'intendenti del calcolo infinitesimale. — Sia la lemniscata $CQACFC$ (fig. 24), il cui semiasse $CA = a$; si sa, che prendendo nel centro C l'origine dell'abscisse (x), e chiamando (y) le ordinate che sono all'asse normali, la natura della lemniscata s'esprime con quest'equazione $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$.

Si sa ancora che se si chiama z la corda indeterminata $CQ = \sqrt{x^2+y^2}$, si à l'arco diretto $CQ = \int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$, e l'arco inverso

$$QA = \text{arc.}\,CA - \text{arc.}\,CQ = \int \frac{a^2\,dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}.$$

Sia l'elisse $ADFNA$ (fig. 24), il cui semiasse minore $CF = a$, e il semiasse maggiore $CD = a\sqrt{2}$; chiamasi z l'abscissa indeterminata CH, che ha l'origine del centro C dell'elisse, ed è uguale alla corda CQ della lemniscata, e tirisi l'ordinata HI parallela all'asse maggiore; è già noto che l'arco diretto DI di quest'elisse ha per sua espressione

$$\int dz \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}},$$

(*) Giornale de' letterati d'Italia, tomo XXIX, pag. 258.

e che l'arco inverso

$$IF = \text{arc. } DF - \text{arc. } DI = \int -dz \frac{\sqrt{a^2+z^2}}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

Sia finalmente l'iperbola equilatera LMP (fig. 25), il cui semiasse $SM = a$. Si nomini t l'applicata indeterminata SO, che partendo dal centro S tagli l'arco MO; si sa, che questo medesimo arco s'esprime così

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^4 - a^4}}.$$

Teorema I. — Sieno le due infrascritte equazioni (1), e (2). Io dico, che posta la prima di esse, sussiste anche l'altra

$$(1) \qquad t = a \frac{\sqrt{a^2+z^2}}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

$$(2) \qquad \int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = \int dz \frac{\sqrt{a^2+zz}}{\sqrt{a^2-az}} + \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^4-a^4}} - \frac{zt}{a}.$$

La verità di questo teorema si dimostra differenziando, e sostituendo in luogo di t, e di dt i loro valori in z, e dz tratti dall'equazione (1).

Corollario (fig. 24 e 25). — Se nella lemniscata la corda $CQ = z$, e nell'elisse l' abscissa CH è anche essa $= z$, e nell' iperbola equilatera LMP l' applicata centrale $SO = t$; assegnando a t il suo valore espresso nell'equazione (1) e ponendo nell'equazione (2) gli archi delle curve invece delle loro espressioni già dichiarate nelle supposizioni superiori, s'ottiene

$$(3) \qquad \text{Arc. } CQ = \text{arc. } DI + \text{arc. } MO = \frac{zt}{a}.$$

Scolio I. — Supponendo $z = 0$, gli archi diretti CQ della lemniscata, e DI dell'elisse sono uguali a zero; è nullo ancora l'arco iperbolico MO, poichè in virtù dell'equazione (1) l'annullamento di z rende $SO\,(t) = a = SM$; s'annienta eziandio l'espressione rettilinea, e tutto ciò è un certo indizio, che l'equazione (3) è completa, e non abbisogna dell'aggiunta, o sottrazione d'alcuna quantità costante. Ma facendo $z = a$, allora l'arco diretto della lemniscata diventa eguale all'arco CQA, e l'arco elittico DI all'arco DIF; ma per l'equazione (1) l'applicata centrale SO (t) dell'iperbola diviene in questo caso infinita, rendendo infinito anche l'arco iperbolico MO, e però sembra impossibile di giungere a conoscere per questa strada il

valore del quadrante della lemniscata espresso in quantità finite, e per conseguenza la misura di questa curva non può dirsi ancora perfettamente scoperta.

TEOREMA II. — Sieno le due equazioni infrascritte (4) e (5); io dico, che posta la prima di esse, sussiste anche l'altra

$$r = \frac{a^2}{z}. \tag{4}$$

$$\int -\frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = \int -dz \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}} + \int \frac{r^2 dr}{\sqrt{r^4 - a^4}} - \frac{1}{z}\sqrt{a^4 - z^4}. \tag{5}$$

La differenziazione e la sostituzione de' valori di r, e dr in z, e dz dedotti dall'equazione (4) dimostrano questo teorema.

COROLLARIO I (fig. 24 e 25). — Facciasi, come sopra, nella lemniscata la corda $CQ = z$, nell'elisse l'abscissa CH anch'essa $= z$, e nell'iperbola l'applicata centrale $SL = r$, attribuendo ad r il suo valore notato nell' equazione (4), e surrogando nell' equazione (5) gli archi delle curve in vece delle loro espressioni, conforme si è fatto nel corollario del I teorema, ritrovasi

$$\text{Arc. } QA = \text{arc. } IF + \text{arc. } ML - \frac{1}{z}\sqrt{a^4 - z^4}. \tag{6}$$

SCOLIO II. — La supposizione di $z = a$ rende nulli gli archi inversi QA della lemniscata, ed IF dell'elisse; annulla ancora l'espressione rettilinea, e l'arco iperbolico ML, atteso che in vigore dell'equazione (4) l'applicata centrale dell'iperbola SL (r) diviene uguale al semiasse SM (a), dunque l'equazione (5) è completa. Ma la supposizione di $z = 0$, prolunga in infinito l'applicata centrale dell'iperbola, e l'arco, di essa, nello stesso tempo, che fa divenire gli archi inversi della lemniscata, e dell'elisse uguali rispettivamente ai quadranti ACQ, FID; ed ecco rinascere il medesimo inconveniente esposto nel fine del I scolio; ma questa difficoltà resterà superata dal corollario, che segue. Intanto si noti; primo, che tirando nell'iperbola la OP parallela al secondo asse, l'arco LMP è uguale ai due archi MO, ML. Secondo, che assegnando a t il suo valore espresso nell'equazione (1), questa quantità complessa $\frac{zt}{a} + \frac{1}{z}\sqrt{a^4 - z^4}$ equivale a quest'altra quantità più semplice $\frac{at}{z}$, come si esperimenterà col calcolo.

Corollario II (fig. 24 e 25). — Aggiungendo le due equazioni (3) e (6), e servendosi dei due avvertimenti notati nel fine del precedente scolio, si scuopre arc. CQA = arc. DIF + arc. $LMP - \frac{at}{z}$; e finalmente moltiplicando per 4 quest'ultima equazione, ritrovasi che l'intera periferia della lemniscata è uguale all'intera periferia dell'elisse circoscritta $ADFNA$, più il quadruplo dell'arco LMP dell'iperbola equilatera meno $\frac{4at}{z}$ ch'è una nuova, ed egregia proprietà di queste curve.

Teorema III. — Sieno le due equazioni infrascritte (7) e (8); io dico, che posta la prima di esse, sussiste anche l'altra

$$u = a\frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}. \tag{7}$$

$$\int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = \int - \frac{a^2 du}{\sqrt{a^4 - u^4}}. \tag{8}$$

Questo teorema si dimostra, come gli altri due, che lo precedono, differenziando, e facendo le debite sostituzioni tratte dall'equazione (7).

Corollario I (fig. 24). — Prendasi nella lemniscata la corda $CQ = z$, e l'altra corda $CE = u$, attribuiscasi ad u il suo valore espresso nell'equazione (7), si sostituiscano nell'equazione (8) gli archi diretto, ed inverso della curva in luogo delle loro espressioni, e si troverà arc. CQ = arc. EA.

Scolio III (fig. 24). — Se $z = 0$ l'arco diretto CQ è nullo, e in virtù dell'equazione (7) l'annullamento di z rende CE $(u) = a$, di modo che l'arco inverso EA è nullo anch'esso; il che fa conoscere, che l'equazione notata nel fine del precedente corollario è completa. Questa insigne proprietà della lemniscata è stata da me scoperta, ed esposta in maniera diversa nel mio metodo per rettificare la differenza degli archi in infinite specie di parabole irrettificabili.

Corollario II (fig. 24). — Trovando, come qui sopra ho insegnato di fare, l'arco inverso EA eguale all'arco diretto CQ, potrà misurarsi questo medesimo arco CQ mediante il I. corollario del II teorema, e viceversa trovando l'arco diretto CQ eguale all'arco inverso EA, potrà essere misurato questo medesimo arco EA per mezzo del corollario del I teorema.

Corollario III. — Problema. — Tagliare per mezzo il quadrante della lemniscata (fig. 24).

Se la corda CQ (z) della lemniscata è uguale all'altra corda $CE\,(u)$ di essa, e se nel tempo stesso u ha il suo valore notato nell'equazione (7), allora $z = u = a\dfrac{\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$, donde risulta fatte le debite operazioni

$$z = u = \sqrt{a^2\sqrt{2} - a^2}$$

e però attribuendo a z quest'ultimo valore, i due punti della lemniscata Q ed E coincideranno in B, in maniera che l'arco diretto CB sarà eguale all' arco inverso BA, e la corda $CB = u = z$ taglierà per mezzo il quadrante della lemniscata. Il che dovea ritrovarsi.

XXXIII.

GIUNTE A QUESTO PRIMO SCHEDIASMA

SOPRA LA MISURA DELLA LEMNISCATA (*).

TEOREMA I (fig. 26). — Posto il quadrante della lemniscata CGA, dal cui punto estremo A si alzi la normale AS, la quale sia incontrata in R, e in I dalle due corde CG, CE prolungate; io dico in primo luogo, che se la corda CE è uguale alla porzione AR della normale tagliata dall'altra corda CG, l'arco inverso EA della curva è uguale all'arco diretto CG. Io dico in secondo luogo, che la corda CG è uguale alla porzione AI della normale tagliata dall'altra corda CE.

Dimostrazione della prima parte. — Dai due punti G, E della lemniscata si tirino le ordinate GM, EN (y) perpendicolari all'asse (a), sul quale sieno le abscisse corrispondenti CM, CN (x); indi si consideri, che l'equazione di questa curva è $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$, e che nominando (z) la corda $CG = \sqrt{x^2 + y^2}$, si à ancora $z^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$, e calcolando a dovere si ottiene $x = \dfrac{z\sqrt{a^2 + z^2}}{a\sqrt{2}}$, ed $y = \dfrac{z\sqrt{a^2 - z^2}}{a\sqrt{2}}$.

Ma la simiglianza de' triangoli CMG, CAR somministra

$$AR = \frac{CA \times GM}{CM}.$$

Adunque ponendo in luogo di CA, GM, CM il loro valore analitico; si à, fatta la debita riduzione, $AR = \dfrac{a\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$, e perciò essendo la corda $OE = AR$, si avrà (in virtù di quanto ò mostrato nel I schediasma sopra la lemniscata, cioè nel I corollario del III teorema), si avrà, dico, l'arco inverso EA eguale all'arco diretto CG.

Il che era in primo luogo da dimostrare.

(*) Giornale de' letterati d'Italia, tomo XXXIV, pag. 197.

Dimostrazione della seconda parte. — Poichè $CE\ (u) = \frac{a\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$, sarà ancora facendo le dovute operazioni, $CG\ (z) = \frac{a\sqrt{a^2 - u^2}}{\sqrt{a^2 + u^2}}$, in modo, che posta la corda CG di questo valore, l'arco diretto CG sarà eguale all'arco inverso EA, e vicendevolmente posto l'arco l'inverso EA eguale all'arco diretto CG, la corda CG sarà del valore suddetto. Ora si vedrà come nella dimostrazione della prima parte, che l'abscissa $CN = \frac{u\sqrt{a^2 + u^2}}{a\sqrt{2}}$, e l'ordinata $NE = \frac{u\sqrt{a^2 - u^2}}{a\sqrt{2}}$.

Si proverà eziandio per la similitudine de' triangoli CNE, CAI, che $AI = \frac{CA \times EN}{CN} = \frac{a\sqrt{a^2 - u^2}}{\sqrt{a^2 + u^2}}$. Adunque la corda $CG\ (z)$ è uguale ad AI. Ciò che in secondo luogo doveasi provare.

Corollario I. — Se la corda CB taglierà per mezzo in B il quadrante della lemniscata, taglierà ancora in L la normale AS, in maniera che la porzione AL di essa normale sarà eguale alla corda CB; imperciocchè in questo caso i due punti E, G coincideranno in B, le due rette CI, CR si confonderanno nella retta CL, e i due punti I, R s'uniranno in L.

Corollario II. — Adunque se la AL sarà eguale a questo valore $\sqrt{a^2\sqrt{2} - a^2}$ (che è appunto il valore della corda CB proprio a tagliare per mezzo il quadrante della lemniscata, conforme ò mostrato nel I schediasma suddetto, cioè nel III corollario del III teorema) conducendo dal punto L al centro C la retta CL, questa segherà per mezzo in B il quadrante.

Teorema II (fig. 27). — Se la normale AS è uguale al semiasse CA della lemniscata, ed è tirata l'ipotenusa CS, indi è diviso per mezzo l'angolo semiretto ACS dalla retta CH, che incontra la normale in H; io dico, che prendendo la AL media proporzionale tra la AH, e la AS, e conducendo dal punto L al centro C della curva la retta LC; questa segherà per mezzo in B il quadrante della lemniscata.

Dimostrazione. — Essendo la $AS = AC = a$, l'ipotenusa CS sarà $= a\sqrt{2}$, ed essendo l'angolo ACS diviso per metà dalla retta AH, che incontra la sua base AS in H, si avrà questa proporzione

$$AH . HS\,(a - AH) :: AC\,(a) . CS\,(a\sqrt{2}),$$

donde si deduce fatte le debite operazioni $AH = \frac{a}{1+\sqrt{2}}$, ma la AL media proporzionale tra $AH\left[\frac{a}{1+\sqrt{2}}\right]$, ed $AS\,(a)$ è appunto

$$\frac{a}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} = \sqrt{a^2\sqrt{2} - a^2},$$

come apparisce moltiplicando l'uno, e l'altro membro di quest'ultima equazione per $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ poichè ne viene $a = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$; adunque pel II corollario del precedente teorema la retta LC taglia per mezzo in B il quadrante della lemniscata. Ciò, che bisognava dimostrare.

Scolio. — Facile è dimostrarsi (fig. 27), che il lato CS dell'angolo semiretto ACS tocca nel centro C la lemniscata, e che la normale AS la tocca anch'essa nell'estremità del quadrante.

Se il punto G (fig. 26) cadesse tra il punto estremo A, e il punto medio B, allora il punto corrispondente E cadrebbe tra il centro C, e il punto medio B, e valerebbero i medesimi raziozinj esposti nella dimostrazione del I teorema.

Problema I (fig. 28). — Trovare il punto, in cui il quadrante della lemniscata è tagliato dalla maggiore dell'ordinate.

Soluzione. — Sia l'ordinata $HT\,(y)$ un massimo; adunque $dy = 0$; Ma $y = \frac{z\sqrt{a^2 - z^2}}{a\sqrt{2}}$, e $dy = \frac{dz}{a\sqrt{2}}\left(\frac{a^2 - 2z^2}{\sqrt{a^2 - z^2}}\right)$. Eguagliando pertanto questo valore di dy a zero, si à $2z^2 = a^2$, e quindi $CT\,(z) = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Ciò, che era da trovare.

Corollario I. — Surrogando in vece di z il suo valore $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ne' valori di $CH\,(x) = \frac{z\sqrt{a^2 + z^2}}{a\sqrt{2}}$, e di $HT\,(y) = \frac{z\sqrt{a^2 - z^2}}{a\sqrt{2}}$, si à

$$CH\,(x) = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \text{ ed } HT\,(y) = \frac{a}{2\sqrt{2}},$$

e per conseguenza la maggiore delle ordinate HT è suddupla della corda, che le corrisponde.

COROLLARIO II. — Adunque prolungando la TH maggiore delle ordinate sino al punto S dell'altro quadrante inferiore CSH della lemniscata, che è simile, ed eguale al quadrante superiore CTA (come agevolmente si può provare), e tirando l'altra corda inferiore CS eguale alla corda superiore CT, il triangolo CTS sarà equilatero.

COROLLARIO III. — E però l'angolo TCH sarà di 30 gradi, poichè egli è sudduplo dell'angolo TCS, che è di gradi 60, donde nasce una nuova maniera di sciorre questo problema.

PROBLEMA II (fig. 28). — Tirare la tangente a qualsivoglia punto della lemniscata.

SOLUZIONE. — Il punto T rappresenti qualunque punto della lemniscata: si alzi dal centro C sulla corda CT la normale CP, che sia tagliata in P dalla tangente TP: indi immaginando la corda Ct infinitamente vicina all'altra CT, e segata in O dall'archetto TO, che dal centro C col raggio CT è descritto: si consideri, che i due triangoli rettangoli tOT, TCP sono simili, talchè si, à la proporzione

$$tO\,(dz)\,.\,tT\left(\frac{a^2dz}{\sqrt{a^4-z^4}}\right) :: TC\,(z)\,.\,TP = \frac{a^2z}{\sqrt{a^4-z^4}};$$

laonde la sottangente $CP = \sqrt{TP^2 - TC^2}$ sarà $\dfrac{z^3}{\sqrt{a^4-z^4}}$. Il che era da fare.

COROLLARIO. — La simiglianza de' due triangoli rettangoli suddetti somministra quest'altra analogia $CT\,.\,CP\left(\dfrac{z^3}{\sqrt{a^4-z^4}}\right) :: tO\,(dz)\,.\,OT$.

E quindi $CT \times OT$ prodotto degli estremi è uguale a $CP \times tO = \dfrac{z^3\,dz}{\sqrt{a^4-z^4}}$ prodotto de' mezzi, di modo che l'area del piccolo triangolo TCO, che

è uguale alla metà del rettangolo $CT \times OT$ è suddupla dell'altro rettangolo $CP \times tO$, ed è uguale a $\frac{z^3 dz}{2\sqrt{a^4 - z^4}}$.

PROBLEMA III (fig. 28). — Esibire la quadratura generale della lemniscata.

SOLUZIONE. — Qualsivoglia segmento diretto della lemniscata sia rappresentato dal segmento CTC, l'elemento del quale è il piccolo triangolo TCO, adunque pel precedente corollario questo segmento

$$CTC = \int \frac{z^3 dz}{2\sqrt{a^4 - z^4}} = K - \frac{1}{4}\sqrt{a^4 - z^4}.$$

La K è una quantità costante, che così si determina. All'annientarsi di CT (z) s'annulla anche il segmento CTC, e l'ultima equazione si trasforma in quest'altra $0 = K - \frac{1}{4}a^2$, e però $K = \frac{1}{4}a^2$, e il segmento diretto $CTC = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}\sqrt{a^4 - z^4}$. Il che si doveva fare.

COROLLARIO I. — Allorchè il punto T cade in A, la corda CT (z) diventa il semiasse AC (a), e il segmento diviene l'intero quadrante, il di cui valore è $\frac{1}{4}a^2$. Adunque lo spazio curvo $CTASC$, contenuto dal quadrante superiore, e dall'inferiore, è $\frac{1}{2}a^2$, e le due figure congiunte racchiuse da tutta la periferia della lemniscata formano uno spazio eguale al quadrato a^2 del semiasse.

COROLLARIO II. — Il segmento inverso $CTACT$ è uguale a

$$\frac{1}{4}\sqrt{a^4 - z^4}.$$

SCOLIO. — Può dimostrarsi con tutta facilità mediante l'equazione $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$ della lemniscata, che questa curva geometrica torna in se medesima, e forma una figura propriamente chiusa, costituita da quattro quadranti simili, ed eguali; onde non so come possa general-

mente sussistere l'opinione del celebre Tschirnausio, che à creduto, essere incapaci di quadratura indefinita tutte quelle curve, dalle quali figura chiusa si forma. Leggasi ciò, che di tale opinione si accenna negli Atti di Lipsia dell'anno 1695, pag. 490, e dell'anno 1691, pag. 437. Che poi la lemniscata torni in se medesima, cioè formi figura chiusa, anche il sig. Jacopo Bernulli lo riconobbe, come può vedersi negli Atti di Lipsia dell'anno 1694, pag. 338, e dell'anno 1695, pag. 545. Ci sono ancora altre curve di un contorno simile a quello della lemniscata, e generalmente quadrabili.

XXXIV.

METODO PER MISURARE LA LEMNISCATA.

SCHEDIASMA II (*).

Teorema I. — Sieno le due infrascritte equazioni (1), e (2), io dico, che posta la prima di esse, sussiste anche l'altra

$$x = \frac{\sqrt{1 \mp \sqrt{1-z^4}}}{z} \tag{1}$$

$$\frac{\pm dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{dx\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}. \tag{2}$$

Dimostrazione. — L'equazione (1) differenziata somministra un valore di dx, ch'essendo ridotto ad una semplice espressione fa conoscere

$$dx = \frac{\pm dz\sqrt{1 \mp \sqrt{1-z^4}}}{z^2\sqrt{1-z^4}}.$$

Dalla medesima equazione (1) si deduce ancora la seguente

$$\frac{\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1 \mp \sqrt{1-z^4}}}{z^2}.$$

E dividendo la penultima equazione per quest'ultima si giunge all'equazione (2).

Il che dovea dimostrarsi.

Teorema II. — Sieno le due equazioni infrascritte (3), e (4); io dico, che posta la prima di essa sussiste anche l'altra

$$x = \frac{\sqrt{1 \mp z}}{\sqrt{1 \pm z}} \tag{3}$$

$$\frac{\mp dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{dx\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}. \tag{4}$$

(*) Giornale de' letterati d'Italia, tomo XXX, pag. 87.

Dimostrazione. — Differenziando l'equazione (3), e operando nel debito modo, si à $dx = \frac{\pm dz}{\sqrt{1 - z^2}} \times \frac{1}{1 \pm z}$.

Inoltre la stessa equazione (3) mostra $\frac{\sqrt{1 + x^4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1 + z^2}}{1 \pm z}$.

E dividendo la penultima equazione per quest'ultima si ottiene la equazione (4).

Il che dovea dimostrarsi.

Teorema III. — Sieno le due equazioni infrascritte (5), e (6); io dico, che posta la prima di esse, sussiste anche l'altra

$$x = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1 - u^4}} \tag{5}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1 - u^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}. \tag{6}$$

Dimostrazione. — Dall'equazione (5) differenziata, e maneggiata a dovere risulta $\frac{dx}{\sqrt{2}} = \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}} \times \frac{1 + u^4}{1 - u^4}$ e dalla suddetta equazione (5) si deduce $\sqrt{1 + x^4} = \frac{1 + u^4}{1 - u^4}$.

Dividendo poscia la penultima equazione per quest'ultima, si arriva all'equazione (6).

Il che dovea dimostrarsi.

Teorema IV. — Sieno le due infrascritte equazioni (6), e (8); io dico, che posta la prima di esse, sussiste anche l'altra

$$x = \frac{\sqrt{1 - t^4}}{t\sqrt{2}} \tag{7}$$

$$\frac{-dt}{\sqrt{1 - t^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}. \tag{8}$$

Dimostrazione. — Differenziando l'equazione (7), e riducendo il valore di dx ad una comoda espressione, ritrovasi $dx\sqrt{2} = \frac{-dt}{\sqrt{1 - t^4}} \times \frac{1 + t^4}{t^2}$.

La stessa equazione (7) fa vedere $2\sqrt{1 + x^4} = \frac{1 + t^4}{t^2}$.

E la penultima equazione divisa per quest'ultima rende l'equazione (8).

Il che dovea dimostrarsi.

Scolio I. — Per far uso di questi teoremi si noti:

Primo, che $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ rappresenta l'arco diretto CS della lemniscata (fig. 29) sostenuto dalla corda $CS = z$, purchè il semiasse CL di questa curva sia eguale all' unità.

Secondo, che $\int \frac{-dz}{\sqrt{1-z^4}}$ esprime l'arco inverso SL della medesima curva, che corrisponde alla suddetta corda CS (z).

Terzo, che $\int \frac{dz}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{3}{2} \int dx \sqrt{1+x^4} - \frac{1}{2} \sqrt{1+x^4}$, come si prova col calcolo.

Quarto, che $\int dx \sqrt{1+x^4}$ esprime l'arco AQ (fig. 30) della parabola cubica primaria corrispondente all'abscissa $AF = x$, purchè prendendo a per l'unità, il parametro di questa parabola sia $a\sqrt{3}$, e le ordinate sieno normali all'abscissa.

Quinto, che $x\sqrt{1+x^4}$ denota la porzione QV della tangente (fig. 30) compresa tra l'ordinata FQ, e la retta indefinita AV, che dalla origine A della parabola scorre parallela alle ordinate.

Sesto che per conseguenza si avrà

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{3}{2} \text{ arc. } AQ - \frac{1}{2} QV.$$

Esempj per mostrare il modo di applicare alla geometria i precedenti teoremi.

Esempio I pel I teorema (fig. 29, e 30). — Nell'equazione (1) il segno arbitrario $\mp$ significhi il segno negativo, s'integri l'equazione (2) mediante il precedente scolio, e si troverà

$$\text{Arc. } CS = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ arc. } AQ - \frac{1}{\sqrt{2}} QV.$$

Annullando AF (x), si annullerà anche CS (z), e però questa equazione è completa.

Esempio II pel II teorema (fig. 29, e 30). — Nell'equazione (3) il segno $\mp$ rappresenta il segno negativo, s' integri l'equazione (4), e si sco-

prirà $$\text{Arc. } SL = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ arc. } AQ - \frac{1}{\sqrt{2}} QV.$$

La supposizione di $CS\,(z) = 1$, che annienta l'arco inverso SL, rende $AF\,(x) = 0$, e però quest'equazione è completa.

Scolio II. — Nel progresso di questo scritto io non proverò più, che l'equazioni sono complete, dovendo bastare ai lettori il metodo, con cui mi sono regolato in questi due esempj per accertarsi da loro medesimi della pienezza dell'equazioni seguenti; essi potranno ancora servirsi dei quattro antecedenti teoremi per trarne altre maniere di misurare la lemniscata mediante l'estensione della parabola cubica primaria, non ommettendo però, dov'è d'uopo, la sottrazione, o l'aggiunta della quantità costante propria a rendere complete l'equazioni.

Potranno in oltre dedurre da questi teoremi delle verità affatto nuove, concernenti la comparazione degli archi della suddetta parabola, ec.

Io mi contenterò di accennare, che siccome la misura della parabola cubica primaria dipende in più maniere dall'estensione della lemniscata in virtù dei quattro antecedenti teoremi, e la misura della lemniscata dipende dall'estensione dell'iperbola equilatera, e d'una specie di elisse *unitamente*, conforme ò scoperto nel I schediasma, ne segue, che la misura della parabola cubica primaria dipende in più maniere dalla estensione delle due suddette sezioni coniche *unitamente*. Quest' invenzione non potrà non piacere a chi avrà considerato ciò, che si legge negli Atti di Lipsia dell'anno 1695, pag. 64, e pag. 184 verso il fine.

Teorema V. — Sieno le due equazioni infrascritte (9), e (10); io dico, che posta la prima di esse sussiste anche l'altra

$$\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{1}{z}\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}} \tag{9}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{2\,du}{\sqrt{1-u^4}}. \tag{10}$$

Dimostrazione. — Ponendo nell'equazione (1) del I teorema in vece di $\mp$ il segno negativo, e in cambio di x il suo valore $\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}}$ notato nell'equazione (5) del III teorema, si à l'equazione (9), indi sur-

rogando nell'equazione (2) del I teorema in luogo di $\frac{dx\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$ il suo valore $\frac{2du}{\sqrt{1-u^4}}$, che nasce dalla supposizione fatta di x (come si vede, moltiplicando per 2 l'equazione (6) del III teorema) ne viene l'equazione (10).

Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I (fig. 29). — Chiamisi z la corda CS della lemniscata, ed u l'altra corda CI, e integrando l'equazione (10), si troverà

$$\text{Arc. } CS = 2 \text{ arc. } CI.$$

Laonde considerando la lettera z come cognita nell'equazione (9), se ne trarrà il valore della corda CI (u) che taglia per mezzo l'arco diretto CS.

Corollario II (fig. 29). — Dall'equazione (9) nasce quest'altra

$$z = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}. \tag{11}$$

E questo valore di z è tale, che chiamando u la corda CI considerata come cognita, e facendo l'altra corda CS eguale al secondo membro dell'equazione (11) l'arco diretto CS è doppio dell'altro arco diretto CI.

Teorema IV. — Sieno le due equazioni infrascritte (12), e (13); io dico, che posta la prima di esse, sussiste anche l'altra

$$\frac{\sqrt{1-t^4}}{t\sqrt{2}} = \frac{1}{z}\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}} \tag{12}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\frac{2dt}{\sqrt{1-t^4}}. \tag{13}$$

Dimostrazione. — Ponendo nell'equazione (1) del I teorema in vece di $\mp$ il seguo negativo, e in cambio di x il suo valore $\frac{1}{t\sqrt{2}}\sqrt{1-t^4}$ notato nell'equazione (7) del IV teorema, si à l'equazione (12). Sosti-

tuendo poi nell'equazione (2) del I teorema in luogo di $\frac{dx\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$ il suo valore $\frac{-2dt}{\sqrt{1-t^4}}$, che deriva dalla supposizione fatta di x (come apparisce moltiplicando per 2 l'equazione (8) del IV teorema) s'ottiene l'equazione (13).

Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I (fig. 29). — Si nomini z la corda CS della lemniscata, e (t) l'altra corda CH, e ne risulterà arc. CS = 2 arc. HL.

Corollario II (fig. 29). — Ordinando l'equazione (12), e ponendo in essa u in cambio di z, ed r in vece di t, si giunge a quest'altra

$$u = \frac{2r\sqrt{1-r^4}}{1+r^4}. \tag{14}$$

Di modo che nominando r la corda CO, e assumendo l'altra corda CI (u) eguale al secondo membro dell'equazione (14) l'arco diretto CI sarà doppio dell'arco inverso OL.

Problema I. — Tagliare in tre parti uguali il quadrante della lemniscata.

Soluzione (fig. 29, e 31). — In virtù del teorema VI, e suo I corollario l'arco diretto CS (fig. 29) sarà doppio dell'arco inverso HL, purchè chiamando t la corda CH, e z l'altra corda CS si abbia l'equazione (12). Suppongasi ora, che i due punti S, e H coincidano in T, e questa supposizione renderà $CS\,(z) = CH\,(t)$, e l'arco diretto CT (fig. 31) sarà doppio dell'arco inverso TL, che diverrà la terza parte del quadrante.

Ma supponendo $t = z$ nell'equazione (12), e poscia ordinandola nel debito modo, ec., si ottiene

$$z = \sqrt[4]{-3+2\sqrt{3}}.$$

Laonde attribuendo alla corda CT (fig. 31) questo valore di z, e pigliando l'arco diretto CI eguale all'arco inverso TL mediante il III teorema del I schediasma, si avrà lo scioglimento del problema.

Il che dovea ritrovarsi.

Problema II. — Tagliare in cinque parti uguali il quadrante della lemniscata.

Soluzione (fig. 29, e 31). — Chiamisi u la corda CI (fig. 29) della lemniscata, e z l'altra corda CS, facciasi $z = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$, e l'arco CS sarà doppio dell'arco CI pel secondo corollario del V teorema. Si nomini poscia r la corda CO (fig. 29); suppongasi la corda $CI\,(u) = \frac{2r\sqrt{1-r^4}}{1+r^4}$, e l'arco diretto CI sarà doppio dell'arco inverso OL pel II corollario del VI teorema; dunque l'arco diretto CS sarà quadruplo dell'arco inverso OL.

Suppongasi ora $CS\,(z) = CO\,(r)$, i punti S, ed O coincideranno in T, l'arco TL (fig. 32) sarà un quinto del quadrante, l'arco $CI = 2$ arc. TL conterrà due quinti dello stesso quadrante, e l'arco IT = arc. CI ne conterrà gli altri due quinti.

Prendasi poscia mediante il III teorema del I schediasma l'arco inverso EL (fig. 32) eguale all'arco diretto CI, e l'arco diretto CB eguale all'arco inverso TL, e i punti B, I, E, T taglieranno il quadrante in cinque parti eguali.

Resta solo a trovare il valore preciso della corda CT (fig. 32) eguale nello stesso tempo a z, e a r, e questo si troverà sostituendo nell'equazione (14) in luogo di r la lettera z, mentre si avrà

$$u = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4}. \tag{15}$$

E ponendo questo valore di u nell'equazione (11) si giungerà a un'altra equazione, la quale non conterrà altr'incognita che la lettera z, e dovrà reputarsi un'equazione dell'ottavo grado, poichè se in essa si supporrà $z^4 = b$, ne risulterà una nuova equazione appunto dell'ottavo grado; il calcolo sarà più lungo, che difficile, purchè non si trascurino quelle maniere di facilitarlo, che sono ben note ai periti analisti, e però stimo superfluo di stenderlo in questo scritto. Avvertirò solamente, che nell'equazione espressiva del valore di z^4 la medesima quantità di z^4 avrà due valori veri minori di a^4; il maggiore di questi due valori esprimerà il quadratoquadrato di CT (z), e il minore di essi esprimerà il quadratoquadrato di CI (u); imperciocchè se nell'equazione (15) si porrà invece di z il suo valore in u tratto dall'equazione (11), si troverà una equazione affatto simile a quella, ch'esprime il valore di z^4, ec.

Il che dovea ritrovarsi.

Il fu signor marchese de l'Hospital nel suo eccellente *Trattato delle*

sezioni coniche, lib. 9, prop. 9 insegna un modo di costruire l'equazioni dell'ottavo grado.

TEOREMA VII. — Sieno le due equazioni infrascritte (16), e (17); io dico, che posta la prima di esse sussiste anche l'altra

$$\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}} \tag{16}$$

$$\frac{-dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{2du}{\sqrt{1-u^4}}. \tag{17}$$

Il che dovea dimostrarsi.

DIMOSTRAZIONE. — Nell'equazione (3) del II teorema il segno $\mp$ rappresenti il segno negativo, e in vece di x vi si ponga il suo valore $\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}}$ notato nell'equazione (5) del III teorema, e si avrà l'equazione (16). Si surroghi poi nell'equazione (4) del II teorema in luogo di $\frac{dx\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$ il suo valore $\frac{2\,du}{\sqrt{1-u^4}}$, che proviene dalla supposizione fatta di x (come mostra l'equazione (6) del III teorema moltiplicata per 2), e si avrà l'equazione (17).

Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO (fig. 29). — Chiamando z la corda CS della lemniscata, ed u l'altra corda CI, e poscia integrando l'equazione (17), si ottiene Arc. $SL = 2$ arc. CI.

Purchè u, e z abbiano il valore, che si deduce dall'equazione (16).

PROBLEMA III (fig. 33). — Sia diviso per mezzo in M il quadrante della lemniscata; e sia dato l'arco diretto CB minore della metà del quadrante: trovare l'arco intermedio MI eguale all'arco diretto dato CB.

SOLUZIONE. — I. Prendasi, mediante il teorema VII, e suo corollario, l'arco inverso EL doppio dell'arco diretto dato CB. II. Prendasi, mediante il teorema V, e suo I corollario, l'arco diretto CI suddduplo dell'arco diretto CE. Egli è visibile, che la somma degli archi $CB + CI$

essendo eguale alla metà della somma degli archi $CE + EL$, sarà per conseguenza eguale alla metà del quadrante; dunque

$$\text{arc. } CB + \text{arc. } CI = \text{arc. } CM,$$

e togliendo dall'uno, e l'altro membro di questa equazione l'arco comune CI, resta arc. $CB =$ arc. MI.

Il che dovea dimostrarsi.

Corollario (fig. 33). — Prendasi mediante il III teorema del I schediasma l'arco inverso FL eguale all'arco diretto CI, e si avrà

$$\text{arc. } Mf = \text{arc. } MI = \text{arc. } CB.$$

Teorema VIII. — Sieno le due equazioni infrascritte (18), e (19); io dico, che posta la prima di esse sussiste anche l'altra

$$\frac{\sqrt{1-t^4}}{t\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}. \tag{18}$$

$$\frac{-dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\frac{2\,dt}{\sqrt{1-t^4}}. \tag{19}$$

Dimostrazione. — Nell'equazione (3) del II teorema il segno $\mp$ rappresenti il segno negativo, e in vece di x vi si ponga il suo valore $\frac{\sqrt{1-t^4}}{t\sqrt{2}}$ espresso nell'equazione (7) del IV teorema, e si avrà l'equazione (18). Sostituiscasi poscia nell'equazione (4) del II teorema in cambio di $\frac{dx\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$ il suo valore $-\frac{2\,dt}{\sqrt{1-t^4}}$, che risulta dalla supposizione fatta di x (conforme dimostra l'equazione (8) del IV teorema moltiplicata per 2) e si giungerà all'equazione (19).

Corollario (fig. 29). — Nominando z la corda CS della lemniscata, e (t) l'altra corda CH, attribuendo a z, e a t i loro debiti valori dedotti dall'equazione (18), e integrando l'equazione (19) si scuopre l'arco inverso SL eguale al doppio dell'arco inverso HL.

Scolio III. — Dai teoremi V, VI, VII, e VIII, e loro corollarj potranno dedurre i lettori dei modi di tagliare per mezzo il quadrante della lemniscata affatto uniformi alla maniera di ciò fare da me scoperta

nel I schediasma, e questo servirà per prova della giustezza, e fecondità del mio metodo.

Problema IV. — Posto, che il quadrante della lemniscata sia tagliato in un dato numero di parti eguali, suddividere in due porzioni parimenti uguali ciascuna di dette parti.

Soluzione. — Per maggior chiarezza, e brevità si chiamino archi diretti impari quegli archi diretti della lemniscata, che contengono un numero impari delle parti eguali di essa. In virtù del I corollario del V teorema si prendano gli archi diretti suddupli di tutti gli archi impari; indi pel I corollario del III teorema del I schediasma si trovino gli archi inversi eguali a tutti questi archi diretti suddupli, e si otterrà l'intento. Il che dovea ritrovarsi.

Scolio IV. — Dall'VIII teorema potranno dedurre i lettori un'altra maniera simile di sciorre questo problema, che io per brevità tralascio.

Corollario. — Poichè nel I schediasma ò insegnato il modo di tagliare il quadrante della lemniscata in due parti eguali, e nel I, e II problema del presente scritto ò trovata la maniera di segare il medesimo quadrante in tre, e cinque parti eguali; ne segue in vigore dello scioglimento di questo problema, che il quadrante della lemniscata potrà dividersi algebraicamente in tante parti eguali, quanti numeri si contengono in queste tre formole, cioè: 2×2^m; 3×2^m; 5×2^m, nelle quali l'esponente m significa qualunque numero intiero positivo.

E questa è una nuova, e singolare proprietà della mia curva.

XXXV.

METODO

PER TROVARE NUOVE MISURE DEGLI ARCHI DELLA PARABOLA CUBICA PRIMARIA (*).

AVVERTIMENTO. — Dovrà chi legge considerare ciò, che io son qui per dire, come una continuazione del mio II schediasma sopra la lemniscata, il quale anche si terrà sotto gli occhi per ben comprendere ciò, che segue.

TEOREMA IX. — Sieno le due equazioni seguenti (20), e (21): io dico, che posta la prima di esse, anche l'altra sussiste

$$t^2 = \frac{\sqrt{1+x^4} \mp x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4} \pm x\sqrt{2}} \tag{20}$$

$$\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} + \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 0 . \tag{21}$$

DIMOSTRAZIONE. — In virtù del II teorema, posta l'infrascritta equazione (22), si à l'altra equazione (23) parimente infrascritta, come si vede quadrando l'equazione (3), dividendo l'equazione (4) per $\sqrt{2}$, e ponendo nell'equazioni (3), e (4) t in luogo di x

$$t^2 = \frac{1 \mp z}{1 \pm z} \tag{22}$$

$$\frac{\mp dz}{\sqrt{2}\sqrt{1-z^4}} = \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} . \tag{23}$$

In oltre pel I teorema, data la seguente equazione (24), che è la stessa, che l'equazione prima, si à l'altra equazione (25), come appare dividendo per $\sqrt{2}$ l'equazione seconda

(*) Giornale de' Letterati d'Italia, tomo XXXIII, pag. 148.

$$x = \frac{(1 \mp \sqrt{1-z^4})^{\frac{1}{2}}}{z} \tag{24}$$

$$\frac{\pm\, dz}{\sqrt{2}\,\sqrt{1-z^4}} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}. \tag{25}$$

Ma l'equazione (24) genera quest'altra $z = \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$.

E però sostituendo nell'equazione (22) questo valore di z si troverà l'equazione (20), e aggiungendo l'equazione (25) all'equazione (23) si avrà l'equazione (21): ciò, che era da dimostrare.

Scolio V. — Quando nel segno ambiguo dell'equazione (24) prevale il segno superiore, allora la quantità x è minore dell'unità, o almeno non maggiore di essa; ma quando nella detta equazione (24) in vece del segno dubbioso si prende il segno inferiore, allora la x è maggiore dell'unità, o almeno non minore, come fa vedere la stessa equazione (24), ove la z è minore, o almeno non maggiore dell'unità, e conseguentemente la x, ch'entra nel secondo membro dell'equazione (20) è minore dell'unità, o almeno non maggiore, allorchè in detta equazione (20) in vece del segno ambiguo regna il superiore, e la medesima x è maggiore dell'unità, o almeno non minore, quando nel segno dubbioso dell'equazione (20) si assume l'inferiore.

Corollario. — Chi desidera avere il valore di x in t idoneo a salvare l'equazione (21), tragga dall'equazione (22) il valore di z in t, cioè

$$z = \frac{\pm 1 \mp t^2}{1+t^2}.$$

E questo valore di z surrogato nell'equazione (24) darà la seguente

$$x = \frac{\left[(1+t^2)^2 \mp 2t\sqrt{2+2t^4}\right]^{\frac{1}{2}}}{\pm 1 \mp t^2}. \tag{26}$$

Teorema X. — Sieno le due infrascritte equazioni (27), e (28); io dico, che posta la prima di esse, sussiste anche l'altra

$$t = \frac{1}{x} \tag{27}$$

$$\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} + \frac{dz}{\sqrt{1+x^4}} = 0. \tag{28}$$

Dimostrazione. — Benchè il solo calcolo provi semplicissimamente la verità di questa proposizione, che io già trovai con una maniera nuova, e affatto diversa nel mio metodo per rettificare la differenza degli archi in infinite specie di parabole irrettificabili, tuttavia, affinchè maggiormente si conosca la fecondità de' principj, che ò stabiliti nel mio II schediasma sopra la lemniscata, dimostrerò il teorema nella maniera, che segue.

Mostra il III teorema, che posta la seguente equazione (29), che è la stessa, che l'equazione (5), si à l'altra equazione (30), come si conosce moltiplicando per $\sqrt{2}$ l'equazione (6).

$$x = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}} \tag{29}$$

$$\frac{du\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}. \tag{30}$$

Di più fa vedere il IV teorema, che, data l'infrascritta equazione (31), si à l'altra equazione (32), come apparisce ponendo nell'equazioni (7), e (8) u invece di t, e t in cambio di x, e moltiplicando l'equazione (8) per $\sqrt{2}$.

$$t = \frac{\sqrt{1-u^4}}{u\sqrt{2}} \tag{31}$$

$$-\frac{du\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}. \tag{32}$$

Ora l'equazione (29) moltiplicata per l'equazione (31) produce l'equazione $tx = 1$, da cui nasce l'equazione (27), e l'equazione (30) aggiunta all'equazione (32) genera l'equazione (28): resta dunque stabilito il teorema: ciò, che bisognava dimostrare.

Corollario. — Egli è evidente, che per avere un valore di x in t, che salvi l'equazione (28), si dee prendere quella, che segue

$$x = \frac{1}{t}. \tag{33}$$

Teorema XI. — Sieno le due infrascritte equazioni (34), e (35); io dico, posta la prima di esse, sussiste anche l'altra

(34) $$t^2 = \frac{\sqrt{1+x^4} \pm x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4} \mp x\sqrt{2}}$$

(35) $$-\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} + \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 0.$$

Dimostrazione. — Pongasi nelle due equazioni (20), e (21) del IX teorema $\frac{1}{t}$ in vece di t, e nella suddetta equazione (21) in luogo di dt si surroghi il differenziale di $\frac{1}{t}$, cioè $-\frac{dt}{t^2}$. In somma facciasi, che nelle due equazioni sopraccennate (20), e (21) la variabile t si cangi nella variabile $\frac{1}{t}$, e si avranno le due equazioni (34), e (35); il che doveasi dimostrare.

Scolio VI. — In conseguenza di quanto ò detto nello scolio V replico ora, che, se nel secondo membro dell'equazione (34) domina in vece del segno ambiguo il segno superiore, allora la x è minore dell'unità, o almeno non maggiore di essa, e se nel detto secondo membro dell'equazione (34) regna in luogo del segno dubbioso il segno inferiore, allora la x è maggiore dell'unità, o almeno non minore.

Questo scolio, e l'altro, che lo precede, non debbono trascurarsi da chi vorrà applicare alla geometria i tre antecedenti teoremi.

Corollario. — Se si vuole il valore di x in t, atto a salvare l'equazione (35), pongasi nell'equazione (26) del corollario del IX teorema $\frac{1}{t}$ in luogo di t, e si avrà quest'altra equazione

(36) $$x = \frac{\left[(1+t^2)^2 \mp 2t\sqrt{2+2t^4}\right]^{\frac{1}{2}}}{\pm t^2 \mp 1}.$$

Applicazione di queste verità alla parabola cubica primaria; veggasi la figura 34. — In vigore di questi tre teoremi, e loro corollarj si ànno de' valori di t in x, e di x in t atti a salvare quest'equazione

$$\frac{\pm dt}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 0$$

la quale integrata, e poi divisa per $\frac{3}{2}$ somministra questa quantità costante

$$(37) \quad \pm \int dt \sqrt{1+t^4} + \int dx \sqrt{1+x^4} \mp \frac{1}{3} t \sqrt{1+t^4} - \frac{1}{3} x \sqrt{1+x^4}.$$

Ma perchè $\int dx \sqrt{1+x^4}$ esprime l'arco AM corrispondente all'abscissa indeterminata AX (x) della parabola cubica primaria AMN, che à per sua natura $x^3 = 3y$, prendendo per y l'ordinata MX perpendicolare all'abscissa; e perchè ancora $\frac{1}{3} x \sqrt{1+x^4}$ rappresenta la tangente MR dell'arco arbitrario AM; ne segue, che la costante (37) equivale a quest'altra quantità parimente costante

$$(38) \qquad \pm \text{arc.}\, AN + \text{arc.}\, AM \mp NS - MR$$

dove l'arco AN, e la tangente NS appartengono all'abscissa AT (t), il cui valore è determinato dall'equazione (20), (27), e (34). Se poi si vorrà, che l'abscissa AT sia arbitraria unitamente coll'arco AN, e la tangente NS, che gli corrispondono; allora l'arco AM, e la sua tangente MR corrisponderanno all'abscissa AX (x), il valore della quale sarà determinato dall'equazioni (26), (33), e (36). Dovendosi avvertire, che le due equazioni (34), e (36) con ciò, che si è notato nel VI scolio, ànno luogo, allorchè nelle quantità costanti (37), ovvero (38) in cambio del segno ambiguo si prende l'inferiore.

Scolio VII. — Dopo i lumi, che ò dati nel mio nuovo metodo per misurare gli archi d'infinite specie di parabole irrettificabili, non troveranno i lettori alcuna difficoltà in fare il debito uso della quantità costante (33) per avere nuove misure degli archi della parabola cubica primaria, potranno anche stendere quest'invenzione a tutte quelle infinite specie di parabole, la rettificazione delle quali dipende dall'estensione della cubica primaria; e per ricevere più favorevolmente questa mia produzione, si degneranno far nuovo riflesso a quello, che dice negli Atti di Lipsia dell'anno 1698, alla pag. 465, l'eminente geometra sig. Giovanni Bernulli.

XXXVI.

METODO PER TROVARE QUELLE CURVE,

NELLE QUALI L'ANGOLO FATTO DALLE CORDE (CHE PARTONO TUTTE DA UN PUNTO), E DALL'ASSE STA ALL'ANGOLO FATTO DALLE NORMALI ALLA CURVA, E DAL MEDESIMO ASSE IN DATA RAGIONE DI NUMERO A NUMERO (*).

SCHEDIASMA I.

TEOREMA (fig. 35, e 36). — La curva tTA rappresenti qualunque curva, le di cui corde partano dal punto C, e CA sia l'asse (cioè la corda, che si confonde colla normale alla curva); si concepiscano condotte le due corde CT, Ct infinitamente vicine, e dal centro C col raggio CT sia descritto l'archetto TO, che taglia in O la Ct (prolungata quando bisogni), e dai punti T, e t sieno tirate le due normali alla curva TR e tR, che si tagliano in R; io dico, che l'angolo TCA fatto dalla corda, e dall'asse equivale a $\int \frac{TO}{CT}$, e l'angolo TIA fatto dalla normale e dall'asse equivale a $\int \frac{Tt}{TR}$.

DIMOSTRAZIONE. — L'angolo TCO è il differenziale dell'angolo TCA, e l'angolo TRt è il differenziale dell'angolo TIA; imperciocchè conducendo dal punto i la retta is parallela alla normale TR, il piccolo angolo sit eguale all'angolo TRt è la differenza dei due angoli tiA, siA, il secondo de' quali è uguale all'angolo TIA. Ma si sa, che l'angolo equivale al suo arco diviso pel suo raggio; adunque essendo diff. $TCA = \frac{TO}{CT}$; sarà integrando $TCA = \int \frac{TO}{CT}$, ed avendosi diff. $TIA = \frac{Tt}{TR}$, si avrà eziandio $TIA = \int \frac{Tt}{TR}$; il che dovea dimostrarsi.

(*) Opuscoli Calogierà, tomo III, pag. 1.

Resta a mostrarsi, che i primi membri di queste due equazioni integrali sieno completi, e ciò non è difficile a chi considera, che quando il punto T cade in A, allora $\int \frac{TO}{CT}$, e $\int \frac{Tt}{TR}$, cioè le due somme di tutti gli elementi dell'angolo TIA, che ànno luogo tra i punti T, ed A, ambidue, dico, queste somme sono eguali a zero.

Problema (fig. 35, e 36). — Trovare l'equazione differenziale delle curve, nelle quali l'angolo TIA sta all'angolo TCA in ragione di m ad n (m, ed n esprimono qualsivoglia numero razionale positivo).

Soluzione. — Si noti primieramente, che se m non è maggiore di n, il problema è solubile solamente nel caso della seconda figura, ma se m è maggiore di n, lo stesso problema ammette due soluzioni, una nel caso della prima figura, e l'altra nel caso della seconda.

Si noti in secondo luogo, che la formola corrispondente al valore di TR raggio del cerchio osculatore nel caso della curva concava verso il punto C, come nella prima figura, dee prendersi negativamente per ottenere il valore positivo dello stesso raggio TR, allorchè la curva è convessa verso il punto C, come nella seconda figura.

Ciò posto s'immagini sciolto il problema, e che nelle fig. 35, e 36 si abbia $TIA = \frac{m}{n} TCA$; adunque in virtù del teorema si avrà ancora $\int \frac{Tt}{TR} = \frac{m}{n} \int \frac{TO}{CT}$, cioè differenziando

$$\frac{Tt}{TR} = \frac{mTO}{nCT}. \tag{1}$$

Chiamasi ora $Ct\,(z)$, $tO\ (\pm dz)$, (cioè $+dz$ nella fig. 35, e $-dz$ nella fig. 36), $TO\,(dx)$, $Tt\,(ds)$, e il valore del raggio TR dell'evoluta senza supporre alcuna differenziale costante, sarà

$$\pm z\,dz\,ds^2 : (dx\,dz\,ds + z\,ds\,d^2x - z\,dx\,d^2s)$$

in modo che il segno dubbioso dev'essere positivo nel caso della fig. 35, e negativo nel caso della fig, 36. Tutto ciò si deduce dalla seconda annotazione fatta in principio di questo scioglimento, e dalla prima formola generale del raggio dell'evoluta esibita dal celebre signor Varignon nelle Memorie dell'Accademia reale delle scienze di Parigi dell'anno 1701, ove chiamansi n, y, dy quelle quantità, che qui si denominano respettivamente TR, z, dz.

Ponendo ora il valore di TR, e le denominazioni di Tt, TO, CT nell'equazione (1) ne risulta operando a dovere

$$dx\,dz\,ds + z\,ds\,d^2x - z\,dx\,d^2s = \pm \frac{m}{n}\,dx\,dz\,ds$$

e trasponendo, e poscia dividendo per $z\,dx\,ds$, si ottiene

$$\left(\pm \frac{m}{n} - 1\right)\frac{dz}{z} - \frac{d^2x}{dx} + \frac{d^2s}{ds} = 0$$

e quindi integrando, ritrovasi

$$l \cdot z^{\pm\frac{m}{n}-1} - l \cdot dx + l \cdot ds = l \cdot a^{\pm\frac{m}{n}-1}$$

(a è una quantità costante arbitraria).

Ora quest'ultima equazione liberata dai logaritmi somministra la seguente

$$(2) \qquad \frac{z^{\pm\frac{m}{n}-1}\,ds}{dx} = a^{\pm\frac{m}{n}-1}$$

la quale quadrata, e maneggiata nel debito modo, dopo aver surrogato in essa $dx^2 + dz^2$ in cambio di ds^2, mostra finalmente

$$(3) \qquad dx = \frac{z^{\pm\frac{m}{n}-1}\,dz}{\left(a^{\pm\frac{m}{n}-1} - z^{\pm\frac{m}{n}-1}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Il che era a ritrovarsi.

Corollario I. Sostituendo nell'equazione (2) $\sqrt{ds^2 - dz^2}$ in vece di dx, quadrando, e facendo le debite operazioni, si ritrova

$$(4) \qquad ds = \frac{a^{\pm\frac{m}{n}-1}\,dz}{\left(a^{\pm\frac{m}{n}-2} - z^{\pm\frac{m}{n}-2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Corollario II (fig. 35 e 36). — Facendo nelle (fig. 35, e 36) l'angolo retto TCN, la normale TN sarà $\frac{CT \times Tt}{TO} = \frac{z\,ds}{dx}$, a cagione della simiglianza dei due triangoli OTt, CTN, qual simiglianza è facile a mostrarsi: laonde essendo in virtù dell'equazione (2) $\frac{ds}{dx} = \frac{a^{\pm\frac{m}{n}-1}}{z^{\pm\frac{m}{n}-1}}$, sarà ancora

$$(5) \qquad TN = \frac{a^{\pm\frac{m}{n}-1}}{z^{\pm\frac{m}{n}-1}}.$$

Corollario III (fig. 35 e 36). — Dall'equazione (1) si deduce $TR = \frac{n}{m} \frac{CT \times Tt}{TO} = \frac{n}{m} TN$, e però ponendo in luogo di TN il suo valare espresso nell'equazione (5), si scopre

$$(6) \qquad TR = \frac{a^{\pm\frac{m}{n}-1}}{z^{\pm\frac{m}{n}-2}}.$$

Corollario IV (fig. 35). — Nella lemniscata il punto C è il centro, e il punto K coincide con C, CA (a) è l'asse, e l'equazione a questa curva è $ds = \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$, che è un caso dell'equazione generale (4).

Laonde per trovare il rapporto dell'angolo TIA all'angolo TCA, facciasi positivo il segno dubbioso, e suppongasi

$$z^{+\frac{2m}{n}-2} = z^4, \text{ e si vedrà } \frac{2m}{n} - 2 = 4, \text{ cioè } \frac{m}{n} = 3.$$

Adunque nella lemniscata l'angolo TIA è triplo dell'angolo TCA. Sostituiscasi ora nell'equazioni (5), e (6) questo valore di $\frac{m}{n}$ con supporre positivo il segno dubbioso, e si vedrà $TN = \frac{a^2}{z}$, e $TR = \frac{a^2}{3z}$.

Corollario V (fig. 36). — Se si vuole una curva, che rivolti la sua convessità al punto C, e goda questa medesima proprietà di $TIA = 3\,TCA$, assumasi per negativo il segno dubbioso dell'equazione (3), e in essa si surroghi 3 in cambio di $\frac{m}{n}$, dal che risulterà $dx = \frac{z^{-4} dz}{\sqrt{a^{-8} - z^{-8}}}$; cioè $dx = \frac{a^4\, dz}{\sqrt{z^8 - a^8}}$ per l'equazione differenziale della curva.

Corollario VI (fig. 36). — Se bramasi una curva nel caso della fig. 36 ove l'angolo TIA sia eguale all'angolo TCA, prendasi nell'equazione (4) per negativo il segno dubbioso, e facciasi in essa $\frac{m}{n} = 1$, e si vedrà $ds = \frac{a^{-2}\, dz}{\sqrt{a^{-4} - z^{-4}}}$, cioè $ds = \frac{z^2 dz}{\sqrt{z^4 - a^4}}$, equazione, che compete all'iperbola Apolloniana equilatera, il di cui centro è in C, e il semiasse $= a$. L'equazioni generali (5), e (6) daranno in questo caso $TN = \frac{z^3}{a^2}$, e

$TR = \frac{z^3}{a^2}$, cioè la normale eguale al raggio del cerchio osculatore, e si avrà ancora $CT = TI$.

Corollario VII (fig. 35). — Nel cerchio il punto C è il principio del diametro, ossia asse CA (a), e il punto K cade in C, l'equazione del cerchio è questa $ds = \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$, che paragonata coll'equazione generale (4), ove il segno dubbioso dev'essere positivo, somministra

$$z^{\frac{2m}{n} - 2} = z^2, \text{ cioè } \frac{2m}{n} - 2 = 2, \text{ ed } \frac{m}{n} = 2;$$

adunque TIA è doppio di TCA; l'equazioni poi (5), e (6) mostrano $TN = a$, e $TR = \frac{1}{2} a$, tutte verità notissime, che comprovano la giustezza del mio metodo.

Corollario VIII (fig. 36). — Se si desidera una curva, che sia convessa verso C, ed abbia l'angolo TIA doppio dell'angolo TCA, facciasi nell'equazione (3) negativo il segno dubbioso, e vi si ponga 2 in luogo di $\frac{m}{n}$, e quindi si scoprirà $dx = \frac{z^{-3} dz}{\sqrt{a^{-6} - z^{-6}}}$, cioè $dx = \frac{a^3 dz}{\sqrt{z^6 - a^6}}$ per l'equazione differenziale della curva richiesta.

Corollario IX (fig. 36). — Ma se si cerca una curva, che abbia l'angolo TIA sudduplo dell'angolo TCA, questa sarà necessariamente convessa verso C, e facendo negativo il segno dubbioso dell'equazione (3), e ponendovi $\frac{1}{2}$ in vece di $\frac{m}{n}$, ne deriva quest'altra $dx = \frac{z^{-\frac{3}{2}} dz}{\sqrt{a^{-3} - z^{-3}}}$, cioè $dx = \frac{a\, dz \sqrt{a}}{\sqrt{z^3 - a^3}}$, che è l'equazione differenziale della curva desiderata

Potrà questo mio metodo applicarsi a quanti esempj particolari si vorrà. Egli è superfluo l'avvertire, che nel VI corollario la voce *semiasse* significa la metà di quella linea, che geometri intendono comunemente per l'asse dell'iperbola equilatera, e che nella figura 36 gli angoli fatti dalle normali alla curva coll'asse si fanno coll'asse CA prolungato.

XXXVII.

MANIERA DI COSTRUIRE, ED ESPRIMERE CON EQUAZIONE ALGEBRAICA LE CURVE,

NELLE QUALI L'ANGOLO FATTO DALLE CORDE (CHE PARTONO TUTTE DA UN PUNTO), E DALL'ASSE STA ALL'ANGOLO FATTO DALLE NORMALI ALLA CURVA, E DAL MEDESIMO ASSE IN DATA RAGIONE DI NUMERO A NUMERO.

SCHEDIASMA II CHE DEE RIGUARDARSI COME UNA CONTINUAZIONE DEL I (*).

Sia la curva AH dotata della suddetta proprietà (fig. 37, e 38), sia C il suo centro, e CA (a) l'asse, sia CH (z) la corda, e CV, VH le coordinate, descrivasi col raggio CA il quadrante circolare BQA, di cui le rette QS, PI sieno le applicate, si tiri la corda Ch della curva infinitamente vicina all'altra corda CH, le quali corde (prolungate quanto bisogni) tagliano il quadrante respettivamente in q, e in Q, indi colla corda CH come raggio concepiscasi descritto il piccolo arco HN, che taglia in N la corda Ch.

Supposte queste cose, egli è chiaro, che l'archetto $Qq = \frac{a}{z} \times HN$, ovvero ponendo in cambio di HN il suo valore $z^{\pm \frac{m}{n} - 1} dz : \left(1 - z^{\pm \frac{m}{n} - 2}\right)^{\frac{1}{2}}$, (qui si noti, che per minor imbarazzo del calcolo la retta CA (a) si concepirà per l'avvenire eguale all'unità), il suo valore, dico, scoperto nell'equazione (3) del I schediasma, si à

$$Qq = \frac{\mp z^{\pm \frac{m}{n} - 2} dz}{\left(1 - z^{\pm \frac{2m}{n} - 2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{7}$$

Dovendosi avvertire, che il valore Qq nel caso della curva concava verso C (fig. 37) è negativo, perchè essendo in questo caso z sempre minore di a, cioè dell'unità assunta (fuorchè quando la corda si confonde coll'asse) come apparisce dal denominatore del valore di Qq, la

(*) Opuscoli Calogierà, tomo III, pag. 15.

medesima z decresce al crescere dell'arco AQ, del quale Qq è l'elemento. Pel contrario nel caso della curva convessa verso C (fig. 38) la z è sempre maggiore dell'unità assunta, cioè di a (fuorchè quando il punto H cade in A) conforme mostra il denominatore dell'espressione di Qq, e perciò z cresce all'aumentarsi dell'arco AQ, il differenziale di cui, cioè Qq rappresentato in z, e dz è per conseguenza positivo. Facciasi ora

$$(8) \qquad z = (1 - u^2)^{1:\left(\pm\frac{2m}{n}-2\right)}$$

donde nasce

$$(9) \qquad u = \left[1 - z^{\pm\frac{2m}{n}-2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

e l'equazione (7) si trasformerà in quest'altra

$$(10) \qquad Qq = \frac{du}{\left[\frac{m}{n} \mp 1\right] \sqrt{1-u^2}} .$$

(Ritengasi ora in mente ciò, che io feci avvertire nel I schediasma intorno alla significazione del segno dubbioso, nel quale deve aver luogo il superiore, allorchè la curva è concava verso C, e l'inferiore quando essa rivolge al punto C la sua convessità): ma $du : \sqrt{1-u^2}$ esprime l'arco circolare AP, che à per suo seno l'ordinata PI (u), onde l'equazione (10) integrata somministra quest'altra

$$(11) \qquad \text{Arc. } AQ = \frac{\text{arc. } AP}{\frac{m}{n} \mp 1};$$

siccome l'equazione (8) fa conoscere

$$(12) \qquad CH\ (z) = (CI)^{1:\left[\pm\frac{m}{n}-1\right]}.$$

Imperciocchè $CI = (1-u^2)^{\frac{1}{2}}$.

Adunque prendendo sul quadrante l'abscissa arbitraria CI $(\sqrt{1-u^2})$, alla quale corrispondono l'ordinata $PI\ (u)$, e l'arco AP, indi assumendo la seconda ordinata QS, che è il seno dell'arco AQ tale, ch'egli stia all'arco AP come l'unità sta al numero $\frac{m}{n} \mp 1$, e poscia pigliando sul raggio CQ, che termina l'arco AQ, la $CH\ (z)$ eguale al suo valore espresso nell'equazione (12), il punto H apparterrà alla curva AH.

Si noti, che la supposizione di $PI\ (u)$ eguale ad a, cioè all' unità assunta, rende l'arco AP eguale all'intiero quadrante, donde si deduce, che il quadrante sta all'arco AD determinato dalla posizione della corda

corrispondente della curva, e dall'asse come $\frac{m}{n} \mp 1$ sta all'unità; ma l'equazione (9) espone, che quando $u = a = 1$, la corda z è nulla nel caso della curva concava verso C ed è infinita nel caso della curva convessa verso C, adunque nel primo caso (fig. 37) la retta CD tocca la curva nel primo suo punto C, e nel secondo caso (fig. 38) la retta CD prolungata è l'asimptoto della curva, cioè la tangente della curva nell'estremo punto di lei infinitamente distante, posto che il suo quadrante stia all'arco AD come il numero $\frac{m}{n} \mp 1$ è all'unità.

Per assicurarsi, che l'equazione (11) è completa, si consideri, che quando la corda z si confonde coll'asse, cioè quando $z = a = 1$, l'arco AQ è zero, ma quando $z = a = 1$, la PI (u) è nulla per l'equazione (9), adunque allorchè $AQ = 0$, anche l'arco AP, che à per suo seno PI, è nullo, il che mostra esser completa l'equazione (11).

Per poi trovare l'equazione algebraica di queste curve, si chiamino CV (x), ed VH (y), e per la similitudine dei triangoli QCS, HCV, e per la supposizione di $a = 1$, si avrà

$$(13) \qquad y^2 = z^2 \times QS^2$$

ed essendo CV $(x^2) = CH^2 - VC^2 = z^2 - y^2$, sarà ancora

$$(14) \qquad x^2 = z^2 (1 - QS^2).$$

Ora perchè l'arco AQ è all'arco AP come numero a numero, l'ordinata QS può sempre aversi espressa in CA (1), e in PI (u), ma (u) per l'equazione (9) è data in CA (1), e in z; adunque nell'equazioni (13), e (14) le x, e le y saranno sempre date in CA (1), e in z, ed essendo inoltre $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ne segue, che nell'equazioni (13), e (14) non entreranno altre lettere, che le x, y, ed a, intendendo sempre $a = CA = 1$.

Non sarà fuori di proposito l'addurre i seguenti esempj pel modo di trovare l'equazioni algebraiche di queste curve riferite all'asse CA.

Esempio I (fig. 37). — Se si brama la curva, la di cui normale faccia coll'asse un angolo, che sia doppio dell'angolo, che la corda fa col medesimo asse, $\frac{m}{n}$ sarà $= 2$, la curva sarà concava verso C, e l'equazioni (9), e (11) si trasformeranno respettivamente in quest'altre $u = \sqrt{1 - z^2}$. Arc. AQ = arc. AP.

Ma in questo caso $QS = PI(u) = \sqrt{1 - z^2}$; adunque ponendo questo valore di QS nell'equazione (14) si avrà $x^2 = z^4$, cioè $x = z^2 = x^2 + y^2$, ovvero trasponendo, ec., $y^2 = ax - x^2$, equazione, che compete al semicerchio, che à per suo diametro CA (a).

Esempio II (fig. 37, e 38). — Se si vuole la curva concava verso C, la di cui normale faccia coll'asse un angolo triplo di quello, che fa la corda coll'asse, ovvero si desidera la curva convessa verso C, la di cui normale faccia coll'asse un angolo eguale a quello, che fa la corda coll'asse, sarà $\frac{m}{n} = 3$ nel primo caso, ed $\frac{m}{n} = 1$ nel secondo, e in ambi questi casi l'equazioni (9), ed (11) si cangeranno nelle seguenti

$$(15) \qquad u = \sqrt{1 - z^{\pm 4}}$$

$$(16) \qquad \text{Arc. } AQ = \frac{1}{2} \text{ arc. } AP.$$

Ora supponendo $QS^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - u^2}}{2}$ si salva l'equazione (16), e e ponendo il valore di u tratto dall'equazione (15) nell'espressione di QS^2 si vede $QS^2 = \frac{1 - z^{\pm 2}}{2}$; adunque sostituendo quest'ultimo valore di QS^2 nell'equazioni (13), e (14), si trova

$$(17) \qquad y^2 = \frac{z - z^{\pm 2 + 2}}{2}$$

$$(18) \qquad x^2 = \frac{z + z^{\pm 2 + 2}}{2}.$$

Sottraendo per tanto l'equazione (17) dall'equazione (18), indi estraendo la radice quadrata dai due membri dell'equazione, che ne risulta, si à $\sqrt{x^2 - y^2} = z^{\pm 1 + 1}$ cosicchè surrogando invece di z il suo valore $\sqrt{x^2 + y^2}$, e supplendo coll'unità arbitraria (a) alla legge degli omogenei, si vede primieramente, che nel primo caso della curva concava verso C, in cui l'angolo fatto dalla normale coll'asse è triplo dell'angolo fatto dalla corda coll'asse, la curva à quest'equazione

$$x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$$

che compete alla lemniscata, di cui CA (a) è l'asse.

Secondariamente si scopre, che nel secondo caso della curva convessa verso C, in cui l'angolo fatto dalla normale, e dall'asse è uguale

all'angolo, che la corda fa col medesimo asse, la curva è di quest'equazione dotata $\sqrt{x^2 - y^2}$, cioè $y^2 = x^2 - a^2$, ch'esprime la natura dell'iperbola equilatera, il di cui semiasse è CA (a).

Esempio III (fig. 37 e 38). — Se si cerca la curva concava verso C, nella quale l'angolo fatto dalla normale coll'asse sia quintuplo dell'angolo, che fa la corda coll'asse, ovvero si brama la curva convessa verso C, nella quale l'angolo fatto dalla normale coll'asse sia triplo dell'angolo, che fa la corda coll'asse, si avrà $\frac{m}{n} = 5$ nel primo caso ed $\frac{m}{n} = 3$ nel secondo, di modo che in ambedue di questi casi si vedranno l'equazioni (9), e (11) cangiarsi in quelle, che seguono

$$u = \sqrt{1 - z^{\pm 8}} \tag{19}$$

$$\text{Arc. } AQ = \frac{1}{4} \text{arc. } AP \tag{20}$$

ma perchè la supposizione di

$$QS^2 = \frac{\sqrt{2} - (1 + \sqrt{1 + u^2})^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}}$$

salva l'equazione (20), ne segue, che surrogando in questa espressione di QS^2 in luogo di u il suo valore notato nell'equazione (19), si ottiene $QS^2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + z^{\pm 4}}}{2\sqrt{2}}$ e questo ultimo valore di QS^2 posto nell'equazioni (13), e (14) somministra le due infrascritte

$$y^2 = \frac{z^2\sqrt{2} - z^2\sqrt{1 + z^{\pm 4}}}{2\sqrt{2}}, \tag{21}$$

$$x^2 = \frac{z^2\sqrt{2} + z^2\sqrt{1 + z^{\pm 4}}}{2\sqrt{2}}. \tag{22}$$

Ora l'equazione (21) sottratta dall'equazione (22) dà la seguente

$$x^2 - y^2 = \frac{z^2\sqrt{1 + z^{\pm 4}}}{\sqrt{2}}$$

che prima moltiplicata per $\sqrt{2}$, e poscia quadrata fa conoscere

$$2\,(x^4 - y^2)^2 = z^4 + z^{\pm 4 + 4}$$

e perciò sostituendo in cambio di z^2 il suo valore $x^2 + y^2$, e facendo le necessarie operazioni, ritrovasi in primo luogo, che nel primo caso della curva concava verso C dotata di questa proprietà, che l'angolo della

normale coll'asse sia quintuplo dell'angolo fatto dalla corda coll'asse, la curva à questa natura $(x^2 + y^2)^4 = a^4 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$.

In secondo luogo si scopre, che nel secondo caso della curva convessa verso C di tal'indole, che l'angolo della normale coll'asse sia triplo dell'angolo, che la corda fa coll'asse, la curva gode quest'equazione

$$x^4 + y^4 = 6x^2y^2 + a^4$$

la quale non è più composta di quella della lemniscata, che, siccome ò mostrato di sopra, serba la medesima proprietà di avere l'angolo fatto dalla normale coll'asse triplo dell'angolo, che fa la corda coll'asse.

Dall'equazione (4) notata nel I schediasma apparisce, che nel primo de' due casi di questo III esempio l'elemento della curva è l'infrascritto $\frac{a^4 dz}{\sqrt{a^8 - z^8}}$, e nel secondo di questi due casi l'elemento della curva è il seguente $\frac{z^4 dz}{\sqrt{z^8 - a^8}}$.

Corollario (fig. 37). — Allorchè nelle curve concave verso il punto C l'ordinata VH è la massima, la stessa ordinata si confonde colla normale, e l'angolo retto HVA fatto dalla medesima normale, e dall'asse sta all'angolo HCA fatto dalla corda, e dall'asse, come il numero $\frac{m}{n}$ sta all'unità; cosicchè tirando la corda CH, che faccia l'angolo $HCA = \frac{n}{m} BCA$, essa determinerà nella periferia della curva il punto H, dal quale tirando l'ordinata HV, questa sarà maggiore di tutte l'altre.

Esempio (fig. 39). — Ò già mostrato, che nella lemniscata $\frac{m}{n} = 3$; adunque la corda CH, che forma coll'asse l'angolo HCA eguale ad un terzo dell'angolo retto, cioè di 30 gradi, determina l'ordinata massima HV.

Quindi nasce, che prolungando l'ordinata massima HV sino al punto O del quadrante inferiore COA della lemniscata, che è simile, ed eguale al quadrante superiore CHA, come è facile a provarsi, e tirando l'altra corda inferiore CO, ch'è uguale alla corda superiore CH, e forma coll'asse l'angolo $OCA = HCA$, si avrà l'angolo HCO di 60 gradi, e sarà eguale a ciascuno de' due angoli CHO, COH, di modo che il triangolo HCO sarà equilatero, e l'ordinata massima HV sarà suddupla della corda CH,

che gli corrisponde, e però sostituendo $\frac{1}{2}z$ in luogo di y nell' equazione (17), e facendo valere in essa nel segno dubbioso il segno superiore, indi operando nel debito modo si troverà essere

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

cioè la corda della lemniscata, che determina la maggiore dell'ordinata sarà eguale a $\frac{CA}{\sqrt{2}}$, la stessa ordinata massima sarà $= \frac{1}{2\sqrt{2}}CA$, e l'abscissa corrispondente $CV = \sqrt{CH^2 - HV^2}$ sarà $\frac{CA\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

XXXVIII.

CONTINUAZIONE DEL II SCHEDIASMA

SOPRA L'INVENZIONE DI QUELLE CURVE, NELLE QUALI L'ANGOLO FATTO DALLE CORDE (CHE PARTONO TUTTE DA UN PUNTO), E DALL'ASSE STA ALL'ANGOLO FATTO DALLE NORMALI ALLA CURVA, E DALL'ASSE IN DATA RAGIONE DI NUMERO A NUMERO.

SCHEDIASMA III. — Parte I (*).

Non sempre avviene, che nel caso della fig. 37 del II schediasma l'arco AQ sia minore dell'arco AP; imperciocchè il caso generale della fig. 37 suddetta ne comprende infiniti, ne' quali il punto Q cade di là dal punto P per rapporto al punto A: io ne porterò un solo esempio, e l'esaminerò in maniera che darà lume per gli altri.

Esempio (fig. 40). — Se si chiede la natura della curva, le di cui normali fanno coll'asse un angolo, che sta all'angolo fatto dalle corde coll'asse come 3 a 2, allora $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$, e l'equazioni (9), e (11) somministrano queste altre, purchè nel segno dubbioso si faccia valere il superiore

$$u = \sqrt{1 - z} = \sqrt{a^2 - az}. \tag{23}$$

$$\text{Arc. } AQ = 2 \text{ arc. } AP. \tag{24}$$

Facendo poi $QS^2 = 4u^2(1 - u^2)$, si salva l'equazione (24), e surrogando nell'espressione di QS^2 il valore di u in z tratto dall'equazione (23), si vede $QS^2 = 4z(1 - z)$, laonde sostituendo nell'equazioni (13), e (14) quest'ultimo valore di QS^2, ritrovasi

$$y^2 = 4z^3 - 4z^4 \tag{25}$$

$$x^2 = z^2 - 4z^3 + 4z^4 \tag{26}$$

(*) Opuscoli Calogierà, tomo VII, pag. 3.

e ponendo in cambio di z^2 il suo valore x^2+y^2 nell'equazione (45) si otterrà

$$(27) \qquad y^2 = 4\,(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}} - 4\,(x^2+y^2)^2.$$

Allorchè l'ordinata VH è la massima, sarà in virtù del corollario registrato verso il fine del II schediasma, sarà, dico l'angolo

$$HCA = \frac{2}{3}\,BCA,$$

cioè sarà di 60 gradi, e per conseguenza l'angolo BCH sarà di gradi 30.

Quando la corda (z) è nulla, l'equazione (26) fa vedere, che anche l'abscissa $CV\,(x)$ è nulla, e l'equazione (23) mostra, che la $PI\,(u)$ è $=1=a=BC$, e siccome in questo caso l'arco AP diviene il quadrante AB, così per l'equazione (24) l'arco AQ diventa il semicerchio ABD; adunque l'asse CA tocca la curva in C primo de' suoi punti.

Per sapere, dove l'ordinata Yw corrispondente all'abscissa Cw negativa si confonde colla tangente della curva, si consideri, che l'angolo YCA fatto dalla corda YC, e dall'asse è uguale a due terzi dell'angolo fatto dalla normale alla curva tirata dal punto y infinitamente vicino al punto Y, ma questa normale fa coll'asse un angolo equivalente a due angoli retti, poichè incontra l'asse in un punto infinitamente lontano dal punto C, e fa col medesimo asse verso la parte di C un angolo infinitamente piccolo; adunque l'angolo YCA è uguale a due terzi di due angoli retti, e però è di 120 gradi, e l'angolo YCB è di 30 gradi. come l'angolo BCH, che determina l'ordinata massima.

L'equazione (27) mostra, che i quattro quadranti della curva, cioè $CYCA$, $CKED$, $CFXD$, CXA sono simili, ed eguali, e quindi si vede, che, siccome la corda CH (che ora si concepisce formar l'angolo HCB di 30 gradi) determina nel quadrante $CYHA$ l'ordinata VH, che si confonde colla normale alla curva, così nell'altro quadrante $CKED$ la corda CE, che fa l'angolo EBC di 30 gradi determina l'ordinata massima RE, cioè quella, che si confonde colla normale alla curva, e siccome nel quadrante $CYHA$ la corda CY, che fa l'angolo YCB di 30 gradi determina l'ordinata Yw, che si confonde colla tangente, così nell'altro quadrante $CKED$ la corda CK, che forma l'angolo KCB di 30 gradi, determina l'ordinata KW, che si confonde con la tangente.

Segue da tutto questo: primo, che i triangoli ECH, ed YCK sono equilateri a cagione dell'angolo comune ECH di 60 gradi, e dell'egualità de' loro lati: secondo, che l'ampiezza della foglia $GYCKC$ della curva è

determinata dalla retta YK base del triangolo equilatero YCK: terzo, che le abscisse $C\&$, CV sono la metà delle loro corde respettive CK, CH, le quali corde sono i lati respettivi de' due triangoli equilateri.

E però chi desidera sapere i precisi valori delle suddette due corde CH, CK, ponga nell'equazione (26) $\frac{1}{2}z$ in luogo di x, e ne risulterà quest'equazione $\frac{1}{4}z^2 = z^2 - 4z^3 + 4z^4$, cioè $z^2 - z + \frac{3}{16} = 0$, donde si deducono due valori di z, cioè $CH(z) = \frac{3}{4}a$, e $CK(z) = \frac{1}{2}a$, e quindi si fa manifesto; primieramente, che

$$CV(x) = \frac{1}{2}CH = \frac{3a}{8}, \text{ ed } VH(y) = \sqrt{CH^2 - CV^2} = \frac{3a\sqrt{3}}{8}:$$

secondariamente, che

$$C\&(x) = \frac{1}{2}CK = Cw = \frac{1}{8}a, \text{ e che } \&K(y) = wY = \sqrt{CK^2 - C\&^2} = \frac{1}{8}a\sqrt{3}.$$

Chi poi desidera il valore della CG (fig. 40), che è perpendicolare all'asse, e incontra i due quadranti $CYHA$, $CKED$ in quello stesso punto, nel quale vicendevolmente si tagliano, cioè il valore di quell'ordinata, che si confonde colla corda, surroghi z in vece di y nell'equazione (25), e la cangerà in questa $z^2 = 4z^3 - 4z^4$, cioè $z^2 - z + \frac{1}{4} = 0$, donde resulta $z = \frac{1}{2}$, cioè la corda $CG = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}CA = \frac{1}{2}CB$.

Non voglio qui tralasciar d'accennare, che ponendo $\frac{3}{2}$ in luogo di $\pm\frac{m}{n}$ nell'equazioni (5), e (6) del I schediasma, si avrà (fig. 41) la normale HN della curva, che è l'ipotenusa dell'angolo retto HCN, si avrà dico, $HN = \sqrt{az}$, ed il raggio HR del cerchio osculatore $= \frac{2}{3}\sqrt{az}$: dovendosi avvertire, che nell'equazioni (5), e (6) del suddetto I schediasma sono chiamate TN, e TR quelle quantità, che qui si chiamano respettivamente HN, ed HR. Concependo ora condotta la tangente HK (fig. 41), che tocca la curva nel punto H, e taglia in K la sunnormale CN pro-

lungata, si avrà questa proporzione $CN \,.\, CH\,(z) :: CH\,(z) \,.\, CK = \frac{z^2}{CN}$; ma $CN = \sqrt{HN^2 - CH^2} = \sqrt{az - z^2}$, adunque la sottangente

$$CK = \frac{z^2}{\sqrt{az - z^2}} = \frac{z\sqrt{az}}{\sqrt{a^2 - az}},$$

e però la tangente $HK = \sqrt{CK^2 + CH^2} = \frac{az}{\sqrt{a^2 - az}}$.

Si noti (fig. 42), che prendendo la corda indeterminata $CH\,(z)$, che taglia la curva nel punto H situato tra il centro C, e il punto Y determinato di sopra, da cui scende quell'ordinata, che si confonde colla tangente della curva, si avrà l'angolo HCA eguale a due terzi di due angoli retti più due terzi dell'angolo RIA, che fa la normale coll'asse prolungato di là dal centro C: poichè $HCA = YCA + YCH$; ma già si è mostrato YCA eguale a due terzi di due angoli retti, ed YCH è uguale a due terzi della somma di tutti gli angoli minimi, che fanno tutti i raggi dell'evoluta tra i punti Y, ed H presi a due a due, e infinitamente tra loro vicini; in oltre l'angolo RIA è uguale alla stessa somma di tutti questi minimi angoli, attesochè tirando il raggio dell'evoluta Rh infinitamente vicino all'altro raggio RH, e conducendo dal punto i dove Rh taglia l'asse AC prolungato, la is parallela all'altro raggio RH, il piccolo angolo Ris differenziale dell'angolo RIA è uguale al piccolo angolo HRh, che è l'elemento della somma di tutti gli angoli infinitamente piccoli, che formano, come si è detto, tutti i raggi dell'evoluta tra i punti Y, ed H, e però si vede $HCA = YCA + YCH = YCA + \frac{2}{3} RIA$, cioè l'angolo HCA è uguale a due terzi di due angoli retti più due terzi dell'angolo RIA.

Sebbene (fig. 40) la curva di questo esempio è *geometrica, ritorna in se stessa, e chiude spazio*, nientedimeno essa è *rettificabile*, conciosiachè ponendo nell'equazione (4) del I schediasma $\frac{3}{2}$ in cambio di $\pm\frac{m}{n}$, si si avrà $ds = \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{a - z}}$ per l'espressione dell'elemento di questa curva; laonde integrando, e aggiungendo la costante propria, si à l'arco indeterminato CYH della curva eguale a $2a - 2\sqrt{a^2 - az}$.

Allorchè l'arco indeterminato CYH della curva diviene l'intiero qua-

drante di essa, la z diviene $= a$, e il valore del quadrante è $2a$; di modo che il valore de' due quadranti eguali $CYHA$, CXA è uguale a $4a$, e tutta la periferia della curva vale $8a$.

L'arco poi CYG della medesima curva, il quale è la metà del contorno della foglia $CYCKG$, ed è determinato dalla corda CG, che si è di sopra trovata eguale a $\frac{1}{2}a$, à per suo valore questa quantità $2a - a\sqrt{2}$, e tutto il contorno della foglia $CYCKG$ è uguale a $4a - 2a\sqrt{2}$, onde tutto il giro $GAXDG$ della curva, cioè l'intera periferia, meno i contorni delle due foglie simili, ed eguali, vale $8a - (8a - 4a\sqrt{2}) = 4a\sqrt{2}$.

XXXIX.

CONTINUAZIONE DEL II SCHEDIASMA

SOPRA L'INVENZIONE DI QUELLE CURVE, NELLE QUALI L'ANGOLO FATTO DALLE CORDE (CHE PARTONO TUTTE DA UN PUNTO), E DALL'ASSE STA ALL'ANGOLO FATTO DALLE NORMALI ALLA CURVA, E DALL'ASSE IN DATA RAGIONE DI NUMERO A NUMERO.

SCHEDIASMA III. — PARTE II (*).

Segue l'esame della curva,
che si è proposta per esempio nella prima parte di questo III schediasma.

Se si estrae la radice quadrata dall'uno e l'altro membro dell'equazione (26) notata nella prima parte di questo schediasma, si trova la seguente

$$\pm x = z - 2z^2 \tag{28}$$

cioè $+x$ quando az è maggiore di $2z^2$, e $-x$ allorchè az è minore di $2z^2$. cosicchè dall'equazione (28) nascono queste altre due

$$z^2 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} x = 0 \tag{29}$$

$$z^2 - \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} x = 0 \tag{30}$$

corrispondendo l'equazione (29) al caso di z minore di $\frac{1}{2} a$, e l'equazione (30) al caso di z maggiore di $\frac{1}{2} a$.

Riflettasi ora, che risolvendo l'equazione (29) ritrovasi l'infrascritta

$$z = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{a^2 - 8ax}, \tag{31}$$

ove la z ha due valori positivi, purchè x non sia maggiore di $\frac{1}{8} a$, e

(*) Opuscoli Calogierà, tom. VII, pag. 13.

risolvendo l'equazione (30) ne risulta quest'altra $z = \frac{1}{4} a \pm \frac{1}{4} \sqrt{a^2 + 8ax}$, ove z à un solo valore positivo, cioè $\frac{1}{4} a + \sqrt{a^2 + 8ax}$, e si vedrà (fig. 43): Primo, che nella porzione $CNOG$ della curva, cioè nella metà del contorno della foglia, ad ogni valore di CM (x) corrispondono due corde, cioè CN, CO, purchè CM (x) sia minore di $\frac{1}{8} a$, mentre allorchè $x = \frac{1}{8} a$, la CN e la CO si confondono in una. Secondo, che nella porzione GHA della curva ad ogni valore di CM (x) corrisponde un'altra corda CT, la quale è sempre maggiore di $\frac{1}{2} a$, fuorchè nel caso di $x = 0$, poichè allora la corda si confonde coll'ordinata CG, e diviene uguale a $\frac{1}{2} a$, come per altra via si è trovato nella prima parte di questo schediasma. Terzo, che nella porzione $CNOG$ della curva la somma delle due corde CN, CO è uguale a $\frac{1}{2} a = CG$, conforme fa conoscere la sola ispezione dell'equazione (31), ove la somma delle due radici vere dell'equazione (29) si vede essere eguale a $\frac{1}{2} a$.

Ma questa curva (fig. 43) è dotata di un'altra bella proprietà, ed è, che tirando qualunque corda CH alla porzione GHA, la medesima CH taglia in N l'altra porzione $GONC$ della curva in maniera, che la somma delle due corde CN, CH, le quali sono sulla stessa retta linea, la somma, dico, di CN, CH, è uguale a CA (a). Eccone la dimostrazione. Si calino le ordinate NM, HV, e per la simiglianza de' triangoli HCV, NCM, si avrà questa proporzione $CH \cdot CV :: CN \cdot CM = \frac{CV \times CN}{CH}$.

Ponendo per tanto nell'equazione (30) CH in luogo di z, e CV in vece di x, si ottiene

$$(32) \qquad CH^2 - \frac{1}{2} a.CH - \frac{1}{2} a.CV = 0$$

similmente sostituendo nell'equazione (29) CN in cambio di z, e $\frac{CV \times CN}{CH}$ valore di CM in luogo di x, si à $CN^2 - \frac{1}{2} a.CN + \frac{1}{2} a \frac{CV \times CN}{CH} = 0$,

cioè riducendo il tutto a comun denominatore, e poscia dividendo per $\frac{CN}{CH}$

$$CN \times CH - \frac{1}{2}a.CH + \frac{1}{2}a.CV = 0$$

e aggiungendo quest' ultima equazione all' equazione (32), ne deriva $CH^2 + CN \times CH - aCH = 0$ e dividendo per CH, e trasponendo, finalmente si scopre $CH + CN = a = CA$.

Il che dovea dimostrarsi.

Quindi nasce, che descrivendo col raggio $CG = \frac{1}{2}a$ il cerchio GEP, questo taglierà la corda arbitraria CH in E in modo, che l'altra corda CN, la CE, e la suddetta corda CH saranno in proporzione aritmetica continua, e conseguentemente la NH differenza delle due corde CN, CH sarà divisa per mezzo in E.

Poichè (fig. 43), si à $CI + CO = a$, si avrà ancora

$$CI + CH + CO + CN = 2a$$

ma si è già trovato $CO + CN = \frac{1}{2}a$; adunque $CI + CH = \frac{3}{2}a$.

Di più $CI + CH = OI + NH + CO + CN$, e perciò

$$OI + NH = CI + CH - CO - CN = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a;$$

adunque $OI + NH = a$.

Finalmente $CI + CO = a$, e quindi $OI + 2CO = a$, ed $OI = a = 2CO$, ma $a = 2CO + 2CN$, adunque $OI = 2CN$: e similmente $CH + CN = a$ e quindi $NH = a - 2CN = 2CO + 2CN - 2CN$, cioè $NH = 2CO$.

I due punti N, ed O, dai quali dipendono gli altri due punti H, ed I debbono concepirsi determinati dalle due ordinate MN, MO corrispondenti ambedue alla medesima abscissa arbitraria CM, in maniera però, che CM non sia maggiore di $\frac{1}{8}a$.

Per ottenere la misura dello spazio da questa curva compreso si consideri (fig. 44), che l'archetto circolare infinitamente piccolo HO moltiplicato per la metà della corda indeterminata CH (z) è il valore del piccolo triangolo HCb, che à per uno de' suoi lati la corda Cb infinitamente vicina alla CH, e per conseguenza $\frac{1}{2}zHO$ è il differenziale del segmento CHC della curva, ma applicando a questo caso l'equazione (3) del I schediasma, cioè ponendo $\frac{3}{2}$ in luogo di $\pm\frac{m}{n}$, e concependo l'ar-

chetto TO della (fig. 35) eguale all'archetto HO della (fig. 44) poichè differiscono tra di loro di una quantità incomparabilmente minore, si vede $HO = \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{\sqrt{a - z}}$ (è facile a conoscere, che dx nella suddetta equazione (3) del I schediasma non indica punto l' elemento dell' abscissa); adunque $\frac{1}{2} z HO = \text{diff.}\ CHC = \frac{1}{2} \frac{z^{\frac{3}{2}} dz}{\sqrt{a - z}}$; ma si à

$$(33) \qquad \int \frac{1}{2} \frac{z^{\frac{3}{2}} dz}{\sqrt{a - z}} = \int \frac{3 a^2 dz}{16 \sqrt{az - z^2}} - \frac{3a}{8} \sqrt{az - z^2} - \frac{1}{4} z \sqrt{az - z^2}$$

conforme la differenziazione farà vedere, e perciò il segmento indeterminato CHC della curva à per suo valore il secondo membro di quest'equazione (33).

Ora $\frac{3 a^2 dz}{16 \sqrt{az - z^2}}$ esprime il piccolo settore CRr $\left(= \frac{1}{2} CR \times Rr\right)$ del cerchio $MNTQF$ descritto col raggio $CR = \frac{1}{2} a \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; imperciocchè si à

$$CH\,(z) \cdot HO \left[\frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{\sqrt{a - z}}\right] :: CR \left[\frac{1}{2} a \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right] . \; Rr = \frac{a}{2\sqrt{2}} \frac{dz \sqrt{3}}{\sqrt{az - z^2}};$$

adunque $\int \frac{3 a^2 dz}{16 \sqrt{az - z^2}}$ è uguale al settore circolare CNR, e conseguentemente in virtù dell'equazione (33) si trova

$$(34) \qquad CHC = CNR - \frac{3}{8} a \sqrt{az - z^2} - \frac{1}{4} z \sqrt{az - z^2}$$

e quindi allorchè $z = a = CA$, lo spazio dell'intero quadrante $CHFA$ della curva è uguale allo spazio dell'intiero semicerchio NMQ, e tutto il giro $CHFATC$ è uguale a tutto il cerchio $NMQTN$, laonde la lunula esteriore $CHFNTC$ è uguale alla lunula interiore $FQTAF$.

Dall'equazione (34) trasposta nasce quest'altra

$$(35) \qquad CNR - CHC = CNRHC = \frac{3}{8} a \sqrt{az - z^2} + \frac{1}{4} z \sqrt{az - z^2}$$

la quale mostra la quadratura dello spazio della lunula esteriore compreso dall'arco NR del cerchio, dall'arco CH della curva, e dalle rette CN, HR.

Se il punto H cade in G in modo, che la corda CG sia quella, che soggiace alla metà della foglia della curva, sarà $CG\,(z) = \frac{1}{2}a$, l'arco circolare NM sarà il quadrante del cerchio, e per l'equazione (35) lo spazio $CNMGHC$ sarà $= \frac{1}{4}a^2$, di maniera che (fig. 45) l'area del cerchio $NMPA$ descritto col raggio $CN = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ venendo diminuita dello spazio compreso dalle due foglie $CHGVC$, $ChguC$ simili, ed eguali vale a^2.

Per avere il valore (fig. 44) dell'intiera semilunula esteriore basta porre nell'equazione (35) in luogo della corda z il valore del raggio

$$CF = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

e si troverà

$$(36) \qquad CNMFHC = \frac{1}{64}(6a + a\sqrt{6})(4a^2\sqrt{6} - 6a^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Questo valore di $CNMFHC$ per l'avvenire si chiamerà R^2 per evitare la prolissità del calcolo; adunque il trilineo RFH della lunula esteriore, il quale corrisponde alla corda indeterminata $CH\,(z)$ è uguale a questa quantità $R^2 - \frac{3}{8}a\sqrt{az - z^2} - \frac{1}{4}z\sqrt{az - z^2}$.

Se poi si vuole la misura del trilineo DFE della lunula interiore $QFATQ$ terminato dall'arco EF del cerchio, dall'arco FE della curva, e dalla corda indeterminata $CE\,(z)$, che taglia il cerchio in D, riflettasi, che si à. quest'equazione

$$(37) \qquad DFE = CHFEC - CNMFDC + CNMFHC.$$

Ma il segmento $CHFEC$ della curva appoggiato sulla corda $CE\,(z)$ in vigore dell'equazione (34) è uguale a

$$CNMFDC - \frac{3}{8}a\sqrt{az - z^2} - \frac{1}{4}z\sqrt{az - z^2},$$

e la lunula esteriore $CNMFHC$ si è trovata nell'equazione (36) eguale ad R^2; adunque sostituendo nell'equazione (37) in cambio delle suddette quantità i loro valori, si ottiene

$$DFE = R^2 - \frac{3}{8}a\sqrt{az - z^2} - \frac{1}{4}z\sqrt{az - z^2}$$

e si vede con piacere, che l'espressioni analitiche de' due trilinei indeterminati RFH, DFE sono simili. Quando il punto E cade in A, la

corda z di iene $=a$, e la quantità $\sqrt{az-z^2}$ è nulla, e però la semilunula interiore $QFATQ$ è anch'essa eguale ad R^2.

Considerando ora (fig. 46) la lunula $CNGAXBC$ formata intieramente dalla curva senza alcuna mistura di cerchio, osservo, che il trapezio $NHhn = NHOS$ differenza de' due settori simili infinitamente piccoli CHO, CNS è l'elemento del trilineo NGH, che corrisponde alle due corde indeterminate CH, CN (ambe le quali sono sulla medesima retta linea) ed à per origine il punto G determinato dalla corda $CG = \frac{1}{2}a$.

Chiamo per tanto z la corda CH, ed essendo per la proprietà della curva da me trovata di sopra $CH + CN = CA\ (a)$, ottengo $CN = a - z$: la simiglianza de' piccoli settori mostra di più

$$CH\ (z).CN\ (a-z)::HO\left(\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{a-z}}\right).NS = \frac{dz\,(a-z)}{\sqrt{az-z^2}}$$

e conseguentemente si vede

$$NHOS = \frac{1}{2}CH \times HO - \frac{1}{2}CN \times NS = \frac{1}{2}\frac{z^{\frac{3}{2}}dz}{\sqrt{a-z}} - \frac{1}{2}dz\frac{(a-z)^2}{\sqrt{az-z^2}},$$

cioè $NHOS = \frac{az\,dz}{\sqrt{az-z^2}} - \frac{1}{2}\frac{a\,dz}{\sqrt{az-z^2}}$, onde integrando coll'addizione della debita costante, ritrovasi $NHG = \frac{1}{2}a^2 - a\sqrt{az-z^2}$.

Allorchè il punto H cade in A la corda z diviene $=a$, e si vede la semilunula $CNGA = \frac{1}{2}a^2$, e l'intiera lunula $CNGAXBC = a^2 = CA^2$.

Resta ora, che si esibisca un'equazione di questa curva meno implicata dell'equazione (25) registrata nella prima parte di questo schediasma.

Per ciò eseguire traspongasi l'equazione (28), e poi si divida per 2, e ne risulterà $z^2 \pm \frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}az$ ovvero quadrando

$$z^4 \pm axz^2 + \frac{1}{4}a^2x^2 = \frac{1}{4}a^2z^2.$$

Pongasi ora $y^2 \pm x^2$ in vece di z^2, e ordinando l'equazione, che ne deriva, si otterrà la seguente

$$\begin{aligned} y^4 + 2x^2y^2 + x^4 &= 0 \\ \pm axy^2 \pm ax^3 & \\ -\frac{1}{4}a^2y^2 & \end{aligned} \tag{38}$$

la quale considerata come un'equazione del secondo grado, e risoluta, produce quest'altra

$$(39) \qquad y^2 = \frac{1}{8} a^2 \mp \frac{1}{2} ax - x^2 \sim \frac{1}{8} \sqrt{a^2 \mp 8\, ax}$$

dove il segno $\sim$ rappresenta $+$, ovvero $-$ ad arbitrio, con questo però che quando nelle due equazioni (38), e (39) in luogo del segno dubbioso si fa valere il superiore, ed x non è maggiore di $\frac{1}{8}\, a$, allora l'equazione (39) esprime le due radici vere dell'equazione (38), il di cui ultimo termine in questo caso è positivo. Ma quando nelle due equazioni (38), e (39) in vece del segno ambiguo si assume il segno inferiore, allora l'equazione (38) à una radice vera, ed una falsa, poichè in questa ipotesi il suo ultimo termine è negativo; laonde l'equazione (39) esprime in questo caso la radice positiva dell'equazione (38), se il segno $\sim$ significa $+$, e rappresenta la radice negativa, se $\sim$ significa $-$; di modo che in quest'ultima significazione tanto il valore di $+y$, quanto il valore di $-y$, ambe radici dell'equazione (39) è immaginario.

Le due ultime equazioni mostrano, che la curva da me finora esaminata è la *Cicloide geometrica primaria*, la metà della quale si genera (fig. 47) del cerchio $CTNK$, il di cui diametro è uguale a $\frac{1}{2}\, a$, allorchè detto cerchio si ruota sul cerchio eguale $CPDM$ stando immobile il secondo cerchio, e l'altra metà è generata dalla rotazione di questo secondo cerchio $CPDM$ sul primo cerchio $CTNK$ immobile. Nel primo caso il punto C del cerchio $CTNK$, e nel secondo caso il punto C del cerchio $CPDM$ sono i punti, che descrivono la curva.

LX.

OSSERVAZIONI SOPRA IL II E III ESEMPIO DEL II SCHEDIASMA,

IN CUI SI È DATA LA COSTRUZIONE ALGEBRAICA DI QUELLE CURVE, NELLE QUALI L'ANGOLO FATTO DALLE CORDE, E DALL'ASSE STA ALL'ANGOLO FATTO DALLE NORMALI ALLA CURVA, E DALL'ASSE IN RAGIONE COSTANTE DI NUMERO A NUMERO (*).

Osservazione I sopra il II esempio.

Avvertimento. — Nelle fig. 48, e 49 l'arco AKB è il quadrante di un cerchio, il di cui raggio CA $(a) = 1$; l'archetto Qq è l'elemento dell'arco AQ, il di cui seno è QS, siccome PI (u) è il seno dell'arco AP, e KT il seno dell'arco AK, il quale dee riputarsi costante; i due lati CV (x), e VH (y) del triangolo CVH rettangolo in V sono le coordinate, e la base CH (z) è la corda della curva KH.

Ciò posto. Se si prenderà $QS^2 = \frac{1+u}{2}$, si avrà $Qq = \frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, e si salverà non l'equazione (16) del II schediasma ma bensì quest'altra

$$\text{(A)} \qquad \text{Arc. } AQ - \text{arc. cost. } AK = \frac{1}{2} \text{ arc. } AP.$$

Dovendosi avvertire, che l'arco costante AK è semiretto, conforme mostra la supposizione di PI (u) eguale a zero, la quale rende

$$PS = KT = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

di modo che surrogando nella soprannotata espressione di QS^2 in vece di u il suo valore in z preso dall'equazione (15) del II schediasma, si troverà $QS^2 = \frac{1 + z\sqrt{1 - z \pm 4}}{2}$ e la sostituzione di quest'ultimo valore di QS^2 nell'equazioni (13), e (14) del II schediasma, farà scoprire

(*) Opuscoli Calogierà, tomo X, pag. 1.

(B) $$y^2 = z^2 \frac{1 + \sqrt{1 - z^{\pm 4}}}{2}$$

(C) $$x^2 = z^2 \frac{1 - \sqrt{1 - z^{\pm 4}}}{2}$$

si moltiplichino insieme l'equazioni B, e C, e ne verrà $x^2y^2 = z^4 (z^{\pm 4}) : 4$ ovvero estraendo la radice quadrata

(D) $$xy = \frac{z^2 (z^{\pm 2})}{2}.$$

Ora egli è chiaro, che quando nel segno ambiguo si farà valere la inferiore, l'equazione D si risolverà in quest'altra $xy = \frac{1}{2}$, cioè, (salvando coll'unità arbitraria (a) la legge degli omogenei) $xy = \frac{1}{2} a^2$, il che fa subito conoscere, che la curva KH della fig. 49 è un'iperbola equilatera tra gli asimptoti CB, CA, il cui semiasse $CK = a$.

Se poi nel segno dubbioso si prenderà il superiore, allora l'equazione D si cangerà nella seguente $xy = \frac{z^4}{2}$, ove ponendo in vece di z^2 il suo valore $x^2 + y^2$, moltiplicando per 2, ed uguagliando le dimensioni colla costante (a), nascerà questa nuova equazione

(E) $$2a^2xy = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

la quale esprime la natura della curva KC delineata nella fig. 48. Che poi l'equazione (E) appartenga alla lemniscata, si dimostra analiticamente così:

Nella fig. 48 chiamisi p la HR perpendicolare sulla CK (a), e q la CR, indi riflettasi, che in virtù dell'angolo semiretto OCV, e de' triangoli simili HOR, COV, si à la $OV = CV = x$, e si à eziandio la $OR = HR = p$; adunque $CO = x\sqrt{2}$, ed $HO = p\sqrt{2}$, e conseguentemente

(F) $$CR = q = p + x\sqrt{2}$$

(G) $$CV = y = x + p\sqrt{2}.$$

Ma dall'equazione (F), si deduce

(I) $$x = \frac{q - p}{\sqrt{2}}$$

adunque ponendo questo valore di x nell'equazione (G), ne deriva

(L) $$y = \frac{q + p}{\sqrt{2}}$$

e finalmente sostituendo nell'equazione (E) in luogo di x, e di y i loro valori notati nell'equazioni (I), ed (L), trovasi fatte le dovute operazioni $a^2(q^2-p^2)=q^4+2p^2q^2+p^4$, ovvero estraendo la radice quadrata

$$a\sqrt{q^2-p^2}=q^2+p^2.$$

E quest'ultima equazione compete, come già si sa, alla lemniscata. Il che dovea dimostrarsi.

La maniera uniforme di costruire algebraicamente i due binomj $\frac{z^2dz}{\sqrt{z^4-a^4}}$, ed $\frac{a^2dz}{\sqrt{a^4-z^4}}$, che risulta da questa osservazione è nuova, e un metodo simile potrà servire in simiglianti casi per variare le costruzioni algebraiche, conforme apparirà anche dalla seconda osservazione, che segue.

Osservazione II sopra il III esempio.

Avvertimento. — L'avvertimento dato nel principio dell'osservazione prima dee valere anche in questa seconda osservazione, che riguarderà le medesime fig. 48, e 49.

Prendasi $QS^2=(\sqrt{2}+\sqrt{1+u}):2\sqrt{2}$, e questo valore di QS darà $Qq=\frac{1du}{4\sqrt{1-u^2}}$, ma in vece di salvare l'equazione (20) del II schediasma, salverà la seguente

$$\text{(M)}\qquad \text{Arc.}\, AQ-\text{arc. cost.}\, AK=\frac{1}{4}\text{arc.}\, AP.$$

Si noti, che qui l'arco costante AK è di gradi 67, e mezzo, imperciocchè supponendo $PI\,(u)=0$, QS diviene eguale a

$$KT=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

e però essendo $CK=CA=1$, il coseno CT sarà $=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, ma questo valore di CT è la metà del lato dell'ottogono iscritto nel cerchio, che à il suo raggio eguale all'unità (come è già noto), e lo stesso coseno CT è il seno dell'angolo BCK; adunque l'arco BK è la metà dell'arco sostenuto dal lato dell'ottogono, e per conseguenza l'arco BK è la metà di un arco di 45 gradi, cioè l'arco BK è di gradi 22, e mezzo; adunque l'arco costante AK è di 67 gradi, e mezzo.

Ponendo ora nel valore di QS^2 registrato qui sopra in cambio di u la sua espressione in z presa dall'equazione (19) del II schediasma, si ottiene $QS^2 = \frac{\sqrt{2} + [1 + \sqrt{1 - z^{\pm 8}}]^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}}$.

Indi sostituendo quest'ultimo valore di QS^2 nell'equazioni (13), e (14) del II schediasma, ritrovasi

(N) $$y^2 = z^2 \frac{\sqrt{2} + [1 + \sqrt{1 - z^{\pm 8}}]^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}}$$

(O) $$x^2 = z^2 \frac{\sqrt{2} - [1 + \sqrt{1 - z^{\pm 8}}]^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}}$$

l'equazione O moltiplicata per l'equazione N fa conoscere

$$x^2 y^2 = \frac{z^4}{8}(1 - \sqrt{1 - z^{\pm 8}})$$

cioè estraendo la radice quadrata

(P) $$xy = \frac{z^2}{2\sqrt{2}}[1 - \sqrt{1 - z^{\pm 8}}]^{\frac{1}{2}}$$

l'equazione O sottratta dall'equazione N mostra

(Q) $$y^2 - x^2 = \frac{z^2}{\sqrt{2}}[1 + \sqrt{1 - z^{\pm 8}}]^{\frac{1}{2}}$$

moltiplicando insieme le due equazioni P, Q ne risulta

$$xy\,(y^2 - x^2) = \frac{z^4}{4}\,(z^{\pm 8})^{\frac{1}{2}}$$

cioè

(R) $$y^3 x - x^3 y = \frac{1}{4}\,z^{4 \pm 4}.$$

E quindi si vede, che se nel segno dubbioso vale il superiore, l'equazione (R) diventa quest'altra $y^3 x - x^3 y = \frac{z^8}{4}$ in cui sostituendo in cambio di z^2 il suo valore $y^2 + x^2$, e supplendo coll'unità (a) alla legge degli omogenei, si scopre $y^3 x - x^3 y = \frac{(y^2 + x^3)^4}{4a^4}$ e quest'equazione rappresenta l'indole della curva KH espressa nella fig. 48.

Ma se nel segno ambiguo regna l'inferiore, in questo caso l'equa-

zione (R) ridotta colla costante (a) all' uguaglianza delle dimensioni prende questa sembianza $y^3x - x^3y = \frac{1}{2}a^4$.

E questa è l'equazione della curva appartenente alla fig. 49.

Egli è visibile, che da questa seconda osservazione, nasce un altro modo uniforme di costruire algebraicamente i due binomj

$$\frac{a^4dz}{\sqrt{a^8 - z^8}}, \qquad \frac{z^4dz}{\sqrt{z^8 - a^8}}$$

diverso da quello che ho scoperto nel III esempio del II schediasma.

XLI.

OSSERVAZIONI SOPRA LA DESCRIZIONE DELLA CICLOIDE GEOMETRICA PRIMARIA,

CHE SERVE D'ESEMPIO NEL III SCHEDIASMA CIRCA LA MANIERA DI COSTRUIRE QUELLE CURVE, NELLE QUALI L'ANGOLO FATTO DALLE CORDE, E DALL'ASSE STA ALL'ANGOLO FATTO DALLE NORMALI ALLA CURVA, E DAL MEDESIMO ASSE IN RAGIONE COSTANTE DI NUMERO A NUMERO (*).

OSSERVAZIONE I.

AVVERTIMENTO. — Nelle fig. 50, e 51 la curva CHA è il quadrante della cicloide geometrica primaria contenuto dentro il semicerchio DBA, che à per suo raggio la $CA = a = 1$, PI è il seno dell'arco arbitrario AP; QS è il seno dell'arco AQ doppio dell'arco suddetto AP, ed FT è il seno dell'arco AF metà del quadrante circolare BFA, di modo che

$$FT = \frac{1}{\sqrt{2}} CA = \frac{1}{\sqrt{2}} a = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ho mostrato nella I parte del III schediasma, che nel caso della fig. 50, chiamando PI (u), e facendo $QS^2 = 4u^2(1 - u^2)$, cioè $QS = 2u\sqrt{1-u^2}$, si à l'arco AQ doppio dell'arco AP, perchè in questa supposizione, si à l'archetto elementare $Qq = \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}$, e ciò sussiste, allorchè il seno $PI\,(u)$ è minore, o almeno non maggiore del seno $FT\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, ma nel caso della fig. 51, ove $PI\,(u)$ è maggiore, o almeno non minore di $FT\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, si à $Qq = -\frac{2\,du}{\sqrt{1-u^2}}$, come apparisce a chi considera che appellando $QS\,(b)$, si trova $db = \frac{2(1-u^2)\,du}{\sqrt{1-u^2}}$ nello stesso tempo, che il suddetto valore di b, somministra $\sqrt{1-b^2} = \sqrt{1-4u^2+4u^4} = \pm(1-u^2)$, ove nel segno ambiguo à luogo il superiore, allorchè u è minore, o al-

(*) Opuscoli Calogierà, tomo X, pag. 13.

meno non maggiore di $\frac{1}{\sqrt{2}}$, e vi à luogo il segno inferiore, quando u è maggiore, o almeno non minore di $\frac{1}{\sqrt{2}}$; adunque nel caso della fig. 50, si à $Qq = \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}$, e nel caso della fig. 51, si à $Qq = -\frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}$.

Laonde rimane a dimostrare, che l'arco AQ è doppio dell'arco AP anche nel caso della fig. 51; a questo effetto si osservi, che in questo caso integrando l'equazione differenziale $Qq = -\frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}$, si ottiene

$$\text{(S)} \qquad \text{Arc. } DQ = 2 \text{ arc. } BP$$

equazione completa, imperciocchè la supposizione di PI $(u) = 1 = a$, cioè dell'arco AP eguale al quadrante circolare BFD annulla nel medesimo tempo l'arco BP, e l'arco DQ, mentre rende $QS = 2u\sqrt{1-u^2} = 0$ e perciò sottraendo l'equazione (S) da quest'altra equazione arc. $DBA = 2$ arc. BA, si vede arc. DBA — arc. $DQ = 2$ arc. BA — 2 arc. BP, cioè

$$\text{Arc. } AQ = 2 \text{ arc. } AP.$$

Il che era a dimostrarsi.

Da tutto questo si deduce, che per descrivere (fig. 50, e 51) la cicloide geometrica primaria CHA dee assumersi nel quadrante AB l'arc. arbitrario AP, indi l'arc. AQ doppio dello stesso arco AP, e dopo aver tirato il raggio CQ, dee prendersi in esso la porzione CH eguale al valore di z tratto dall'equazione (23) della prima parte del III schediasma, che è questa $u = \sqrt{1-z} = \sqrt{a^2 - az}$, dee prendersi, dico, $CH\ (z) = a - \frac{u^2}{a}$ cioè $CH = CA - \frac{PI^2}{CA}$, e il punto H sarà alla cicloide geometrica primaria.

ALTRA OSSERVAZIONE

SOPRA LA DESCRIZIONE DELLA CICLOIDE GEOMETRICA PRIMARIA.

Avvertimento. — Nelle fig. 52, e 53 la curva $CNGHA$ è il quadrante della cicloide geometrica primaria, contenuto dentro il quadrante AO di un cerchio, che à per suo semidiametro $CA = a$ uguale all'unità assunta; il quadrante circolare RKP à per suo raggio la linea arbitraria CR maggiore, ovvero minore della retta CG, la quale è uguale alla metà dell'unità assunta CA (a); e la retta KS è il seno dell'arco circolare arbitrario KR preso nel quadrante RKP.

Se nell'equazione (29) della seconda parte del III schediasma in vece di x si pone l'abscissa CM, e in vece di z si pone la corda CN minore, o almeno non maggiore di $CG\left[\frac{1}{2}a\right]$ e se nell'equazione (30) della medesima seconda parte del III schediasma in luogo di x si sostituisce l'abscissa CV, e in luogo di z si sostituisce la corda CH maggiore, o almeno non minore di $CG\left[\frac{1}{2}a\right]$, e finalmente se in ambedue l'equazioni (29), e (30) della stessa seconda parte del III schediasma si supplisce coll'unità assunta CA (a) alla legge degli omogenei, si ànno le due infrascritte equazioni

$$(T)\qquad CN^2-\frac{1}{2}\,CA\times CN+\frac{1}{2}\,CA\times CM=0$$

$$(V)\qquad CH^2-\frac{1}{2}\,CA\times CH-\frac{1}{2}\,CA\times CV=0.$$

Ma la similitudine dei tre triangoli CKS, CHV, CNM somministra $CM=\frac{KS\times CN}{CK}$ e $CV=\frac{KS\times CH}{CK}$, perlochè surrogando nell'equazioni T, e V questi valori di CM, e CV, ne vengono quest'altre

$$(X)\qquad CN^2-\frac{1}{2}\,CA\times CN+\frac{1}{2}\,\frac{CA\times KS\times CN}{CK}=0$$

$$(Y)\qquad CH^2-\frac{1}{2}\,CA\times CH-\frac{1}{2}\,\frac{CA\times KS\times CH}{CK}=0.$$

Ora l'equazione X divisa per CN, e trasposta, fa vedere

$$(Z)\qquad CN=\frac{1}{2}\,CA-\frac{1}{2}\,\frac{CA\times KS}{CK}$$

finalmente l'equazione Y divisa per CH, e trasposta fa vedere

$$(H)\qquad CH=\frac{1}{2}\,CA+\frac{1}{2}\,\frac{CA\times KS}{CK}.$$

Adunque prendendo nel quadrante RKP (fig. 52) l'arco arbitrario RK, e sul diametro CK (prolungato quando bisogni) le due porzioni CN, CH eguali ai loro valori espressi nell'equazioni Z, ed H, ambedue i punti N, ed H saranno alla cicloide geometrica primaria.

Si noti primieramente, che aggiungendo le due equazioni Z, ed H,

si à $CN + CH = CA = a$, conforme ho trovato in altra maniera nella seconda parte del III schediasma.

Si noti in secondo luogo (fig. 53), che se il raggio RC del quadrante RKP è uguale alla $CG = \frac{1}{2} CA = \frac{1}{2} a$, la sostituzione di $CK = CG$ in cambio di $\frac{1}{2} CA$ in ambe l'equazioni Z, ed H, e la trasposizione faranno conoscere

$$KS = CK - CN = KN$$
$$KS = CH - CK = KH.$$

E quindi nasce una maniera assai spedita di descrivere per punti la cicloide geometrica primaria, ed è la seguente (fig. 53): col raggio $CG = \frac{1}{2} CA = \frac{1}{2} a$ descrivasi il quadrante circolare GKP, e in esso prendasi ad arbitrio il punto K, prolunghisi il semidiametro CK, e dall'una, e l'altra parte del punto K si taglino sul medesimo semidiametro CK prolungato le due porzioni KN, KH, eguali ambedue al seno KS dall'arco GK; io dico, che i punti N, ed H sono alla cicloide geometrica primaria.

XLII.

OSSERVAZIONE SOPRA UNA NUOVA MANIERA DI DESCRIVERE LA LEMNISCATA (*).

(Fig. 54).

Nella mia prima osservazione sopra il II esempio del II schediasma ò trovato, che supponendo retto l'angolo RCP, il quale comprende i due quadranti CHK, KTC della lemniscata, chiamando z la corda arbitraria CH di questa curva, ed à la CK massima delle sue corde, e nominando ancora x l'abscissa CV, ed y l'ordinata VH, ò trovato, dico, che la natura della lemniscata è rappresentata in quest'equazione $xy = \frac{z^4}{2}$, cioè

$$(\&) \qquad 2\,a^2xy = z^4.$$

Posto ora, che il quadrante circolare RMP sia descritto col raggio $CR = \sqrt{2\,a^2}$, e che MS sia il seno dell'arco RM tagliato dalla corda CA prolungata della curva, ne segue, che la stessa corda CH è media proporzionale tra il seno MS, e il coseno SC; imperciocchè la simiglianza de' due triangoli ACV, CMS mostra queste due analogie

$$CH\,(z)\,.\,CV\,(x) :: CM\,(\sqrt{2\,a^2})\,.\,MS$$

$$CH\,(z)\,.\,VH\,(y) :: CM\,(\sqrt{2\,a^2})\,.\,SC$$

dalle quali risulta $x = \frac{z \times MS}{\sqrt{2\,a^2}}$, ed $y = \frac{z \times SC}{\sqrt{2\,a^2}}$, e questi valori di x, ed y surrogati nell'equazione (&) la trasformano in quest'altra $z^2 \times MS \times SC = z^4$, che divisa per z^2, fa conoscere $MS \times SC = z^2 = CH^2$; il che dovea dimostrarsi; e questa proprietà somministra un nuovo modo, ed elegante di descrivere per punti la lemniscata.

(*) Opuscoli Calogierà, tomo X, pag. 22.

SCOLIO. — *Che contiene un'altra osservazione sopra la maniera di descrivere la lemniscata.* — Con artificio simile potranno ritrovarsi altri modi di descrivere per punti l'altre curve, nelle quali l'angolo fatto dalle corde (che tendono tutte ad un punto), e dall'asse sta all'angolo fatto dalle normali alla curva, e dall'asse in ragione costante di numero a numero; e lo stesso artifizio potrà stendersi a tutte le curve, che riguardono un punto fisso, e delle quali si à l'equazione espressa in z, x, y, e costanti; basterà, che io ne porti un altro esempio semplicissimo nella lemniscata, al quale effetto si consideri la fig. 55.

Ò già mostrato nel II esempio del II schediasma, che facendo semiretto l'angolo DCA, il quale comprende il quadrante CHA della lemniscata, e nominando respettivamente z, x, ed y, la corda CH, l'abscissa CV, e l'ordinata VH della curva, l'equazione sua costitutiva sarà $\sqrt{x^2 - y^2} = z^2$, cioè quadrando, e supplendo alla legge degli omogenei col raggio CM (a) del quadrante circolare $RDMA$ (il qual raggio qui dee prendersi per l'unità), si avrà $a^2(x^2 - y^2) = z^4$; sostituendo poscia in quest'ultima equazione in luogo di x, e di y, i loro valori respettivi $\frac{z \times MS}{a}$, e $\frac{z \times SC}{a}$ dedotti dalla similitudine de' triangoli HCV, CMS, ne proviene $z^2(MS^2 - SC^2) = z^4$ ovvero $MS^2 - SC^2 = CH^2$, donde deriva quest'analogia

$$MS + SC \cdot CH :: CH \cdot MS - SC;$$

adunque la corda CH della lemniscata nella fig. 55 è media proporzionale tra la somma, e la differenza del seno, e del coseno dell'arco RM non minore dell'arco RD, qual arco RM è tagliato nel quadrante circolare $RDMA$ dalla medesima corda CH prolungata.

XLIII.

QUADRATURA DELLA CURVA, CHE È L'EVOLUTA DEL QUADRANTE DELLA LEMNISCATA.

(Fig. 56).

SUPPOSIZIONI. — I. La curva PRE, che è l'evoluta del quadrante della lemniscata, è facile a descriversi in virtù del IV corollario del teorema inserto nel mio schediasma, che à per titolo: *Metodo per trovar quelle curve, nelle quali l'angolo fatto dalle corde (che partono tutte da un punto) e dall'asse sta all'angolo fatto dalle normali alla curva, e dal medesimo asse in data ragione di numero a numero.* Mentre vi si è provato, che tirando al quadrante della lemniscata la corda arbitraria CT (z), e la TI normale alla curva medesima; l'angolo TIA è triplo dell'angolo TCA; come pure, che il raggio TR del cerchio osculatore in T è uguale a $\frac{CA^2}{3\,CT} = \frac{a^2}{3z}$.

II. Si tiri pertanto la retta CO, che faccia coll'asse CA (a) l'angolo OCA triplo dell'angolo TCA, dal punto T si conduca la TR parallela a CO, e prendasi in essa la TR eguale ad $\frac{a^2}{3z}$; egli è ora manifesto, che il punto R è uno de' punti dell'evoluta PRE.

III. Laonde essendosi accennato nello scolio annesso al teorema II delle *Giunte al mio I schediasma sopra la lemniscata,* che l'angolo VCA formato dalla CV tangente della stessa curva al punto C è un angolo semiretto, ne segue, che se la retta HC fa coll'asse CA l'angolo HCA triplo del semiretto, la stessa retta HC prolungata in infinito è l'asimptoto dell'evoluta PRE.

Imperciocchè il raggio CE del cerchio osculatore in C essendo come sopra, $= \frac{a^2}{3z}$, e la TC essendo in tal caso infinitamente piccola, detto raggio CE tocca l'evoluta PRE ad una distanza infinita.

IV. Quando poi il punto T cade prossimo ad A, la corda CT (z) diviene equivalente a CA (a), e sì essa corda CT, come la normale TI si confondono quasi coll'asse CA. Allora facendo $AP = \frac{1}{3}\,a$, il raggio

del cerchio osculatore nel punto prossimo ad A diventa eguale ad AP, ed il punto P è comune all'asse CA, e all'evoluta.

TEOREMA I (fig. 56). — Continui la medesima significazione delle lettere z, ed a.

Io dico, che lo spazio curvilineo $RTAPR$ è uguale alla seguente espressione

$$\text{(F)}\qquad \frac{a^2}{24}\log.\left(1-\sqrt{1-\frac{z^4}{a^4}}\right)+\frac{a^2}{24}\log.\left(1+\sqrt{1-\frac{z^4}{a^4}}\right)^{-1}$$

DIMOSTRAZIONE. — L'elemento dell'arco CTA della lemniscata è $\frac{a^2dz}{\sqrt{a^4-z^4}}$ pel corollario citato nel I articolo delle *supposizioni*, e quest'elemento moltiplicato per la metà del raggio TR dell'evoluta, somministra $\frac{a^4\,dz}{6\,z\sqrt{a^4-z^4}}$, che è l'elemento dello spazio curvilineo $RTAPR$. Adunque per dimostrare il teorema dovrà provarsi, che l'espressione (F), venendo differenziata, esibisce la differenziale $\frac{a^4\,dz}{6\,z\sqrt{a^4-z^4}}$.

Si differenzi il primo termine dell'espressione (F), e si avrà, operando colla debita avvedutezza

$$\text{(G)}\qquad \frac{z^3\,dz}{12\,a^2\sqrt{1-\frac{z^4}{a^4}}}:\left(1-\sqrt{1-\frac{z^4}{a^4}}\right).$$

Così pure si differenzi il secondo termine dell'espressione (F), si operi destramente, e si otterrà

$$\text{(H)}\qquad \frac{z^3\,dz}{12\,a^2\sqrt{1-\frac{z^4}{a^4}}}:\left(1+\sqrt{1-\frac{z^4}{a^4}}\right).$$

Si aggiungano insieme le due espressioni parziali (G), ed (H), dopo averle ridotte ad un medesimo denominatore, e fatte le operazioni proprie ne verrà

$$\frac{\dfrac{z^3\,dz}{12\,a^2\sqrt{1-\frac{z^4}{a^4}}}+\dfrac{z^3\,dz}{12\,a^2\sqrt{1-\frac{z^4}{a^4}}}}{\dfrac{z^4}{a^4}}$$

vale a dire

$$\left(\frac{z^3 dz}{12\sqrt{a^4-z^4}}+\frac{z^3 dz}{12\sqrt{a^4-z^4}}\right)\times\frac{a^4}{z^4}.$$

Il che si riduce ad $\dfrac{a^4 dz}{12z\sqrt{a^4-z^4}}+\dfrac{a^4 dz}{12z\sqrt{a^4-z^4}}$ cioè $\dfrac{a^4 dz}{6z\sqrt{a^4-z^4}}$,

E quindi, ec. Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I (fig. 56). — Allorchè il punto T cade in A, la CT (z) diventa a; il punto R cade in P (perchè il raggio dell'evoluta diviene $\frac{1}{3}a$, e si confonde con PA); e lo spazio curvilineo $RTAPR$ si annulla.

Dall'altra parte l'espressione (F) diventa $\frac{a^2}{24}$ log. $1+\frac{a^2}{24}$ log. 1. Ma log. 1 è uguale a zero; adunque anche l'espressione (F) in tal caso è nulla.

Donde si deduce, che la stessa equazione (F) è un'integrale completa.

Corollario II (fig. 56). — Quando il punto T cade in C, allora CT (z) è nulla, e l'espressione (F) diviene $\frac{a^2}{24}$ log. $0+\frac{a^2}{24}$ log. 2. Ma log. 0 è una quantità infinita, adunque l'intiero spazio curvilineo $ECTAPE$ è un infinitamente grande.

Corollario III (fig. 56). — Il teorema poteva enunciarsi così:

Lo spazio curvilineo $RTAPR$ è uguale al prodotto di $\frac{a^2}{24}$, e del logaritmo di questa quantità

$$\frac{1-\sqrt{1-\frac{z^4}{a^4}}}{1+\sqrt{1-\frac{z^4}{a^4}}}.$$

Imperciocchè sanno i conoscitori, che questa espressione è uguale all'espressione (F).

Corollario IV (fig. 56). — L'espressione del precedente corollario nel caso di $z=a$ diventa $\frac{a^2}{24}$ log. 1.

E nel caso di $z = 0$, essa diventa $\frac{a^2}{24}$ log. $\frac{0}{2}$.

Quindi s'inferiscono conseguenze simili a quelle, che si sono dedotte ne' corollarj I, e II.

Lemma (fig. 56). — Lo spazio TIA del quadrante della lemniscata è uguale ad $\frac{1}{4}\sqrt{a^4 - z^4}$ — tri. CTI.

Dimostrazione. — Nel II corollario del problema III delle *Giunte al mio I schediasma sopra la lemniscata*, ò mostrato, che il segmento inverso $CTAC$ di questa curva è uguale ad $\frac{1}{4}\sqrt{a^4 - z^4}$; adunque lo spazio curvilineo TIA è uguale ad $\frac{1}{4}\sqrt{a^4 - z^4}$ — tri. CTI. Il che dovea dimostrarsi.

Teorema II (fig. 56). — Lo spazio curvilineo PRI è uguale all'espressione infrascritta

$$(1)\qquad \frac{a^2}{24}\log.\left(1-\sqrt{1-\frac{z^4}{a^4}}\right)+\frac{a^2}{24}\log.\left(1+\sqrt{1-\frac{z^4}{a^4}}\right)^{-1}+$$
$$+\text{ tri. } CTI - \frac{1}{4}\sqrt{a^4 - z^4}.$$

Dimostrazione. — Lo spazio curvilineo PRI è uguale allo spazio curvilineo $RTAPR$, meno lo spazio curvilineo TIA.

Si pongano in luogo di questi due ultimi spazj curvilinei le loro espressioni tratte respettivamente dal I teorema, e dal precedente lemma, e ne risulterà l'espressione (1) Il che dovea dimostrarsi.

Corollario. — A simiglianza del III corollario del teorema I il teorema presente potrebbe enunciarsi così:

Lo spazio curvilineo PRI è uguale al triangolo CTI, $-\frac{1}{4}\sqrt{a^4 - z^4}$, + il prodotto di $\frac{a^2}{24}$, e del logaritmo di questa quantità

$$\frac{1-\sqrt{1-\frac{z^4}{a^4}}}{1+\sqrt{1-\frac{z^4}{a^4}}}.$$

Scolio I (fig. 56 e 57). — Chi volesse tentar di esprimere per mezzo dell'abscissa CN, e dell'applicata RN (*coordinate ortogonali*) la natura della curva PRE, che è l'evoluta della lemniscata; consideri, che chiamando x la CM, ed y la TM, *coordinate ortogonali* del quadrante CTA della lemniscata; la retta OM *sottangente* di essa lemniscata è $= \frac{y\,dy}{dx}$, e la retta TO *normale* della lemniscata medesima è $= \frac{y}{dx}\sqrt{dx^2 + dy^2}$. In oltre il raggio TR dell'evoluta PRE si è trovato eguale ad $\frac{a^2}{3\sqrt{x^2+y^2}}$. Adunque per la simiglianza de' triangoli TOM, RON, si avranno le due proporzionalità, che seguono

$$TO\left(\frac{y}{dx}\sqrt{dx^2+dy^2}\right) : TM\,(y) :: TR\left(\frac{a^2}{3\sqrt{x^2+y^2}}\right) : RN + TM\,(y)$$

$$TO\left(\frac{y}{dx}\sqrt{dx^2+dy^2}\right) : OM\left(\frac{y\,dy}{dx}\right) :: TR\left(\frac{a^2}{3\sqrt{x^2+y^2}}\right) : MN.$$

Dalla prima proporzionalità si deduce

$$RN + TM\,(y) = \frac{a^2 dx}{3\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

e conseguentemente

$$(1) \qquad RN = -y + \frac{a^2 dz}{3\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Dalla seconda proporzionalità, viene

$$(2) \qquad MN = \frac{a^2 dy}{3\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Ma l'abscissa CN dell'evoluta PRE è uguale ad $x \pm MN$; adunque

$$(3) \qquad CN = y \pm \frac{a^2 dy}{3\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Il segno ambiguo $\pm$ è positivo nel caso della fig. 57, ed è negativo nel caso della fig. 58.

Ora mediante l'equazione della lemniscata, che è $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$, si può trovare in x il valore di y, il valore di $\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, e il valore

di $\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$; laonde in virtù dell'equazione (1) l'ordinata RN dell'evoluta è una funzione di x, il che si esprima così: $RN = F.x$. Similmente in virtù dell'equazione (3) l'abscissa CN della stessa evoluta è un'altra funzione di x, il che si esprima cosi: $CN = F.X$.

Adunque versa-vice x sarà una funzione di RN, vale a dire $x = F.RN$; e la medesima x sarà una funzione di CN, vale a dire $x = F.CN$; di modo che si avrà $F.RN = F.CN$.

Quindi se dall'equazione $RN = F.x$ potesse dedursi *esplicitamente* l'altra $x = F.RN$; e dall'equazione $CN = F.X$ potesse del pari cavarsi *esplicitamente* l'altra $x = F.CN$; allora l'equazione $F.RN = F.CN$ non conterrebbe, che le *coordinate* RN, e CN dell'evoluta PRE, e loro potestà, insieme con de' numeri, e colla costante a, e sue potestà; cosicchè detta equazione esprimerebbe la natura della curva PRE mediante le sue *coordinate ortogonali*.

Scolio II (fig. 57, e 58). — Alcune ordinate RN dell'evoluta PRE essendo prolungate, quando occorre (il che avviene nella fig. 58) incontrano in due punti la stessa PRE, e ciò in infiniti casi, ma in uno, la ordinata RN solamente tocca l'evoluta suddetta.

Allora egli è visibile, che l'ordinata RN coincide col raggio TR del cerchio osculatore; che i punti M, ed N coincidono anch'essi, annullandosi la retta MN, il di cui valore si esprime nell'equazione (2); e che per conseguenza dy diviene zero.

Per trovar dunque il valore di CM (x) corrispondente a questo caso, si differenzi l'infrascritta equazione (4); che è quella della lemniscata, trascurando i termini affetti dalla dy.

$$x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2} \tag{4}$$

si avrà per tanto $2x\,dx = \frac{ax\,dx}{\sqrt{x^2-y^2}}$; equazione, che debitamente trattata esibisce

$$x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4} \tag{5}$$

Questo valore di $x^2 - y^2$ surrogato nell'equazione (4) somministra

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}a^2 \tag{6}$$

e quest'ultima equazione aggiunta alla penultima, fa vedere $2x^2 = \frac{3}{4} a^2$, donde si deduce $CM\ (x) = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Se l'equazione (5) si sottrae dall'equazione (6), ne risulta $2y^2 = \frac{1}{4} a^2$, e conseguentemente $TM\ (y) = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Laonde sarà in tal caso $CT\ (z) = \sqrt{\frac{3}{8} a^2 + \frac{a^2}{8}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, e il raggio TR dell'evoluta, ch'è uguale ad $\frac{a^2}{3z}$, sarà eguale ad $a \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Anzi dovendo nella presente ipotesi esser retto l'angolo TOA, ed esser triplo dell'angolo TCA (pel corollario citato nel I articolo delle *supposizioni*); ne segue, che in questa medesima ipotesi l'angolo suddetto TCA dovrà essere di 30 gradi, terzo di 90.

Delle ultime quattro verità, questa, e le due prime sono state da me trovate in altra maniera nelle *Giunte al mio I schediasma sopra la lemniscata;* cioè nel I problema, e ne' suoi corollarj I, e III.

Scolio III. — Dal I teorema nasce la maniera d'integrare (supposta la descrizione della logaritmica) la differenziale $\frac{a^3 dz}{z\sqrt{a^4 - z^4}}$.

Ma l'integrazione di quest'altra differenziale $\frac{a^3 dz}{z\sqrt{z^4 - a^4}}$ si riduce alla rettificazione d'un arco circolare.

Imperciocchè si sa, che l'infrascritta espressione

$$\text{(K)} \qquad \frac{1}{2} \int \frac{a^2 dt}{t^2 + a^2}$$

rappresenta la metà di un arco di cerchio, del quale a è il raggio, e t la tangente.

Supponendo dunque $t = \frac{1}{a} \sqrt{z^4 - a^4}$, si vede che

$$t^2 + a^2 = \frac{z^4}{a^2}, \text{ e } dt = \frac{2z^3 dz}{a\sqrt{z^4 - a^4}}$$

i quali respettivi valori surrogati nell'espressione (K), la cangiano in questa: $\int \frac{a^3 dz}{z\sqrt{z^4 - a^4}}$.

SCOLIO IV. — *Da cui deduco un altro modo di dimostrare il II teorema.* — Per integrare questa differenziale $\frac{a^3 dz}{z\sqrt{a^4 - z^4}}$, riflettasi, che sussiste l'equazione infrascritta:

$$(7) \qquad \frac{1}{2}\int -\frac{a^2 du}{a^2 - u^2} = \frac{a}{4}\log.\left(1 - \frac{u}{a}\right) + \frac{a}{4}\log.\left(1 + \frac{u}{a}\right)^{-1}$$

Perchè il secondo membro di essa, venendo differenziato, mostra

$$\frac{-du}{4\left(1 - \frac{u}{a}\right)} - \frac{du}{4\left(1 + \frac{u}{a}\right)} \text{ cioè } -\frac{a^2 du}{2(a^2 - u^2)}$$

conforme il calcolo farà conoscere.

Suppongasi adesso $u = \frac{1}{a}\sqrt{a^4 \pm z^4}$ e si avrà $du = \mp \frac{2z^3 dz}{a\sqrt{a^4 \mp z^4}}$ come anche $a^2 - u^2 = \pm \frac{z^4}{a^2}$, e operando a dovere, si vedrà, che tutti questi respettivi valori sostituiti nell'equazione (7) la trasformano nell'altra che segue:

$$\int \frac{a^3 dz}{z\sqrt{a^4 \mp z^4}} = \frac{a}{4}\log.\left(1 - \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4 \mp z^4}\right) + \frac{a}{4}\log.\left(1 + \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4 \mp z^4}\right)^{-1}$$

Egli è visibile, che assumendo il segno superiore ne' segni doppj di questa equazione, e moltiplicandola per $\frac{a}{6}$, si conseguisce la dimostrazione del I teorema.

SCOLIO V. — *Che rende più generale il III scolio.* — La lettera r esprima qualunque numero intiero, o rotto, positivo, o negativo.

L' integrazione del binomio $\frac{dz}{z\sqrt{z^r - 1}}$ si riduce all'integrale semplice $\frac{2}{r}\int \frac{dt}{t^2 + 1}$, ove suppongasi $t = \sqrt{z^r - 1}$.

Imperciocchè allora sarà $t^2 + 1 = z^r$, e $dt = \frac{1}{2} r \frac{z^{r-1} dz}{\sqrt{z^r - 1}}$.

Laonde dividendo l'ultima equazione per la penultima moltiplicata per $\frac{r}{2}$, si vede $\frac{2}{r} \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{dz}{z\sqrt{z^r - 1}}$.

Scolio VI. — *Che rende più generale il IV scolio.* — Similmente l'integrazione del binomio $\frac{dz}{z\sqrt{1 \mp z^r}}$ si riduce all'integrale semplice che segue

$$\frac{2}{r}\int\frac{-du}{1-u^2} = \frac{1}{r}\log.\ (1-u) + \frac{1}{r}\log.\ (1+u)^{-1}. \tag{8}$$

Imperciocchè la supposizione di $u = \sqrt{1 \mp z^r}$, fa conoscere

$$1 - u^2 = \pm z^r,\ \text{e}\ du = \mp \frac{1}{2} r \frac{z^{r-1} dz}{\sqrt{1 \mp z^r}}. \tag{9}$$

Cosicchè dividendo l'ultima equazione per la penultima moltiplicata per $-\frac{r}{2}$, si conseguisce $-\frac{2}{r}\frac{du}{(1-u^2)} = \frac{dz}{z\sqrt{1 \mp z^r}}$.

Scolio VII. — *Che à relazione agli scolj VI, e IV.* — Allorchè nel segno doppio del binomio $\frac{dz}{z\sqrt{1 \mp z^r}}$ à luogo l'inferiore, mostra l'equazione (9), che u è maggiore dell'unità. Quindi il primo termine del secondo membro dell'equazione (8), vale a dire $\frac{1}{r}\log.\ (1-u)$, non è a proposito; mentre non si dà logaritmo delle quantità negative, come nel presente caso è $(1-u)$.

In questo caso dunque l'integrazione del binomio $\frac{dz}{z\sqrt{1 \mp z^r}}$ si riduce all'integrale semplice seguente

$$\frac{2}{r}\int\frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{r}\log.\ (u-1) + \frac{1}{r}\log.\ (u+1)^{-1}.$$

Simile cangiamento dee valere anche in ordine allo scolio IV; poichè quando nel segno doppio del binomio $\frac{a^3\,dz}{z\sqrt{a^4 \mp z^4}}$ regnerà l'inferiore, l'integrazione di esso binomio si ridurrà all'integrale semplice $\frac{1}{2}\int\frac{a^2\,du}{u^2 - a^2}$, che è uguale ad $\frac{a}{4}\log.\left(\frac{u}{a} - 1\right) + \frac{a}{4}\log.\left(\frac{u}{a} + 1\right)^{-1}$, cioè ad

$$\frac{a}{4}\log.\left(-1 + \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4+z^4}\right) + \frac{a}{4}\log.\left(1 + \frac{1}{4}\sqrt{a^4+z^4}\right)^{-1}.$$

XLIV.

DUE TEOREMI,

DA' QUALI SI DEDUCE LA RESOLUZIONE ANALITICA D'INFINITE SPECIE D'EQUAZIONI, SEMPRE PIÙ COMPOSTE IN INFINITO, E LA SEZIONE INDEFINITA DEGLI ARCHI CIRCOLARI, MEDIANTI ALCUNE FORMOLE GENERALI, E FINITE (*).

Teorema I. — Sieno le due equazioni infrascritte (1), e (2), nelle quali a denota qualunque esponente; io dico, che posta una di esse, sussiste anche l'altra

$$(1) \qquad 2yc^{a-1} = (x + \sqrt{x^2 + c^2})^a + (x - \sqrt{x^2 - c^2})^a$$

$$(2) \qquad 2xc^{\frac{1}{a}-1} = (y + \sqrt{y^2 - c^2})^a + (y - \sqrt{y^2 - c^2})^a.$$

Dimostrazione. — Si quadri l'equazione (1), e si avrà

$$4y^2c^{2a-2} = (x + \sqrt{x^2 - c^2})^{2a} + (x - \sqrt{x^2 - c^2})^{2a} + 2c^{2a}$$

e togliendo dall'una, e l'altra parte $4c^{2a}$

$$4c^{2a-2}(y^2 - c^2) = (x + \sqrt{x^2 - c^2})^{2a} + (x - \sqrt{x^2 - c^2})^{2a} - 2c^{2a}$$

e tirando la radice quadrata

$$(3) \qquad 2c^{a-1}\sqrt{y^2 - c^2} = \pm(x + \sqrt{x^2 - c^2})^a \mp (x - \sqrt{x^2 - c^2})^a$$

(il segno superiore dee valere quando a significa un esponente positivo, e il segno inferiore, quando a denota un esponente negativo, acciò il secondo membro dell'equazione (3) sia positivo).

(*) Opuscoli Calogierà, tom. XVIII, pag. 175.

Aggiungendo nel primo caso l'equazione (3) all'equazione (1), e sottraendola da essa nel secondo caso, ne deriva

$$(4) \qquad 2c^{a-1}\,(y \pm \sqrt{y^2 - c^2}) = 2(x + \sqrt{x^2 - c^2})^a$$

donde nasce fatte le debite operazioni

$$(5) \qquad c^{\frac{a-1}{a}}\,(x + \sqrt{x^2 - c^2}) = (y \pm \sqrt{y^2 - c^2})^{\frac{1}{a}}.$$

Sottraendo poscia nel primo caso l'equazione (3) dall'equazione (1) e aggiungendola alla medesima nel secondo, ritrovasi

$$(6) \qquad 2c^{a-1}\,(y \mp \sqrt{y^2 - c^2}) = 2(x - \sqrt{x^2 - c^2})^a$$

quindi risulta $c^{\frac{1}{a-1}}(x - \sqrt{x^2 - c^2}) = (y \mp \sqrt{y^2 - c^2})^{\frac{1}{a}}$ e quest'equazione aggiunta all'equazione (5) produce in ambedue i casi l'equazione (2).

È visibile, che collo stesso metodo dall'equazione (2) si perverrà similmente all'equazione (1). Adunque, ec.

Il che era a dimostrare.

Corollario. — Posta qualsivoglia delle due equazioni (1), e (2) notate di sopra, si salva l'infrascritta equazione differenziale (7), ove il segno superiore à luogo, quando a significa un esponente positivo, e l'inferiore, quando la stessa a denota un esponente negativo.

$$(7) \qquad \pm \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = \frac{a\,dx}{\sqrt{x^2 - c^2}}.$$

Imperciocchè differenziando l'equazione (4) (in cui il segno superiore serve pel primo degli accennati casi, e l'inferiore pel secondo), si ottiene

$$2c^{a-1}\left(dy \pm \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - c^2}}\right) = 2a\left(dx + \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - c^2}}\right)(x + \sqrt{x^2 - c^2})^{a-1},$$

equazione, che maneggiata a dovere, si riduce a quest'altra

$$\pm \frac{2dy}{\sqrt{y^2 - x^2}}\,c^{a-1}\,(y \pm \sqrt{y^2 - c^2}) = \frac{2adx}{\sqrt{x^2 - c^2}}(x + \sqrt{x^2 - c^2})^a$$

la quale div. per la stessa equazione (4) lascia per l'appunto l'equazione (7).

Il medesimo si potrebbe dimostrare anche per mezzo dell'equazione (6), e potrebbe eziandio dedursi dall'equazione (2) seguendo gl'istessi vestigj.

Applicazione di questo teorema alla resoluzione dell'equazioni cubiche. — Qualsivoglia equazione cubica può liberarsi dal suo secondo termine, e ridursi a questa formola generale $x^3+px+q=0$ ove p e q significano qualsisia quantità cognita col suo segno. Ora se nell'equazioni (1) e (2) in luogo di a si porrà il numero 3, e si faranno le dovute operazioni, si troveranno queste due equazioni

$$(8)\qquad 2yc^2=(x+\sqrt{x^2-c^2})^3+(x-\sqrt{x^2-c^2})^3$$

$$(9)\qquad x=\frac{1}{2}\left(yc^2+\sqrt{y^2c^4-c^6}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\left(yc^2-\sqrt{y^2c^4-c^6}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Ma l'equazione (8) sviluppata, e ordinata produce quest'altra

$$x^3-\frac{3c^2x}{4}-\frac{1}{4}yc^2=0$$

la quale paragonata termine a termine colla formola generale dell'equazioni cubiche fa conoscere $c^2=-\frac{4p}{3}$, e $yc^2=-4q$; adunque surrogando nell'equazione (9) in cambio di c^2, e di yc^2 i loro valori, si avrà

$$x=\left(-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Il che era a ritrovarsi.

SCOLIO I. — Potrebbesi da questo teorema dedurre direttamente la resoluzione dell'equazioni cubiche complete, e per far ciò fare basterebbe sostituire nell'equazioni (8) e (9) $s+t$ in vece di x, ecc.

Applicazione di questo medesimo teorema alla resolùzione dell'equazioni quadrate. — La formola generale dell'equazioni quadrate è questa $z^2+nz+p=0$ in cui n, e p rappresentano qualsivoglia quantità nota col suo segno, facciasi $z=x^2$, e la formola prenderà questa sembianza

$$(10)\qquad x^4+nx^2+p=0.$$

L'esponente a dell'equazioni (1) e (2) significhi 4, si otterrà

$$(11)\qquad 2yc^3=(x+\sqrt{x^2-c^2})^4+(x-\sqrt{x^2-c^2})^4$$

$$(12)\qquad x=\frac{1}{2}\left(yc^3+\sqrt{y^2c^6-c^8}\right)^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\left(yc^3-\sqrt{y^2c^6-c^8}\right)^{\frac{1}{4}},$$

si sviluppi e si ordini l'equazione (11), e ne risulterà

$$x^4-c^2x^2+\frac{1}{8}(c^4-yc^3)=0.$$

Comparando pertanto i teoremi di quest'ultima equazione con quelli dell'equazione (10), si vedrà $c^2=-n$, ed $\frac{1}{8}(c^4-yc^3)=p$, cioè $yc^3=n^2-8p$.

I valori di c^2, e di yc^3 posti nell'equazione (12) fanno scoprire una nuova formola per la resoluzione dell'equazione (10); ma per averne un'altra più semplice, si quadri l'equazione (12), e si troverà

$$(13)\qquad x^2=\frac{1}{4}\left(yc^3+\sqrt{y^2c^6-c^8}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\left(yc^3-\sqrt{y^2c^6-c^8}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}c^2$$

e trasponendo, indi quadrando di bel nuovo $\left(x^2-\frac{1}{2}c^2\right)^2=\frac{1}{8}yc^3+\frac{1}{8}c^4$, estraendo di qua, e di là la radice quadrata, e poi trasponendo

$$(14)\qquad x^2=z=\frac{1}{2}c^2\pm\sqrt{\frac{1}{8}yc^3+\frac{1}{8}c^4}.$$

La sostituzione di $-n$ in luogo di c^2, e di n^2-8p in vece di yc^3 nell'ultima equazione mostrerà $x=-\frac{1}{2}n\pm\sqrt{\frac{1}{4}n^2-p}$.

Il che era a ritrovare.

Scolio II. — I. Benchè la formola, che nasce dall'equazione (12) per la resoluzione dell'equazione (10) sia più composta delle altre due formole, che derivano dall'equazioni (13), e (14); tuttavia non può non piacere all'intelletto l'elegante uniformità, che regna nell'equazioni (9), e (12), la prima delle quali contiene la resoluzione dell'equazioni cubiche mancanti del secondo termine, e la seconda dell'equazioni biquadratiche prive del secondo, e quarto termine.

II. Egli è visibile, che con la stessa uniformità possono risolversi algebraicamente varie specie d'equazioni, sempre più composte in infinito, secondochè nell'equazione (1) l'esponente a rappresenta un numero intiero positivo, o negativo, sempre maggiore in infinito.

TEOREMA II. — Sieno le due equazioni infrascritte (15), e (16), nelle quali a significa come sopra qualunque esponente; io dico, che posta una di esse, sussiste anche l'altra

$$(15)\qquad 2yc^{a-1} = \pm(x+\sqrt{x^2+c^2})^a \pm(-x+\sqrt{x^2+c^2})^a$$

$$(16)\qquad 2xc^{\frac{1}{a}-1} = \pm(y+\sqrt{y^2+c^2})^{\frac{1}{a}} \mp(-y+\sqrt{x^2+c^2})^{\frac{1}{a}}.$$

AVVERTIMENTO. — Se si vorrà, che i secondi membri dell'equazioni (15), e (16) sieno quantità positive, si dovrà assumere il segno superiore, quando a significa un esponente positivo, e l'inferiore quando l'esponente significato dalla a è negativo.

DIMOSTRAZIONE. — L'equazione (15) quadrata dà

$$(17)\qquad 4y^2c^{2a-2} = (x+\sqrt{x^2+c^2})^{2a} + (-x+\sqrt{x^2+c^2})^{2a} - 2c^{2a},$$

aggiungasi a ciascuna parte $4c^{2a}$, indi estraggasi la radice quadrata da ambedue i membri della nuova equazione, che ne risulta, e si vedrà

$$(18)\qquad 2c^{a-1}\sqrt{y^2+c^2} = (x+\sqrt{x^2+c^2})^a + (-x+\sqrt{x^2+c^2})^a;$$

quest'ultima equazione aggiunta all'equazione (15) mostra (congiungendo ambedue i casi in una sola espressione)

$$(19)\qquad 2c^{a-1}(y+\sqrt{y^2+c^2}) = 2(\pm x+\sqrt{x^2+c^2})^a$$

ovvero operando convenientemente

$$(20)\qquad c^{\frac{1}{a}-1}(\pm x+\sqrt{x^2-c^2}) = (y+\sqrt{y^2+c^2})^{\frac{1}{a}}.$$

Sottraggasi ora l'equazione (15) dall'equazione (18), ed avremo

$$(21)\qquad 2c^{a-1}(-y+\sqrt{y^2+c^2}) = 2(\mp x+\sqrt{x^2+c^2})^a$$

cioè operando colla dovuta avvedutezza

$$(22)\qquad c^{\frac{1}{a}-1}\left(\mp x+\sqrt{x^2+c^2}\right)=\left(-y+\sqrt{y^2+c^2}\right)^{\frac{1}{a}}.$$

In fine l'equazione (22) sottratta dall'equazione (20) nel caso del segno superiore, e l'equazione (20) sottratta dall'equazione (22) nel caso del segno inferiore, renderanno l'equazione (16).

In simigliante maniera dall'equazione (16) si arriverà all'equazione (15), come è chiaro a chi considera la cosa attentamente; adunque, ec. Il che doveva dimostrarsi.

Scolio III. — I. Colla medesima eleganza, con cui si è trovata la resoluzione algebraica dell'equazioni cubiche mediante il I teorema, si troverà anche per mezzo di questo II, e ciò facendo valere ad arbitrio il segno superiore, ovvero l'inferiore delle due equazioni (15) e (16), in virtù delle quali si risolveranno eziandio molte altre spezie d'equazioni più composte in infinito, purchè a indichi un numero intiero positivo, o negativo. Dee però avvertirsi, che se questo numero intiero sarà pari, converrà ridurre l'equazione (15) all'equazione (17) per evitare la quantità radicale $\sqrt{x^2+c^2}$.

II. Potrà conferirsi quello, che brevemente accenno nel presente, e nell'antecedente scolio, con ciò, che si legge negli Atti di Lipsia dell'anno 1709 alle pagine 134, 135, e 136, le quali io non aveva considerate, allorchè trovai questi due teoremi; anzi credo, che il sig. Moivre, autore di quell'articolo degli Atti suddetti, sia giunto per differente strada alla sua invenzione, che oltre non essere dimostrata, è racchiusa tra limiti assai più angusti, che non è la mia, nè par verisimile, ch'egli si fosse valuto d'una serie infinita per esporre l'equazioni, di cui dà la risoluzione, se avesse conosciuta la maniera di rappresentarle più perfettamente con espressione finita.

III. Tanto l'equazione (2) del I teorema, quanto l'equazione (16) del II diverranno più adattabili alla pratica, e in un certo modo più semplici, se nell'equazione (2) si sostituirà $\frac{c^2}{y+\sqrt{y^2-c^2}}$ in lungo del suo eguale $y-\sqrt{y^2+c^2}$, ovvero $\frac{c^2}{y-\sqrt{y^2+c^2}}$ in cambio di $y+\sqrt{y^2+c^2}$, e se nell'equazione (16) in vece di $-y+\sqrt{y^2+c^2}$ si porrà il suo equivalente $\frac{c^2}{y+\sqrt{y^2+c^2}}$, oppure $\frac{c^2}{-y+\sqrt{y^2+c^2}}$ in luogo di $y+\sqrt{y^2+c^2}$.

Corollario I. — Posta qualsivoglia delle due soprascritte equazioni (15) e (16) si salva la seguente equazione differenziale (23), in cui il segno superiore vale, allorchè l'esponente denotato da a è positivo, e l'inferiore, quando a è negativo.

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2+c^2}} = \frac{\pm\, a\, dx}{\sqrt{x^2+c^2}}. \tag{23}$$

Conciossiacchè l'equazione (19) differenziata produce quella, che segue

$$2c^{a-1}\left(dy + \frac{ydy}{\sqrt{y^2+c^2}}\right) = 2a\left(\mp\, dx + \frac{xdx}{\sqrt{x^2+c^2}}\right)\left(\pm x + \sqrt{x^2+c^2}\right)^{a-1}$$

la quale trattata nel debito modo fa conoscere

$$\frac{2dy}{\sqrt{y^2+c^2}}\, c^{a-1}(y + \sqrt{y^2+c^2}) = \pm\frac{2\,a\,d\,x}{\sqrt{x^2+c^2}}(\pm x + \sqrt{x^2+c^2})^a$$

Dividasi quest'equazione per la medesima equazione (19), e resterà l'equazione (23).

Anche differenziando l'equazione (21), ovvero valendosi direttamente dell'equazione (16) si dimostrerebbe la verità di questo corollario.

Corollario II. — Posta qualsivoglia delle due equazioni infrascritte (24), e (25) si salva l'altra equazione differenziale (26), ove il segno superiore dee servire, quando a rappresenta un esponente positivo, e l'inferiore, quando lo rappresenta negativo.

$$2z\sqrt{-1} = \pm(\sqrt{1-u^2} + u\sqrt{-1})^a \mp (\sqrt{1-u^2} - u\sqrt{-1})^a \tag{24}$$

$$2u\sqrt{-1} = \pm(\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{-1})^{\frac{1}{a}} \mp (\sqrt{1-z^2} - z\sqrt{-1})^{\frac{1}{a}} \tag{25}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pm\frac{a\,du}{\sqrt{1-u^2}}. \tag{26}$$

Perchè sostituendo nelle tre equazioni (15), (16), e (23) l'unità in vece di c, $z\sqrt{-1}$ in luogo di y, ed $u\sqrt{-1}$ in cambio di x, e di più dividendo per $\sqrt{-1}$ l'equazione, che risulta dall'equazione (23) così modificata, ne nascono le tre equazioni soprannotate (24), (25), e (26).

Corollario III. — Posta l'equazione (24) notata nel corollario antecedente, sussistono anche le seguenti equazioni (27), e (28).

$$(27) \quad -4z^2 = (\sqrt{1-u^2} + u\sqrt{-1})^{2a} + (\sqrt{1-u^2} - u\sqrt{-1})^{2a} - 2.$$

$$(28) \quad 2\sqrt{1-z^2} = (\sqrt{1-u^2} + u\sqrt{-1})^a + (\sqrt{1-u^2} - u\sqrt{-1})^a.$$

Attesochè la surrogazione dell'unità in vece di c e di $u\sqrt{-1}$ in vece di x, come pure di $z\sqrt{-1}$ in luogo di y nelle due equazioni (17), e (18) esposte nella dimostrazione del teorema produce l'equazioni (27), e (28).

Scolio IV. — I. Assumendo nell'equazioni (24), (25), e 26 il segno inferiore, e ponendo in esse $-e$ in luogo di a, si avrà

$$2z\sqrt{-1} = -(\sqrt{1-u^2} + u\sqrt{-1})^{-e} + (\sqrt{1-u^2} - u\sqrt{-1})^{-e}$$

cioè fatte le convenienti operazioni

$$2z\sqrt{-1} = (\sqrt{1-u^2} + u\sqrt{-1})^e - (\sqrt{1-u^2} - u\sqrt{-1})^e$$

come appunto se nell'equazione (24) si fosse fatto valere il segno superiore, e se si fosse presa la c positiva in luogo della a. Si avrà finalmente

$$2u\sqrt{-1} = -(\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{-1})^{-\frac{1}{e}} + (\sqrt{1-z^2} - z\sqrt{-1})^{-\frac{1}{e}}$$

cioè $2u\sqrt{-1} = (\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{-1})^{\frac{1}{e}} - (\sqrt{1-z^2} - z\sqrt{-1})^{\frac{1}{e}}$ e in fine sarà

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{e\,du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Il simile accadrà nelle tre equazioni (1), (2) e (7), e nelle tre equazioni (25), (16), e (23), conforme ciascuno potrà da se medesimo riconoscere.

II. Se nell'equazione (24) si supporrà $u = 0$, si vedrà essere anche $z = 0$, e parimente nell'equazione (25) l'annullamento di z annienterà anche u.

Applicazione di due ultimi corollari del II teorema alla multisezione degli archi circolari (fig. 59). — L'equazione (26) presa col segno superiore, e integrata somministra $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = a \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, cioè (chiamando

rispettivamente u e z le due corde AB, AC del cerchio $ABCD$, il di cui diametro AD si prende per l'unità) si à, conforme è noto ai periti del calcolo differenziale Arc. $AC = a$ arc. AB.

Divien dunque manifesto, che se alla AB (u) si attribuisce il valore, che si esprime dall'equazione (24) del II corollario, presa col segno superiore, l'arco AC sarà tagliato in B talmente, che l'arco AB starà all'arco AC, come l'unità ad a.

Ma se a denota un numero intiero positivo, è evidente ad ogni attento analista, che l'equazione (24) sviluppata ne dà un'altra divisibile per la quantità immaginaria $\sqrt{-1}$, e per conseguenza reale: adunque rimane sciolto il problema mediante una formola generale, e finita; ove si noti, che quando a è un numero *positivo pari*, il secondo membro dell'equazione, che nasce dalla formola (24) disciolta dal vincolo a, sarà affetto in tutte le sue parti dalla quantità $\sqrt{1-u^2}$.

Una seconda formola non meno elegante somministra l'equazione (28), che sviluppata anch'essa, lascia un'equazione priva dell'immaginaria quantità $\sqrt{-1}$, e tale, che il suo secondo membro costerà di termini tutti moltiplicati per l'espressione radicale $\sqrt{1-u^2}$, ogni volta, che lo esponente a sarà un numero *positivo impari*.

Di più mediante l'equazione (27), si ottiene una terza formola, che venendo distesa, rimane libera anch'essa dall'immaginario, e non è affetta giammai dalla $\sqrt{1-u^2}$, sia pure a un numero intiero positivo *pari* o *impari*.

In fine l'equazione (25) ridotta in serie col noto metodo, esibisce il valore di u espresso in termini tutti divisibili per $\sqrt{-1}$, e conseguentemente tutti reali, benchè l'esponente $\frac{1}{a}$ significhi qualunque numero rotto, o sordo, dovendosi avvertire, che se $\frac{1}{a}$ sarà una quantità positiva, dovrà valere nell'equazione (25) il segno superiore, ma se $\frac{1}{a}$ sarà una quantità negativa, dovrà prendersi in essa equazione il segno inferiore.

Quella quarta formola generalissima è finita secondo l'espressione, ma sviluppata, che sia, costa d'infiniti termini, purchè la frazione litterale $\frac{1}{a}$ non denoti un numero intiero positivo, mentre in tal caso si rompe il filo infinito della serie, che resta eguale all'aggregato di un numero finito di termini.

Ed ecco sciolto in più maniere il celebre problema della multisezione degli archi circolari mediante una formola generale, e finita.

Scolio V. — I. Per rendere più brevi l'espressioni delle suddette formole potrebbe sostituirsi BD corda del complemento dell'arco AB in luogo di $\sqrt{1-u^2}$, e CD corda del complemento dell'arco AC in vece di $\sqrt{1-z^2}$.

II. (fig. 60). Le medesime formole servono ancora, quando le lettere z ed u significano i seni retti CN, BM degli archi rispettivi AC, AB minori del quadrante, e l'unità esprime il saggio del cerchio $ABCD$; imperciocchè sanno gl'intendenti, che allora

$$\text{Arc. } AC = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \text{ ed arc. } AB = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

In tale supposizione, per far più brevi le formole, potrà surrogarsi KN in cambio di $\sqrt{1-z^2}$, e KM in vece di $\sqrt{1-u^2}$.

XLV.

CONTINUAZIONE DELLO SCHEDIASMA,

CHE À PER TITOLO: DUE TEOREMI DA' QUALI SI DEDUCE LA RESOLUZIONE ANALITICA D'INFINITE SPECIE D'EQUAZIONI SEMPRE PIÙ COMPOSTE IN INFINITO, E LA SEZIONE INDEFINITA DEGLI ARCHI CIRCOLARI (*).

AVVERTIMENTO (fig. 59, e 60). — Nell'equazione de' due teoremi, e in quelle, che da esse dipendono, esposte nella prima parte di questo schediasma, si porrà l'unità in vece di c, e quest'unità sarà il diametro AD, se si à riguardo alla fig. 59, ma se si à relazione alla fig. 60, sarà il raggio KA.

Nelle stesse equazioni, ove i segni sono ambigui, si prenderà sempre il superiore, e la lettera a significherà sempre un esponente positivo.

Applicazione del I teorema alla multisezione degli archi circolari (fig. 59). — Nel corollario del I teorema ò dimostrato, che posta l'equazione (1) vale l'equazione (7); ora quest'ultima considerata, secondo l'avvertimento, col segno superiore, e divisa per $\pm\sqrt{-1}$ diviene

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm\frac{a\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{29}$$

e integrando

$$\int\frac{\pm dy}{\sqrt{1-y^2}} = a\int\frac{\pm dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{30}$$

Il primo membro di quest'ultima equazione esprime l'arc. AC sostenuto dalla corda AC (y), quando si fa valere in essa equazione il segno superiore, ma quando v'à luogo l'inferiore, il detto primo membro rappresenta l'arco inverso CD corrispondente alla corda $CD=\sqrt{1-y^2}$.

Il secondo membro della stessa equazione (30) valendo il segno di sopra, denota l'arco AB appoggiato sulla corda AB (x), e valendo il

(*) Opuscoli Calogierà, tom. XVIII, pag. 302.

segno di sotto, significa l'arco inverso BD, che si sostiene sulla corda $BD=\sqrt{1-x^2}$, e perciò posta l'equazione (1), che si riduce a questa

$$2y=(x+\sqrt{x^2-1})^a+(x-\sqrt{x^2-1})^a \tag{31}$$

si otterrà arc. $AC=a$ arc. AB, quando a denota un numero intiero *positivo pari*, o *impari*, mentre, allora se $x=0$, anche $y=0$, e il secondo membro dell'equazione (31) sviluppato resta libero dalla quantità immaginaria $\sqrt{x^2-1}$, per cagione dell'esponente intiero, e positivo a.

Ma per far sì che nell'equazione (30) regni il segno inferiore, cioè, che si abbia arc. invers. $BD=a$ arc. invers. CD, mi servo della stessa equazione (31), con questa sola variazione, che ora faccio $AB=y$, e $AC=x$, e veggo, che supponendo la corda AC [x] eguale all'unità, anche l'altra AB (y) diviene eguale all'unità, e si annullano entrambi gli archi inversi CD, BD; egli è adunque manifesto, che la formola (31) considerata in questa seconda maniera scioglie esattamente il problema, allorchè l'esponente a significa qualsisia numero positivo *intiero pari*, o *impari*. Anzi quando a indica qualsivoglia frazione razionale positiva, il secondo membro dell'equazione (31) può mutarsi in una serie d'infiniti termini tutti privi della $\sqrt{x^2-1}$.

Scolio VI (fig. 60). — Per ciò, che si è detto nel secondo punto del V scolio, sarà facile di applicare l'equazione, o sia formola (31) agli archi diretti AC, AB, ed agli archi inversi BD, CD del quadrante circolare $ABCD$.

Maniera di dedurre da questi principj la teoria del signor Giovanni Bernulli sopra la moltisezione dell'angolo per mezzo delle tangenti pubblicata negli Atti di Lipsia dell'anno 1712 (fig. 59, e 60).

Dividasi prima l'equazione (1) per l'equazione (3), e poi l'equazione (3) per l'equazione (1), e si troveranno le due, che seguono:

$$\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^a+(x-\sqrt{x^2-1})^a}{(x+\sqrt{x^2-1})^a-(x-\sqrt{x^2-1})^a}$$

$$\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^a-(x-\sqrt{x^2-1})^a}{(x+\sqrt{x^2-1})^a+(x-\sqrt{x^2-1})^a}$$

ciascuna delle quali à per conseguenza connessione essenziale coll'equazione (29), e la salva. Ma trattando col dovuto accorgimento queste due equazioni, dalla prima di esse risulta

$$(32)\qquad \frac{y\sqrt{-1}}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\left(\frac{x\sqrt{-1}+1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^a+\left(\frac{x\sqrt{-1}-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^a}{\left(\frac{x\sqrt{-1}+1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^a-\left(\frac{x\sqrt{-1}-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^a}$$

e dalla seconda

$$(33)\qquad \frac{\sqrt{1-y^2}\sqrt{-1}}{y}=\frac{\left(\frac{x\sqrt{-1}}{\sqrt{1-x^2}}\right)^a-\left(\frac{x\sqrt{-1}-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^a}{\left(\frac{x\sqrt{-1}+1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^a+\left(\frac{x\sqrt{-1}-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^a}.$$

È ora facile a conoscere (fig. 59, e 60), che chiamando respettivamente y, ed x le corde, o i *seni* degli archi diretti respettivi AC, AB, la tangente AG sarà $=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ siccome la tangente AF sarà $=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, siccome la tangente DH dell'arco inverso CD, sarà $=\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$; adunque sostituendo nell'equazioni (32) e (33) queste tangenti in luogo de' loro valori, si scuopre

$$(34)\qquad AG\sqrt{-1}=\frac{(AF\sqrt{-1}+1)^a+(AF\sqrt{-1}-1)^a}{(AF\sqrt{-1}+1)^a-(AF\sqrt{-1}-1)^a}$$

$$(35)\qquad DH\sqrt{-1}=\frac{(AF\sqrt{-1}+1)^a-(AF\sqrt{-1}-1)^a}{(AF\sqrt{-1}+1)^a+(AF\sqrt{-1}-1)^a}.$$

L'una, e l'altra di queste equazioni sviluppata, che sia è divisibile per $\sqrt{-1}$, ogni volta, che a denoti un numero intiero positivo, ma la prima à luogo, quando a è un numero *impari*, e la seconda quando è *pari*, e ciascuna nel suo caso fa trovare Arc. $AC=a$ arc. AB.

L'equazione (34) mostra, che quando la tangente AF è nulla, s'annienta anche la tangente AG con ambedue gli archi AC, AB; e l'equazione (35) fa vedere, che all'annientarsi della tangente AF, la tangente DH dell'arco inverso DC diventa infinita; laonde s'annullano in tal caso

i due archi diretti AB, AC, e l'arco inverso DC diviene eguale al semicerchio nella fig. 59, e al quadrante nella 60.

La regola per la multisezione dell'angolo, che il signor Giovanni Bernulli à data negli Atti di Lipsia dell'anno 1712 in fine della pagina 276, e in principio della pagina 277, è perspicuamente compresa nell'equazioni (34), e (35).

Di più l'equazione (24), che appartiene al teorema II, presa a tenore dell'avvertimento col segno superiore dividasi per l'equazione (28), e ne nascerà una, che maneggiata con perizia darà quest'altra

$$(36) \qquad \frac{z\sqrt{-1}}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\left(\frac{1+u\sqrt{-1}}{\sqrt{1-u^2}}\right)^a - \left(\frac{1-u\sqrt{-1}}{\sqrt{1-u^2}}\right)^a}{\left(\frac{1+u\sqrt{-1}}{\sqrt{1-u^2}}\right)^a + \left(\frac{1-u\sqrt{-1}}{\sqrt{1-u^2}}\right)^a}.$$

Or siccome nelle fig. 59, e 60 alla corda, o al *seno* (z) dell'arco AC corrisponde la tangente $AG = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$, conforme è agevole a provare, e alla corda, o al *seno* (u) dell'arco AB la tangente $AF = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$, così l'equazione (36) somministra quella che segue

$$(37) \qquad AG\sqrt{-1} = \frac{(1+AF\sqrt{-1})^a - (1-AF\sqrt{-1})^a}{(1+AF\sqrt{-1})^a + (1-AF\sqrt{-1})^a}$$

tale, che per essa si ottiene l'arco AB all'arco AC come l'unità ad a, sia pure a qualunque esponente positivo anche rotto, e sordo, poichè l'equazione (37) sviluppata, se a è un numero intiero positivo *pari*, o *impari*, ovvero ridotta in serie se a designa qualunque altro indice positivo *rotto*, o *irrazionale*, la medesima equazione diventa sempre divisibile per $\sqrt{-1}$, e se in essa si annulla AF, anche AG resta $=0$, e s'annientano ambo gli archi AB, AC.

Nell'equazione (37) elegantemente si racchiude la regola, che il sig. Lagnì provò per sola induzione, ed espresse in serie costante d'infiniti termini nelle Memorie dell'Accademia reale delle scienze di Parigi dell'anno 1705, e che il sig. Gio. Bernulli espose parimente in serie negli Atti di Lipsia dell'anno 1712 alle pagg. 329, e 330, senza pensare (conforme egli attesta ne' suddetti Atti dell'anno 1722, pag. 370), che la medesima serie fosse già stata da altri esibita.

Il simile è accaduto a me in ordine alla formola generale, e finita, che mostrerò qui appresso per la sezione indefinita dell'angolo, mediante le secanti, io la trovai già con altro metodo senza pensare a quella serie infinita concernente le secanti, che lo stesso sig. Lagnì pubblicò nelle citate Memorie dell'anno 1705, avendola egli provata per via di pura induzione. Ecco la maniera di dedurre dal presente metodo la mia formola. Veggansi le figg. 59 e 60.

L'equazione (28) del II teorema, purchè sia maneggiata con avvedutezza, riducesi facilmente all'infrascritta

$$(38)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{\dfrac{2}{(1-u)^{\frac{a}{2}}}}{\left(1+\dfrac{u\sqrt{-1}}{\sqrt{1-u^2}}\right)^a+\left(1-\dfrac{u\sqrt{-1}}{\sqrt{1-u^2}}\right)^a}.$$

In virtù di quest'equazione chiamando z la corda, o il *seno* dell'arco AC, ed u la corda, o il *seno* dell'arco AB, si ha arc. $AC = a$ arc. AB; ma la secante DG (fig. 59), ovvero KG (fig. 60) dell'arco AC si vede facilmente essere $=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, siccome la secante DF (fig. 59), ovvero KF (fig. 60) dell'arco AB è uguale ad $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$; ed essendo $\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}=AF$, sarà altresì $\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$ eguale alla $\sqrt{DF^2-1}$ nella fig. 59, e alla $\sqrt{KF^2-1}$ nella 60; adunque se si nomina DG, ovvero $KG(g)$, e DF, ovvero $KF(f)$, si avrà $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}=g$; $\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}=\sqrt{f^2-1}$, e l'equazione (38) diverrà

$$(39)\qquad g=\frac{2f^a}{(1+\sqrt{1-f^2})^a+(1-\sqrt{1-f^2})^a}$$

ove si osservi, che se l'esponente a è un numero intiero positivo l'equazione (39) dispiegata non contiene la quantità immaginaria $\sqrt{1-f^2}$, e perciò scioglie perfettamente il problema. Se poi a denoterà qualunque frazione positiva razionale, potrà il secondo membro della detta equazione (39) trasformarsi in una serie, che sarà similmente libera dalla $\sqrt{1-f^2}$.

Si osservi ancora, che quando la secante DF, ovvero $KF(f)$ è uguale all'unità, anche la secante DG, ovvero KG sarà eguale alla stessa unità,

e gli archi AB, AC resteranno annullati ambedue, come dee veramente accadere.

Scolio VII. — Per ben concepire ciò che si è detto nella prima parte di questo schediasma, che l'equazione (25) ridotta in serie dà la sezione indefinita dell'angolo anche nel caso di $\frac{1}{a}$ eguale ad un esponente sordo, e ciò, che di sopra si dice dell'equazione (37), che scioglie anch'essa lo stesso problema; benchè a significhi un esponente irrazionale; si consideri, che l'equazione (25) equivale alla seguente, ove c esprime l'unità assunta.

$$\frac{2u\sqrt{-1}}{c} = \pm\left(\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}+\frac{z}{c}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{a}} \mp \left(\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}-\frac{z}{c}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{a}}$$

e che l'equazione (37) è la medesima, che l'infrascritta, in cui c à la stessa significazione

$$\frac{AG}{c}\sqrt{-1} = \frac{\left(1+\frac{AF}{c}\sqrt{-1}\right)^a - \left(1-\frac{AF}{c}\sqrt{-1}\right)^a}{\left(1+\frac{AF}{c}\sqrt{-1}\right)^a + \left(1-\frac{AF}{c}\sqrt{-1}\right)^a}.$$

Imperciocchè potrà sempre farsi in modo, che $\frac{1}{a}$ nella prima di queste ultime equazioni, ed a nella seconda sieno unicamente ne' coefficienti de' termini della serie, e non abbiano luogo negl'indici di detti termini.

Ciò che si è osservato in ordine all'equazione (25), ha similmente luogo anche per rapporto all'equazione (24), nella quale l'indice a può significare anche un numero rotto, e un esponente irrazionale, e ciò non ostante il secondo membro della stessa equazione (24) può ridursi in serie infinita, che esibisca il valore di z espresso in termini non affetti di quantità immaginarie, perchè tutti divisibili per $\sqrt{-1}$.

Potrei dedurre da questi miei principj altre formole generali, e finite per la moltisezione degli archi circolari, ma non amo di più allungare il presente scritto.

XLVI.

FORMOLA GENERALE PER LA RESOLUZIONE ANALITICA DELL'EQUAZIONI

DEL QUARTO, DEL TERZO, E DEL SECONDO GRADO, DERIVATA DAL METODO DI RISOLVERE L'EQUAZIONI DEL QUARTO GRADO INSERTO NEL I VOL. ALLA PAG. 470 (*).

L'aver io dedotte nel precedente schediasma le risoluzioni analitiche dell'equazioni del terzo e del secondo grado, mi à dato motivo di stendere il presente e il seguente schediasma.

Nell'infrascritta equazione (1) le lettere n, p, q, r dinotino qualsivoglia quantità costante col suo segno.

$$x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0. \tag{1}$$

Si concepisca l'equazione identica, che segue

$$\left[x^2 + \frac{n}{2}x + \frac{1}{2}\left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right)\right]^2 = x^4 + nx^3 + \left[\frac{n^2}{4} + \left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right)\right]x^2$$
$$+ \frac{n}{2}\left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right)x + \frac{1}{4}\left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right)^2,$$

nella quale f e z significano quantità indeterminate.

Da quest'equazione sottraggasi l'equazione (1), si avrà

$$\left[x^2 + \frac{nx}{2} + \frac{1}{2}\left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right)\right]^2 = \left[\frac{n^2}{4} + \left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right) - p\right]x^2 \tag{2}$$
$$+ \left[\frac{n}{2}\left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right) - q\right]x + \frac{1}{4}\left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right)^2 - r.$$

(*) [Pag. 417 della presente edizione].

Tirando da ambo le parti la radice quadrata, si trova

$$(3)\qquad x^2 + \frac{nx}{2} + \frac{1}{2}\left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right) = \pm x\left[\frac{n^2}{4} + \left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right) - p\right]^{\frac{1}{2}} \pm \pm \frac{1}{2}\left[\left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right)^2 - r\right]^{\frac{1}{2}},$$

purchè si supponga

$$\left[\left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right)^2 - r\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{n}{2}\left[\left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right) - q\right]}{\left[\frac{n^2}{4} + \left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right) - p\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Quest'equazione quadrata, e maneggiata a dovere produce

$$(4)\left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right)^3 - p\left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right)^2 + (nq - r)\left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right) + pr - \frac{n^2r}{4} - q^2 = 0.$$

Equazione, che trattata nel debito modo conduce a quest'altra

$$(f + \frac{z}{f})^3 + \left(-\frac{p^2}{3} + nq - r\right)(f + \frac{z}{f}) - \frac{2p^3}{27} + \frac{nqp}{3} + \frac{2rp}{3} - \frac{n^2r}{4} - q^2 = 0.$$

Se si sostituisce in quest'ultima equazione in vece di $\left(f + \frac{z}{f}\right)^3$ il suo valore $f^3 + 3zf + 3\frac{z^2}{f} + \frac{z^3}{f^3}$, cioè $f^3 + 3z\left(f + \frac{z}{f}\right) + \frac{z^3}{f^3}$, si giunge a quest'altra

$$\left(3z - \frac{p^2}{3} + nq - r\right)(f + \frac{z}{f}) + f^3 + \frac{z^3}{f^3} + \left(\frac{nqp}{3} - \frac{2p^3}{27} + \frac{2rp}{3} - \frac{n^2r}{4} - q^2\right) = 0.$$

Supponendo eguale a zero il primo termine di quest'equazione, cioè la quantità, che moltiplica $\left(f + \frac{z}{f}\right)$, si ottiene

$$(5)\qquad z = \frac{\frac{p^2}{3} - nq + r}{3}$$

indi si vede essere $f^3 + \frac{z^3}{f^3} + \left(\frac{nqp}{3} - \frac{2p^3}{27} + \frac{2rp}{3} - \frac{n^2r}{4} - q^2\right) = 0$.

Facendo ora per maggior brevità del calcolo eguale a K l'espressione racchiusa tra le due parentesi nell'ultima equazione; lasciando z in luogo del suo valore trovato nell'equazione (4), e poscia moltiplicando per f^3, si scuopre

$$f^6 + Kf^3 + z^3 = 0. \tag{6}$$

Equazione derivativa del secondo grado, che risoluta somministra il valore noto di f^3, e per conseguenza di f.

Avvertimento. — Ne' corollarj, che seguono, si lasceranno le lettere f e z in luogo de' loro valori trovati nell'equazioni (5), e (6).

Corollario I. *Resoluzione dell'equazioni del secondo grado mediante la formola* (3). — Per applicare la formola (3) alla risoluzione dell'equazioni del secondo grado, si consideri, che facendo nell'equazione (1) eguali a zero tanto r, quanto q, la stessa equazione diverrà la seguente che è del secondo grado $x^2 + nx + p = 0$.

Ma supponendo nell'equazione (4) eguali a zero la r e la q, si vede subito, che $f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3} = 0$. Adunque annullando nella formola (3) tanto $f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}$, quanto r e q, essa formola diventa $x^2 + \frac{nx}{2} = \pm x\sqrt{\frac{n^2}{4} - p}$, cioè $x = -\frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} - p}$.

Corollario II. — *Resoluzione dell'equazioni del terzo grado mediante la formola* (3). — Per applicare la formola (3) alla risoluzione dell'equazioni del terzo grado, si rifletta, che supponendo la r nulla nell'equazione (1), essa equazione diventerà l'infrascritta, che è del terzo grado

$$x^3 + nx^2 + px + q = 0.$$

E se nel segno doppio si prenderà il superiore, la formola assumerà quest'aspetto $x^2 + \frac{nx}{2} = x\left[\frac{n^2}{4} + \left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right) - p\right]^{\frac{1}{2}}$,

cioè

$$x = -\frac{n}{2} + \left[\frac{n^2}{4} + \left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right) - p\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

Corollario III. — Se in oltre si fa valere il segno inferiore nel segno doppio della formola (3), e si opera debitamente, ne risulterà

$$x^2+\frac{nx}{2}+\left(f+\frac{z}{f}+\frac{p}{3}\right)=-x\left[\frac{n^2}{4}+\left(f+\frac{z}{f}+\frac{p}{3}\right)-p\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Equazione, che contiene le altre due radici della soprannotata equazione cubica.

Corollario IV. — *Resoluzione dell'equazioni del quarto grado mediante la formola* (3). — Questa formola in virtù del suo doppio segno racchiude le quattro radici dell'equazione (1), che è del quarto grado. E per aver ciascuna di dette radici, basta risolvere due volte la stessa formola, o sia equazione (3), cioè la prima volta facendo in essa valere il segno superiore nel segno doppio, e la seconda volta, prendendo il segno inferiore nel medesimo doppio segno.

Corollario V. — *In cui si considerano più particolarmente l'equazioni del terzo grado prive del secondo termine* — Annullando nell'equazione (7) la lettera n, e riducendo il secondo membro di essa a più breve espressione, risulta per l'equazioni del terzo grado prive del secondo termine $x=\sqrt{f+\frac{z}{f}-\frac{2p}{2}}$, ma nel presente caso di $n=0$ l'equazione (5) mostra $z=\frac{p^2}{9}$; adunque si à questa formola

$$x=\sqrt{f+\frac{p^2}{9f}-\frac{2p}{3}} \tag{8}$$

ed estraendo la radice quadrata del secondo membro, nasce quest'altra

$$z=\sqrt{f}-\frac{p}{3\sqrt{f}}. \tag{9}$$

Corollario VI. — *Segue la considerazione dell'equazioni cubiche mancanti del secondo termine.* — Si è supposto di sopra nella risoluzione generale $K=\frac{npq}{3}-\frac{2p^3}{27}+\frac{2rp}{3}-\frac{n^2r}{4}-q^2$, cosicchè quando n ed r sono nulle, come nel caso presente, si à $K=-\frac{2p^3}{27}-q^2$.

Sostituendo pertanto nell'equazione (6) questo valore di K, ed anche il valore di z espresso nel precedente corollario, detta equazione (6) diventa $f^6 - \left(\frac{2p^3}{27} + q^2\right)f^3 + \frac{p^6}{9.9.9} = 0$.

Equazione, che risoluta, e destramente maneggiata somministra:

$$f = \left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{2} \pm q\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{10}$$

Introducasi nell'equazioni (8) e (9) questo valore di f, e sì dall'una, come dall'altra di esse resteranno analiticamente risolute l'equazioni del terzo grado, che non ànno il secondo termine.

Corollario VII. — *Continua la medesima considerazione.* — Si estragga la radice quadrata dall'equazione (10) mediante il noto metodo di estrarre tali radici dai binomj, e si conseguirà:

$$\sqrt{f} = \left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{f}{27} + \frac{q^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Di modo che questo valore di $\sqrt{f}$ posto nell'equazione (9) risolverà anch'esso l'equazioni cubiche deficienti del secondo termine.

E perchè $-\frac{p}{3\sqrt{f}}$, cioè $-\frac{p}{3} : \left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$ è uguale a $-\left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$, come la prova del calcolo rende manifesto; ne segue, che la formola detta del Cardano nasce felicemente dalle mie formole (7), (8), e (9), e comprova la giustezza e bellezza di questo metodo.

XLVII.

SOLUZIONE DI QUATTRO PROBLEMI ANALITICI

DA' QUALI SI DEDUCE CON METODO UNIFORME

LA RESOLUZIONE DELL'EQUAZIONI DEL SECONDO, DEL TERZO, E DEL QUARTO GRADO.

PROBLEMA. — Nel quadrato di $a+b+c$ discernere ciò, che moltiplica $a+b+c$, e ciò che può chiamarsi l'omogeneo di comparazione.

SOLUZIONE. — $(a+b+c)^2$ è uguale a quest'espressione:
$(a+b)^2+2c(a+b)+c^2$, ed anche a questa $(a+b)^2+2c(a+b+c)-c^2$, vale a dire si à

$$(a+b+c)^2=2c(a+b+c)+a^2+b^2+2ab-c^2 \tag{1}$$

e finalmente

$$(a+b+c)^2=(a+2c)(a+b+c)+b^2+ab-c^2-ac \tag{2}$$

perchè $a^2+b^2+2ab=a(a+b+c)+ab-ac$.
Il che dovea ritrovarsi.

COROLLARIO I. — L'equazione (1) moltiplicata per $4c(a+b+c)$ dà $4c(a+b+c)^3=8c^2(a+b+c)^2+(4a^2c+4b^2c+8abc-4c^3)(a+b+c)$ e aggiungendo di qua e di là $(4ab-6c^2)(a+b+c)^2+(4c^3-8abc)(a+b+c)$ ne proviene quest'equazione

$$\begin{aligned}4c(a+b+c)^3+(4ab-6c^2)(a+b+c)^2+(4c^3-8abc)(a+b+c)=\\=(2c^2+4ab)(a+b+c)^2+(4a^2c+4b^2c)(a+b+c).\end{aligned} \tag{3}$$

COROLLARIO II. — TEOREMA. — Le lettere h, ed m dinotino qualunque numero intiero positivo, o negativo, ed m possa denotare anche zero.

Le lettere c, A, B e G esprimano grandezze razionali, e c possa esprimere anche zero.

Sia $f=\sqrt{G}$; $a=Af^h$, e $b=Bf^{2m-h}$.

Io dico, che nel secondo membro dell'equazione (1) ciò, che può chiamarsi l'omogeneo di comparazione, sarà una grandezza razionale.

DIMOSTRAZIONE. — Nel secondo membro dell'equazione (1) ciò che può chiamarsi omogeneo di comparazione, vale a dire $a^2+b^2+2ab-c^2$ sarà eguale ad $A^2f^{2h}+B^2f^{2(2m-h)}+2ABf^{2m}-c^2$. Adunque è dimostrato il teorema.

ESEMPJ. — I. Se $h=1$, ed $m=0$, sarà $a=Af$, e $b=\frac{B}{f}$.

II. Se $h=1$, ed $m=1$, sarà $a=Af$, e $b=Bf$.

III. Se $h=2$, ed $m=1$, sarà $a=Af^2$, e $b=B$.

PROBLEMA. — Nel cubo di $a+b+c$ discernere ciò, che moltiplica $(a+b+c)^2$, ciò che moltiplica $(a+b+c)$, e ciò che può chiamarsi l'omogeneo di comparazione.

SOLUZIONE. — $(a+b+c)^3$ è uguale a quest'espressione

$$(a+b)^3+3c\,(a+b)^2+3c^2\,(a+b)+c^3$$

ed anche quest'altra

$$(a+b)^3+3c\,(a+b)^2+(6c^2-3c^2)\,(a+b)+3c^3-3c^3+c^3$$

la quale ri riduce all'infrascritta

$$(4) \qquad (a+b)^3+3c\,(a+b+c)^2-3c^2\,(a+b)-2c^3$$

perchè $(a+b)^2+2c\,(a+b)+c^2=(a+b+c)^2$.

Ma $(a+b)^3=a^3+3ba^2+3b^2a+b^3$, cioè ad $a^3+b^3+3ab\,(a+b)$. Adunque l'espressione (4) si muta in questa

$$(5) \qquad 3c\,(a+b+c)^2+\,(3ab-3c^2)\,(a+b)+a^3+b^3-2c^3.$$

Ora $(3ab-3c^2)\,(a+b)=3a^2b+3a^2b-3ac^2-3bc^2=(3ab-3c^2)\,(a+$ $+b+c)-3abc+3c^3$, come si trova dividendo per $a+b+c$ il membro

secondo di quest'equazione doppia, adunque surrogando nell'espressione (5) il secondo valore di $(3ab - 3c^2)(a+b+c)$, si conseguisce

$$3c(a+b+c)^2 + (3ab - 3c^2)(a+b+c) + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

e conseguentemente abbiamo

$$(6) \quad (a+b+c)^3 = 3c(a+b+c)^2 + (3ab - 3c^2)(a+b+c) + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Il che dovea ritrovarsi.

COROLLARIO. — TEOREMA. — Le lettere h ed m dinotino qualunque numero intiero, positivo o negativo; ed m possa denotare anche zero. Le lettere c, A, B e G esprimano grandezze razionali; e c possa esprimere anche zero.

Sia $f = \sqrt[3]{G}$; $a = Af^h$, e $b = Bf^{3m-h}$.

Io dico, che nel secondo membro dell'equazione (6) il coefficiente di $a + b + c$, ed anche ciò, che può chiamarsi l'omogeneo di comparazione, saranno grandezze razionali.

DIMOSTRAZIONE. — In primo luogo $3ab - 3c^2$ coefficiente di $a+b+c$ sarà eguale a $3ABf^{3m} - 3c^2$.

In secondo luogo $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, che può chiamarsi l'omogeneo di comparazione, sarà eguale ad $A^3 f^{3h} + B^3 f^{3(3m-h)} + c^3 - 3ABf^{3m}$. Adunque è dimostrato il teorema.

ESEMPJ. — I. Se $h = 1$, ed $m = 0$, sarà $a = Af$ e $b = \frac{B}{f}$.

II. Se $h = 1$, ed $m = 1$, sarà $a = Af$, e $b = Bf^2$.

PROBLEMA III. — Nel quadrato-quadrato di $a+b+c$ discernere ciò, che moltiplica $(a+b+c)^3$, ciò, che moltiplica $(a+b+c)^2$, ciò, che moltiplica $(a+b+c)$, e ciò, che può chiamarsi l'omogeneo di comparazione.

SOLUZIONE. — $(a+b+c)^4$ è uguale a questa espressione

$$(a+b)^4 + 4c(a+b)^3 + 6c^2(a+b)^2 + 4c^3(a+b) + c^4$$

che equivale a questa

$$(a+b)^4 + 4c(a+b)^3 + (12c^2 - 6c^2)(a+b)^2 + (12c^3 - 8c^3)(a+b) + 4c^4 - 3c^4$$

e per conseguente a quest'altra

(7) $$(a+b)^3+4c(a+b+c)^3-6c^2(a+b)^2-8c^3(a+b)-3c^4$$

perchè $(a+b)^3+3c(a+b)^2+3c^2(a+b)+c^3=(a+b+c)^3$.

Di più l'espressione (7) è uguale alla seguente

(8). $$(a+b)^4+4c(a+b+c)^3-6c^2(a+b+c)^2+4c^3(a+b)+3c^4$$

perchè $(a+b)^2+2c(a+b)+c^2=(a+b+c)^2$.

Inoltre $(a+b)^4=a^4+4ba^3+6b^2a^2+4b^3a+b^4$, cioè $(a+b)^4$ è uguale a questa quantità $4ab(a+b+c)^2-8abc(a+b)-4abc^2+a^4+b^4-2a^2b^2$.

Adunque ponendo tal valore di $(a+b)^4$ nell'espressione (8), essa diviene

(9) $$4c(a+b+c)^3+(4ab-6c^2)(a+b+c)^2+(4c^3-8abc)(a+b)+$$
$$+a^4+b^4-2a^2q^2+3c^4=4abc^2,$$

e quest'espressione è uguale ad $(a+b+c)^4$.

Ma $(4c^3-8abc)(a+b)=4ac^3+4bc^3-8a^2b^2-8ab^2c=(4c^3-8abc)(a+$ $+b+c)-4c^4+8abc^2$, come si trova dividendo per $a+b+c$ il membro secondo di quest'equazione doppia; adunque sostituendo nell'espressione (9) il secondo valore di $(4c^3-8abc)(a+b)$ essa diviene $4c(a+b+c)^3+$ $+(4ab-6c^2)(a+b+c)+(4c^3-8abc)(a+b+c)+a^4+b^4-2a^2b^2-c^4+4abc^2$ e sussiste quest'equazione.

(10) $$(a+b+c)^4=4c(a+b+c)^3+(4ab-6c^2)(a+b+c)+$$
$$+(4c^3-8abc)(a+b+c)+a^4+b^4-2a^2b^2-c^4+4abc^2.$$

Il che dovea ritrovarsi.

Corollario. — Teorema. — Le lettere h, ed m dinotino qualunque numero intiero, positivo, o negativo, ed m possa denotare anche zero.

Le lettere c, A, B, e G esprimano grandezze razionali, e e possa esprimere anche zero.

Sia $f=\sqrt[4]{G}$; $a=Af^h$, e $b=Bf^{4m-h}$.

Io dico, che nel secondo membro dell'equazione (10) il coefficiente di $(a+b+c)^2$, il coefficiente di $(a+b+c)$, ed anche ciò, che può chiamarsi l'omogeneo di comparazione, saranno grandezze razionali.

Dimostrazione. — In primo luogo $4ab-6c^2$ coefficiente di $(a+b+c)^2$ sarà eguale a $4ABf^{4m}-6c^2$.

In secondo luogo $4c^3-8abc$ coefficiente di $(a+b+c)$ sarà eguale a $4c^3-8ABef^{4m}$.

In terzo luogo $a^4+b^4-2a^2b^2-c^4+4abc^2$, che può chiamarsi l'omogeneo di comparazione, sarà eguale ad $A^4f^{4h}+B^4f^{4(4m-h)}-c^4+4ABc^2f^{4m}$. Adunque è dimostrato il teorema.

ESEMPJ. — I. Se $h=1$, ed $m=0$, sarà $a=Af$, e $b=\frac{B}{f}\cdot$

II. Se $h=1$, ed $m=1$, sarà $a=Af$, e $b=Bf^3$.

III. Se $h=-3$, ed $m=2$, sarà $a=\frac{A}{f^3}$, e $b=Bf^5$.

PROBLEMA IV. — Nel quadrato-quadrato di $a+b+c$ discernere ciò che moltiplica $(a+b+c)^2$, ciò che moltiplica $(a+b+c)$ e ciò che può chiamarsi l'omogeneo di comparazione.

PRIMA SOLUZIONE. — Nell'equazione (10) pongasi in vece di $4c(a+b+c)^3+(4ab-6c^2)(a+b+c)^2+(4c^3-8abc)(a+b+c)$ il suo valore $(2c^2+4ab)(a+b+c)^2+(4a^2c+4b^2c)(a+b+c)$ trovato nell'equazione (3), e e si scuoprirà quest'altra equazione

$$(11)\qquad (a+b+c)^4=(2c^2+4ab)(a+b+c)^2+(4a^2c+4b^2c)(a+b+c)+ \\ +a^4+b^4-c^4-2a^2b^2+4abc^2.$$

Il che dovea ritrovarsi.

SECONDA SOLUZIONE. — E nel secondo membro dell'equazione (10) s'introdurrà in cambio di $4c(a+b+c)^3$ il suo equivalente $(4ac+4bc+4c^2)\times \times(a+b+c)^2$, detto secondo membro si esprimerà nella seguente guisa

$$(H)\qquad (4ab+2c^2+4ac+4bc+4c^2)(a+b+c)^2+(4c^3-8abc)(a+b+c)+ \\ +a^4+b^4-c^4-2a^2b^2+abc^2$$

attesochè $4c^2-6c^2=-2c^2=2c^2-4c^2$.

Ciò basterebbe per lo scioglimento del problema. Tuttavia perchè sì fatta soluzione non sarebbe a proposito per l'uso che intendo di farne, io considero, che $(4ac+4bc-4c^2)(a+b+c)^2$ è uguale a quest'espressione $(4a^2c+4b^2c+8abc-4c^3)(a+b+c)$, e tal valore di $(4ac+4bc-4c^2)(a+b+c)^2$ sostituito nella quantità (H), la fa divenire il secondo membro dell'equazione (11).

Il che dovea dimostrarsi.

TERZA SOLUZIONE. — $(a+b+c)^4$ è uguale alla seguente espressione $(a+b)^4+4c(a+b)^3+(2c^2+4c^2)(a+b)^2+4c^3(a+b)+2c^4-c^4$, ed anche all'infrascritta

$$(12) \qquad (a+b)^4+4c(a+b)^3+2c^2(a+b+c)^2+4c^2(a+b)^2-c^4$$

perchè $(a+b)^2+2c(a+b)+c^2=(a+b+c)^2$.

Ma $(a+b)^4=b^4+4ba^3+6b^2a^2+4ab^3+b^4$, cioè $(a+b)^4=4ab(a+b)^2+ +8abc(a+b)+4abc^2-2a^2b^2-8abc(a+b)-4abc^2+a^4+c^4$; e quindi $(a+b)^4= =4ab(a+b+c)^2-8abc(a+b)-4abc^2+a^4+b^4-2a^2b^2c$ per la stessa ragione, che ho motivata immediatamente dopo l'espressione (12). Laonde surrogando questo valore di $(a+b)^4$ nella medesima espressione (12), essa prenderà questa sembianza

$$(13) \qquad (2c^2+4ab)(a+b+c)^2+4c(a+b)^3+4c^2(a+b)^2-8abc(a+b)+ +a^4+b^4-c^4-2a^2b^2-4abc^2$$

e quest'espressione sarà eguale ad $(a+b+c)^4$. E perchè $4c(a+b)^2= =(4ac+4bc)(a+b)^2$, ne segue, che l'espressione (13) equivale quest'altra

$$(14) \qquad (2c^2+4ac)(a+b+c)^2+(4c^2+4ac+4bc)(a+b)+ +a^4+b^4-c^4-2ab^2-4abc^2$$

dove ponendo in cambio di $(a+b)^2$ il suo valore $a^2+2ab+b^2$, e in luogo di $-8abc(a+b)$ il suo valore $-8a^2bc-8ab^2c$, si vedrà che

$$(4c^2+4ac+4bc)(a+b)^2-8abc(a+b)-4abc^2$$

è uguale a quest'espressione $4a^2c^2+4abc^2+4b^2c^2+4a^3c+4ab^2c+4a^2bc+4b^2c$.

Adunque fatta la debita sostituzione, l'espressione (14) si cangia in questa

$$(15) \qquad (2c^2+4ab)(a+b+c)^2+a^4+b^4-c^4-2a^4b^4+4c(a^3+b^3+ +a^2c+ab^2+b^2c+a^2b+abc)$$

dividendo adesso per $a+b+c$ la quantità (M) infrascritta

$$(\mathrm{M}) \qquad a^3+b^3+a^2c+ab^2+b^2c+a^2b+abc$$

ne viene il quoziente $a^2+b^2+\frac{abc}{a+b+c}$ cosicchè la quantità (M) equivale a questa $(a^2+b^2)(a+b+c)+abc$, che sostituita in luogo della suddetta quantità (M) nell'espressione (15), esibisce l'infrascritta

$$(2c^2+4ab)(a+b+c)^2+(4a^2c+4b^2c)(a+b+c)+a^4+b^4-c^4-2a^2b+4abc^2$$

e per conseguenza sussiste l'equazione (11) trovata nella prima soluzione di questo medesimo problema.

Il che dovea ritrovarsi.

Meritava questo problema, che ne fosse dedotta la soluzione da principj immediati, ed evidenti.

COROLLARIO. — TEOREMA. — Le lettere h, m ed n dinotino qualunque numero intiero positivo o negativo; ed m ed n possano denotare anche zero.

Le lettere A, B, C e G esprimano grandezze razionali.

Sia $f=\sqrt[4]{G}$; $a=Af^{h}$; $b=Bf^{4m-h}$, e $c=Cf^{4n-2h}$.

Io dico, che nel secondo membro dell'equazione (11) il coefficiente di $(a+b+c)^2$, il coefficiente di $(a+b+c)$, ed anche ciò, che può chiamarsi l'omogeneo di comparazione, saranno grandezze razionali.

DIMOSTRAZIONE. — In primo luogo $2c^2+4ab$ coefficiente di $(a+b+c)^2$ sarà eguale a $2C^2f^{4(2n-h)}+3ABf^{4m}$.

In secondo luogo $4a^2c+4b^2c$ coefficiente di $(a+b+c)$, sarà eguale a $4A^2Cf^{4n}+4B^2Cf^{4(m+n-h)}$.

In terzo luogo $a^4+b^4-c^4-2a^2b^2+4abc^2$, che può chiamarsi l'omogeneo di comparazione, sarà

$$A^4f^{4h}+B^4f^{4(4m-h)}-C^4f^{4(4-2h)}-A^2B^2f^{8m}+4ABC^2f^{4(m+2n-h)}.$$

Adunque è dimostrato il teorema.

ESEMPJ. — I. Se $h=1$; $m=1$; $n=1$; sarà $a=Af$; $b=Bf^3$ e $c=Cf^2$.

II. Se $h=1$; $m=0$; ed $n=0$; sarà $a=Af$; $b=\frac{B}{f}$; e $c=\frac{C}{f^2}$.

III. Se $h=1$; $m=0$; ed $n=1$; sarà $a=Af$; $b=\frac{B}{f}$; e $c=C\cdot f^2$

IV. Se $h=1$; $m=-1$; ed $n=-1$; sarà $a=Af$; $b=\frac{B}{f^5}$; e $c=\frac{C}{f^4}$.

V. Se $h=-1$; $m=1$; ed $n=-1$; sarà $a=\frac{A}{f}$; $b=Bf^5$; e $c=\frac{C}{f^2}$.

Resoluzione dell'equazioni del secondo grado dedotta dalla soluzione del problema I.

$$x^2 = nx + p \tag{16}$$

esprime ogni equazione del secondo grado, perchè n e p rappresentano quantità date coi loro segni. Si supponga pertanto $x = a + b + c$; e paragonando termine a termine l'equazioni (2) e (16), si avranno le due seguenti

$$a + 2c = n \tag{17}$$

$$b^2 + ab - c^2 - ac = p. \tag{18}$$

Dalla prima di esse s' inferisce

$$c = \frac{n - a}{2} \tag{19}$$

perciò $-c^2 - ac = \frac{a^2 - n^2}{4}$, e questo valore posto invece di $-c^2 - ac$ nell'equazione (18) somministra $b^2 + ab + \frac{a^2 - n^2}{4} = p$, vale a dire $b^2 + ab + \frac{a^2}{4} = \frac{n^2}{4} + p$, ed estraendo da ambe le parti la radice quadrata, si conosce

$$b + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} + p},$$

cioè

$$b = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} + p}. \tag{20}$$

Qui si noti, che la a rimane indeterminata.

Adunque essendosi supposta $x = a + b + c$, sarà in virtù dell'equazioni (19), e (20) $x = a + \left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} + p}\right) + \left(\frac{n}{2} - \frac{a}{2}\right)$, e cioè

$$x = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} + p}.$$

Scolio. — Anche l'equazione (1) darebbe la resoluzione dell'equazioni del secondo grado, perchè paragonata termine a termine coll'equazione (16) mostrerebbe $2c = n$, cioè $c = \frac{n}{2}$, ed $a^2 + b^2 + 2ab - c^2 = p$, vale a dire

$$(a + b)^2 = c^2 + p = \frac{n^2}{4} + p.$$

Cosicchè estraendo la radice quadrata, si avrebbe $a+b=\pm\sqrt{\frac{n^2}{4}+p}$. E quindi essendo stata supposta $x=a+b+c$, si vedrebbe come prima

$$x=\frac{n}{2}\pm\sqrt{\frac{n^2}{4}+p}.$$

Resoluzione dell'equazioni del terzo grado dedotta dalla soluzione del problema II. — Sia l'infrascritta equazione cubica, nella quale n, p, q esprimono quantità date coi loro segni

$$x^3=nx^2+px+q. \tag{21}$$

Si supponga $x=a+b+c$, e paragonando termine a termine l'equazioni (6), e (21), si avranno queste tre equazioni

$$3c=n \tag{22}$$

$$3ab-3c^2=p \tag{23}$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=q.$$

Ponendo in quest'ultima equazione il valore di $3ab$ tratto dall'equazione (23), e trasponendo, si à $a^3+b^3-2c^3-pc-q=0$, indi sostituendo qui invece di c il suo valore $\frac{n}{3}$ preso dall'equazione (22), si conseguisce

$$a^3+b^3-\frac{2n^3}{27}-\frac{pn}{3}-q=0. \tag{24}$$

Ma dall'equazione (23) si deduce $b=\frac{1}{a}\left(\frac{p}{3}+c^2\right)$, cioè ponendo in cambio di c^2 il suo valore $\frac{n^2}{9}$

$$b=\frac{1}{a}\left(\frac{p}{3}+\frac{n^2}{9}\right). \tag{25}$$

Perciò surrogando nell'equazione (24) questo valore di b, ne viene

$$a^3+\frac{1}{a^3}\left(\frac{p}{3}+\frac{n^2}{9}\right)^3-\frac{2n^3}{27}-\frac{pn}{3}-q=0$$

E moltiplicando per a^3, ritrovasi

$$a^6-\left(\frac{2n^3}{27}+\frac{pn}{3}+q\right)a^3+\left(\frac{p}{3}+\frac{n^2}{9}\right)^3=0 \tag{26}$$

equazione derivativa del secondo grado. Essendo dunque la x stata supposta eguale ad $a+b+c$, sarà in virtù dell'equazioni (22), e (25)

$$x=\frac{n}{3}+a+\frac{1}{a}\left(\frac{p}{3}+\frac{n^2}{9}\right).$$

In luogo di a s'intenda qui il suo valore espresso nell'equazione (26).

Preparazione. — *Resoluzione dell'equazioni del quarto grado.*

$$x^4=nx^3+px^2+qx+r \tag{27}$$

rappresenta tutte l'equazioni del quarto grado, perchè n, p, q ed r significano quantità date coi loro segni.

All'uno e all'altro membro dell'equazione (27) aggiungasi

$$-nx^3+\frac{3n^2}{8}x^2-\frac{n^3x}{16}+\frac{n^4}{256}$$

e la detta equazione prenderà questa sembianza

$$\left(x-\frac{n}{4}\right)^4=\left(p+\frac{3n^2}{8}\right)x^2+\left(q-\frac{n^3}{16}\right)x+\frac{n^4}{256}+r.$$

Si ponga in quest'equazione invece di $\left(p+\frac{3x^2}{8}\right)x^2$ il suo equivalente $\left(p+\frac{3n^2}{8}\right)\left(x-\frac{n}{4}\right)^2+\left(p+\frac{3n^2}{8}\right)\left(\frac{nx}{2}-\frac{n^2}{16}\right)$, e operando a dovere si vedrà

$$\left(x-\frac{n}{4}\right)^4=\left(p+\frac{3n^2}{8}\right)\left(x-\frac{n}{4}\right)^2+\left(\frac{np}{2}+q+\frac{n^3}{8}\right)x-\frac{5n^4}{256}-\frac{n^2p}{16}+r.$$

S'introduca in quest'ultima equazione in luogo di $\left(\frac{np}{2}+q+\frac{n^3}{8}\right)x$ il suo equivalente $\left(\frac{np}{2}+q+\frac{n^3}{8}\right)\left(x-\frac{n}{4}\right)+\frac{n^2p}{8}+\frac{nq}{4}+\frac{n^4}{32}$, e fatte le debite operazioni apparirà quest'altra

$$\left(x-\frac{n}{4}\right)^4=\left(p+\frac{3n^2}{8}\right)\left(x-\frac{n}{4}\right)^2+\left(\frac{np}{2}+q+\frac{n^3}{8}\right)\left(x-\frac{n}{4}\right)+ \\ +\frac{3n^4}{256}+\frac{n^2p}{16}+\frac{nq}{4}+r \tag{28}$$

che equivale all'equazione (27).

Segue la risoluzione dell'equazioni del quarto grado. — Per maggiore speditezza del calcolo facciasi

$$P = p + \frac{3n^2}{8} \tag{29}$$

$$Q = \frac{np}{2} + q + \frac{n^3}{8} \tag{30}$$

$$R = \frac{3n^4}{256} + \frac{n^2p}{16} + \frac{nq}{4} + r \tag{31}$$

e l'equazione (28) sarà

$$\left(x - \frac{n}{4}\right)^4 = P\left(x - \frac{n}{4}\right)^2 + Q\left(x - \frac{n}{4}\right) + R\cdot \tag{32}$$

SupponGasi $x - \frac{n}{4} = a + b + c$, e l'equazioni (11), e (32) paragonate tra loro termine a termine, somministreranno le tre equazioni che seguono

$$2c^2 + 4ab = P \tag{33}$$

$$4a^2c + 4b^2c = Q \tag{34}$$

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - c^4 + 4abc^2 = R. \tag{35}$$

Dall'equazione (33), nasce quest'altra

$$ab = \frac{P}{4} - \frac{c^2}{2}. \tag{36}$$

L'equazione (35) trasposta produce $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = R + c^4 - 4abc^2$ e introducendo nel secondo membro il valore di ab desunto dall'equazione (36), si arriva a questa $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = R - Pc^2 + 3c^4$ da cui estraendo la radice quadrata, si vede

$$a^2 - b^2 = \pm\sqrt{R - Pc^2 + 3c^4}\cdot \tag{37}$$

Dall'equazione (34) deriva

$$a^2 + b^2 = \frac{Q}{4c}\cdot \tag{38}$$

Aggiungendo l'equazioni (37) e (38), e poi dividendo per 2, ritrovasi

$$a^2 = \frac{Q}{8c} \pm \sqrt{R - Pc^2 + 3c^4}\,. \tag{39}$$

Sottraendo l'equazione (37) dall'equazione (38), e poi dividendo per 2, si conosce

$$b^2 = \frac{Q}{8c} \mp \frac{1}{2}\sqrt{R - Pc^2 + 3c^4}\,. \tag{40}$$

Moltiplicando l'equazione (39) per l'equazione (44), si giunge a questa

$$a^2b^2 = \frac{Q^2}{64c^2} - \frac{R}{4} + \frac{Pc^2}{4} - \frac{3c^4}{4}\,. \tag{41}$$

Quadrando l'equazione (36), si à $a^2b^2 = \frac{P^2}{16} - \frac{Pc^2}{4} + \frac{c^4}{4}$ e questi due valori di a^2b^2 paragonati insieme danno, dopo aver fatte le debite operazioni

$$c^6 - \frac{Pc^4}{2} + \left(\frac{P^2}{16} + \frac{R}{4}\right)c^2 + \frac{Q^2}{64} = 0\,. \tag{42}$$

Estraggasi ora la radice quadrata dall'equazione (41), moltiplicata prima per 4, ne verrà

$$2ab = \sqrt{\frac{Q^2}{16c^2} - R + Pc^2 - 3c^4}\,. \tag{43}$$

Si aggiungano l'equazioni (38) e (43), si vedrà

$$a^2 + b^2 + 2ab = \frac{Q}{4c} + \sqrt{\frac{Q^2}{16c^2} - R + Pc^2 - 3c^4}\,.$$

Si estragga la radice da quest'ultima equazione, si troverà

$$a + b = \pm\left(\frac{Q}{4c} + \sqrt{\frac{Q^2}{16c^2} - R + Pc^2 - 3c^4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

E perchè abbiam supposto $x - \frac{n}{4} = a + b + c$, avremo

$$x = \frac{n}{4} + c \pm \left(\frac{Q}{4c} + \sqrt{\frac{Q^2}{16c^2} - R + Pc^2 - 3c^4}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{44}$$

In luogo di c intendasi qui il suo valore, che s'inserisce dell'equazione (42).

La novità e bellezza della formola (44) ci ricompensa della lunghezza del calcolo, che ad essa ci à condotto.

Seconda maniera di risolvere l'equazioni del quarto grado. — Per l'equazione (36), si à

$$2ab = \frac{P}{2} - c^2. \tag{45}$$

Aggiungendo prima l'equazioni (45), e (38), e poi sottraendo l'equazione (45) dall'equazione (38), si trovano queste due rispettive equazioni

$$a^2 + 2ab + b^2 = \frac{Q}{4c} + \frac{P}{2} - c^2 \tag{46}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = \frac{Q}{4c} - \frac{P}{2} + c^2 \tag{47}$$

dalle quali estraendo la radice quadrata, si ànno quest'altre due

$$a + b = \pm\sqrt{\frac{Q}{4c} + \frac{P}{2} - c^2} \tag{48}$$

$$a - b = \pm\sqrt{\frac{Q}{4c} - \frac{P}{2} + c^2}. \tag{49}$$

Moltiplicando l'equazione (48) per l'equazione (49), troveremo

$$a^2 - b^2 = \sqrt{\frac{Q^2}{16c^2} - \frac{P^2}{4} + Pc^2 - c^4} \tag{50}$$

e quadrando, conosceremo $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = \frac{Q^2}{16c^2} - \frac{P^2}{4} + Pc^2 - c^4$.

Questo valore di $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ posto nell'equazione (35), la trasforma nella seguente $\frac{Q^2}{16c^2} - \frac{P^2}{4} + Pc^2 - 2c^4 + 4abc^2 = R$ e trasponendo, si vede $4abc^2 = R + \frac{P^2}{4} - \frac{Q^2}{16c^2} - Pc^2 + 2c^4$, ma moltiplicando per c^2 l'equazione (33), indi trasponendo, si ottiene $4abc^2 = Pc^2 - 2c^4$.

Laonde il confronto di questi due valori di $4abc^2$ mostra

$$R+\frac{P^2}{4}-\frac{Q^2}{16c^2}-Pc^2+2c^4=Pc^2-2c^4$$

e quest'equazione trasposta, indi ordinata, restituisce l'equazione (42).

Considerando adesso l'equazione (48), e la supposizione, che si è fatta di $x-\frac{n}{4}=a+b+c$, ne segue

$$x=\frac{n}{4}+c\pm\sqrt{\frac{Q}{4c}+\frac{P}{2}-c^2}. \tag{51}$$

Questa formola comprende quella, che fu trovata in tempo del Cardano con metodo assai diverso.

Scolio. — In ciascuna delle due formole (44), e (51), l'espressione del valore di x equivale a quattro valori della medesima x; perchè si contiene in esse il segno doppio; e perchè la c può rappresentare ad arbitrio una quantità negativa o positiva, cioè la radice positiva o negativa di c^2.

Corollario I. — Se si vogliono i valori di a e di b, si aggiungano le due equazioni (48) e (49), e poi si divida per 2, e si conoscerà

$$a=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{4c}+P-c^2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{4c}-P+c^2}, \tag{52}$$

si sottragga poscia l'equazione (49) dall'equazione (48), indi si divida per 2, e si avrà

$$b=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{4c}+\frac{P}{2}-c^2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{4c}-\frac{P}{2}+c^2}. \tag{53}$$

Queste due formole sono nuove, ed eleganti. Ànno anche il pregio di generare l'altre due del IV corollario.

Dall'equazione (36) si trae

$$b=\frac{\frac{P}{4}-\frac{c^2}{2}}{a} \tag{54}$$

ed anche

$$a=\frac{\frac{P}{4}-\frac{c^2}{2}}{b}. \tag{55}$$

Perciò quando si è dedotto dall'equazione (52), ovvero dall'equazione (53) il valore di a ovvero di b, l'espressione più semplice dell'altra di queste due quantità si tira respettivamente dall'equazione (54), ovvero dall'equazione (55).

COROLLARIO III. — Quindi nascono le quattro nuove formole infrascritte

$$x=\frac{n}{4}+c+a+b$$

$$x=\frac{n}{4}+c+a+\left(\frac{P}{4}-\frac{c^2}{2}\right):a$$

$$x=\frac{n}{4}+c+b+\left(\frac{P}{4}-\frac{c^2}{2}\right):b$$

$$x=\frac{n}{4}+c+\left(\frac{P}{4}-\frac{c^2}{2}\right):b+\left(\frac{P}{4}-\frac{c^2}{2}\right):a.$$

SCOLIO. — I valori di a, e di b possono desumersi dall'equazioni (52), (53), (39) e (40), in ordine alle quali, e in ordine alle quattro formole del corollario presente, dee valere la riflessione, che si è fatta nello scolio, che precede il I corollario sopra il potersi rappresentare dalla c una quantità positiva o negativa ad arbitrio.

Una somigliante annotazione dovrà valere anche in ordine all'equazioni (56), (57), (59), (60), (61), (62), e (63).

COROLLARIO IV. — Quadrando l'equazioni (52) e (53), appariscono le due respettive

$$a^2=\frac{Q}{8c}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q^2}{16c^2}-\left(\frac{P}{2}-c^2\right)^2} \tag{56}$$

$$b^2=\frac{Q}{8c}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q^2}{16c^2}-\left(\frac{P}{2}-c^2\right)^2} \tag{57}$$

SCOLIO. — La formola (56) si trova ancora aggiungendo l'equazioni (38) e (50), e poi dividendo la loro somma per 2.

Alla formola (57) si giunge ancora sottraendo l'equazione (50) dall'equazione (38), e poi dividendo per 2 la loro differenza.

Terza maniera di risolvere l'equazioni del quarto grado. — L'equazione (35) ben considerata, equivale a questa $(a^2+b^2)^2-(c^2-2ab)^2=R$.

Ponendo in cambio di $2ab$ il suo valore desunto dall'equazione (36), e poi trasponendo, nasce $(a^2+b^2)^2=R+\left(2c^2-\frac{P}{2}\right)^2$.

Estraggasi la radice quadrata e si manifesterà

$$a^2+b^2=\sqrt{R+\left(2c^2-\frac{P}{2}\right)^2}. \tag{58}$$

Quest'equazione paragonata coll'equazione (33), fa vedere

$$\frac{Q}{4c}=\sqrt{R+\left(2c^2-\frac{P}{2}\right)^2}.$$

Equazione, che quadrata, e poi ordinata nel debito modo rende l'equazione (42).

Aggiungasi all'equazione (58) l'equazione (36) moltiplicata prima per 2, e ne verrà $a^2+b^2+2ab-\frac{P}{2}=c^2+\sqrt{R+\left(2c^2-\frac{P}{2}\right)^2}$ ed estraendo da quest'equazione la radice quadrata, avremo

$$a+b=\pm\left[\frac{P}{2}-c^2+\sqrt{R+\left(2c^2-\frac{P}{2}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

e per supposizione fatta di $x-\frac{n}{4}=a+b+c$, troveremo

$$x=\frac{n}{4}+c\pm\left[\frac{P}{2}-c^2+\sqrt{R+\left(2c^2-\frac{P}{2}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{59}$$

Anche questa formola è rimarcabile per la sua bellezza e novità.

Corollario I. — Se si vogliono altre formole pel valore di a e di b, eccole:

L'equazioni (37), e (38) aggiunte esibiscono dividendo la somma per 2

$$a^2=\frac{1}{2}\sqrt{R-\frac{P^2}{4}+Pc^2-4c^4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{R-Pc^2+3c^4} \tag{60}$$

e l'equazione (37) sottratta dall'equazione (58), manifesta dividendo la differenza per 2

$$b^2=\frac{1}{2}\sqrt{R-\frac{P^2}{4}+Pc^2-4c^4}\mp\frac{1}{2}\sqrt{R-Pc^2+3c^4}. \tag{61}$$

COROLLARIO II. — *Due altre formole pel valore di a, e di b.* — Aggiunte l'equazioni (50) e (58), e divisa per 2 la somma di esse, proviene

$$(62)\qquad a^2=\frac{1}{2}\sqrt{R+\left(2c^2-\frac{P}{2}\right)^2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q^2}{16c^2}-\left(c^2-\frac{P}{4}\right)^2}.$$

Sottratta l'equazione (50) dall'equazione (58), e divisa per 2 la loro differenza, risulta

$$(63)\qquad b^2=\frac{1}{2}\sqrt{R+\left(2c^2-\frac{P}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q^2}{16c^2}-\left(c^2-\frac{P}{2}\right)^2}.$$

SCOLIO. — Ora si dà luogo allo scioglimento del problema infrascritto.

Io lo feci pervenire, sopprimendo il mio nome, ai dotti autori degli Atti di Lipsia, ai quali piacque inserirlo negli Atti medesimi *anno 1749, mese d'ottobre, pag. 627*, e mentre scrivo, non so ancora, se, e come, da altri sia stato sciolto.

PROBLEMA. — Sia l'equazione del quarto grado mancante del secondo termine $x^4=px^2+qx+r$ nella quale p, q, ed r dinotino quantità date coi loro segni.

Si dimanda che si trasformi detta equazione in quest'altra pure del quarto grado, ma dotata del secondo termine $x^4=fx^3+gx^2+hx+r$ tale, che l'incognita x sia la stessa nella prima, e nella seconda equazione, e sia parimente lo stesso in ambedue l'equazioni l'omogeneo di comparazione r.

I coefficienti poi della seconda equazione, cioè f, g, ed h siano determinati per mezzo de' coefficienti p, e g della prima equazione e per mezzo ancora del comune omogeneo di comparazione r.

SOLUZIONE. — Suppongasi $x=a+b+c$, e l'equazione $x^4=px^2+qx+r$ si paragoni termine a termine coll'equazione (11), che è del quarto grado ed è priva anch'essa del secondo termine.

Da questo paragone si traggano i valori di a, di b e di c come si è fatto in questo schediasma, cioè nella prima, o nella seconda, o nella terza maniera di risolvere l'equazioni del quarto grado, e ne' loro corollarj.

Suppongasi però la n uguale a zero, talchè nell'equazione (29) abbiasi $P=p$, nell'equazione (30) abbiasi $Q=q$, e nell'equazione (31) abbiasi $R=r$, e così tutte le formole esprimenti i valori di a, di b e di c, delle quali si farà uso.

Indi ritenendo la supposizione di $x=a+b+c$, si pongano i suddetti valori di a, di b e di c nell'equazione (10) pure del quarto grado, la quale è dotata del secondo termine, ed ancora à per ultimo suo termine l'ultimo dell'equazione (11), già fatto eguale ad r.

Egli è visibile, che in questa guisa rimarrà sciolto il problema. Il che dovea farsi.

XLVIII.

ALTRO METODO PER LA SEZIONE INDEFINITA DEGLI ARCHI CIRCOLARI

SENZA IL SUSSIDIO DELLE SERIE.

AVVERTIMENTO. — *Nel mese di Giugno dell'anno 1719, o poco dopo, mandai (secondo il mio consueto) all'Accademia degli Arcadi in Roma il presente schediasma, e gli altri due che lo seguono immediatamente; i quali inclusi in tre diversi pieghi segnati al di fuori il primo colla lettera F, il secondo colla lettera G, il terzo colla lettera H, e tutti e tre contrassegnati col mio nome pastorale di Floristo Gnausnio. Gl'istessi schediasmi alcuni anni avanti erano stati da me prodotti.*

TEOREMA I. — Il binomio $\frac{m\,dt\sqrt{-1}}{1+t^2}$ à per suo integrale

$$l.\frac{(1+t\sqrt{-1})^m}{(1+t^2)^{\frac{m}{2}}}.$$

Avvertendo, che m esprime qualsivoglia esponente possibile, ed $l.$, significa logaritmo.

DIMOSTRAZIONE. — Il soprannotato logaritmo si risolve nelle due seguenti quantità $m\,l.(1+t\sqrt{-1})-m\,l.\sqrt{1+t^2}$, le quali differenziate, somministrano $\frac{m\,dt\sqrt{-1}}{1+t\sqrt{-1}}-\frac{m\,t\,dt}{1+t^2}$, cioè (riducendo queste due frazioni ad uno stesso denominatore, il che si ottiene col moltiplicare per $1-t\sqrt{-1}$ il numeratore e il denominatore della prima)

$$\frac{m\,dt\sqrt{-1}}{1+t^2}-\frac{m\,t\,dt\sqrt{-1}\sqrt{-1}}{1+t^2}-\frac{m\,t\,dt}{1=t^2}=\frac{m\,dt\sqrt{-1}}{1+t^2}$$

Dunque, ec. Il che dovea dimostrarsi.

Teorema II. — L'integrale dello stesso binomio $\frac{m\,dt\sqrt{-1}}{1+t^2}$ è

$$l\cdot\frac{(1+t^2)^{\frac{m}{2}}}{(1+t\sqrt{-1})^m}.$$

Dimostrazione. — Questo logaritmo equivale alle due espressioni, che seguono $m\,l.\sqrt{1+t^2}-m\,l.(1+t\sqrt{-1})$, e differenziandole si à $\frac{mt\,dt}{1+t^2}+\frac{m\,dt\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}}$, ovvero (moltiplicando per $1+t\sqrt{-1}$ il numeratore e il denominatore della seconda di queste due frazioni)

$$\frac{mt\,dt}{1+t^2}+\frac{m\,dt\sqrt{-1}}{1+t^2}+\frac{mt\,dt\sqrt{-1}\sqrt{-1}}{1+t^2}=\frac{m\,dt\sqrt{-1}}{1+t^2}.$$

Dunque, ec. Il che dovea dimostrarsi.

Problema. — Trovare senza il sussidio della serie un valore reale di x tale che salvi l'infrascritta equazione (1), ove n esprime qualunque numero positivo, e p qualsivoglia quantità costante

$$\int\frac{p\,dy}{1+y^2}=n\int\frac{p\,dx}{1+x^2}. \tag{1}$$

Soluzione. — Si moltiplichi per $\frac{\sqrt{-1}}{p}$ l'uno e l'altro membro dell'equazione (1) differenziata, e ne risulterà quest'altra

$$\frac{dy\sqrt{-1}}{1+y^2}=\frac{n\,dx\sqrt{-1}}{1+x^2} \tag{2}$$

che integrata mediante il I teorema fa conoscere

$$l\cdot\frac{(1+y\sqrt{-1})}{\sqrt{1+y^2}}=l\cdot\frac{(1+x\sqrt{-1})^n}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}},$$

cioè

$$\frac{1+y\sqrt{-1}}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{(1+x\sqrt{-1})^n}{(+x^2)^{\frac{n}{2}}},$$

ovvero

$$\frac{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+y^2}}(1+y\sqrt{-1})=(1+x\sqrt{-1})^n. \tag{3}$$

La medesima equazione (2) integrata per mezzo del II teorema mostra $l \cdot \frac{\sqrt{1+y^2}}{1-y\sqrt{-1}} = l \cdot \frac{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}{(1+x\sqrt{-1})^n}$, donde si deduce

$$\frac{\sqrt{1+y^2}}{1-y\sqrt{-1}} = \frac{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}{(1-x\sqrt{-1})^n},$$

e fatte le debite operazioni si à

$$(4) \qquad \frac{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+y^2}}(1-y\sqrt{-1}) = (1-x\sqrt{-1})^n.$$

Aggiungasi ora quest'equazione (4) all'equazione (3), e si troverà questa prima formola.

Formola prima.

$$\frac{2(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+y^2}} = (1+x\sqrt{-1})^n + (1-x\sqrt{-1})^n$$

nella quale è manifesto, che svaniscono tutti i termini affetti dalla quantità immaginaria $\sqrt{-1}$. Il che dovea dimostrarsi.

Avvertimento. — In ordine a questa prima formola, e alle seguenti, quando si dice che svaniscono in esse i termini affetti dalla quantità immaginaria, ovvero, che la stessa immaginaria quantità da esse si scaccia, o in esse si distrugge; s'intende, che ciò segua sviluppati, che sieno i secondi membri di quelle equazioni, le quali costituiscono le medesime formole.

Sottraggasi poscia l'equazione (4) dall'equazione (3), e si scuoprirà quest'altra formola.

Formola seconda.

$$2y\sqrt{-1}\,\frac{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+y^2}} = (1+x\sqrt{-1})^n - (1-x\sqrt{-1})^n.$$

Egli è visibile, che da questa seconda formola si scaccia la quantità immaginaria dividendo per $\sqrt{-1}$ tutti i termini di essa. Il che dovea ritrovarsi.

Per ottenere una terza formola si quadri l'equazione della prima ovvero della seconda formola, e operando nelle debite maniere, si avrà

Formola terza.

$$2\frac{1-y^2}{1+y^2}(1+x^2)^n=(1+x\sqrt{-1}+)^{2n}+(1-x\sqrt{-1})^{2n}.$$

Il che dovea ritrovarsi.

E finalmente dividendo l'equazione della seconda formola per l'equazione della prima, si giungerà alla quarta formola che segue

Formola quarta.

$$y\sqrt{-1}=\frac{(1+x\sqrt{-1})^n-(-x\sqrt{-1})^n}{(1+x\sqrt{-1})^n+(1-x\sqrt{-1})^n}.$$

Il che dovea ritrovarsi.

Anche in queste due ultime formole evidentemente apparisce la distruzione della quantità immaginaria.

COROLLARIO I (fig. 61). — Applicazione di queste verità analitiche alla geometria.

Sieno ora nel quadrante circolare AC i due archi AF, AG; il raggio AB sia $=1$; la tangente AF dell'arco maggiore AG si chiami y, e la tangente AD dell'arco minore AF si nomini x. È già noto agl'intendenti, che l'espressione analitica dell'arco maggiore AG è $\int\frac{dy}{1+y^2}$, e che l'espressione dell'arco minore AF è $\int\frac{dx}{1+x^2}$, e però in virtù dell'equazione (1), ove $p=1$, le mie quattro formole registrate di sopra servono per la sezione indefinita dell'arco AG senza l'aiuto delle serie.

SCOLIO I. — Si noti primieramente che i due integrali di $\frac{m\,dt\sqrt{-1}}{1+t^2}$ da me ritrovati ed esposti nel I e II teorema, sono completi, allorchè $\int\frac{dt}{1+t^2}$ esprime l'arco di cerchio, la di cui tangente è t; poichè siccome

all'annientarsi di t si annulla quest'arco di cerchio, così ciascuno dei miei due integrali nel caso di $t=0$ diventa il logaritmo dell'unità, che è zero.

Si osservi in secondo luogo, che dalla mia quarta formola nasce evidentemente la serie, che il signor Giovanni Bernulli registrò negli Atti di Lipsia dell'anno 1712, alle pagine 329, e 330: e questo è una prova sensibile della giustezza del mio metodo.

Corollario II. — Se si farà $y=\sqrt{\frac{u^{2c}}{a^{2c}}-1}$, e $x=\sqrt{\frac{z^{2c}}{a^{2c}}-1}$, intendendo per c qualunque esponente, e per a una quantità costante; l'equazione (1) diverrà

$$(5)\qquad \int \frac{pc\,du}{u\sqrt{\frac{u^{2c}}{a^{2c}}-1}} = n\int \frac{pc\,dz}{z\sqrt{\frac{z^{2c}}{a^{2c}}-1}}$$

e la formola si cangerà in quest'altra, che è semplicissima

Formola quinta.

$$\frac{2a^c z^{cn}}{a^{cn} u^c} = \left(1+\sqrt{1-\frac{z^{2c}}{a^{2c}}}\right)^n + \left(1-\sqrt{1-\frac{z^{2n}}{a^{2c}}}\right)^n$$

e questa medesima formola quadrata, e trattata nel debito modo, produce quella, che segue

Formola sesta.

$$\frac{2a^{2c}}{u^{2c}}-1 = \left[\left(1+\sqrt{1-\frac{z^{2c}}{a^{2c}}}\right)^{2n} \pm \left(1-\sqrt{1-\frac{z^{2c}}{a^{2c}}}\right)^{2n}\right]\cdot\frac{a^{2cn}}{2z^{2cn}}\,.$$

Si vede manifestamente, che in queste due ultime formole si distruggono tutti quei termini, che contengono la quantità $\sqrt{1-\frac{z^{2c}}{a^{2c}}}$ elevata a potestà impari.

Corollario III (fig. 61). — Se a è uguale al raggio AB; u alla secante BE dell'arco maggiore AG; z alla secante BD dell'arco minore AF, e se in oltre $p=a$; $c=1$; allora l'equazione (5) diventa

$$\text{(6)} \qquad \text{Arc. } AG = n \text{ arc. } AF$$

e ponendo nelle formole quinta, e sesta l'unità positiva in cambio dell'esponente c, si ànno due nuove formole per la sezione indefinita dell'arco, mediante la secante.

Corollario IV (fig. 61). — Se a è uguale al raggio AB; u alla BH seno del complemento dell'arco maggiore AG; e z alla BI seno del complemento dell'arco minore AF; e se di più $p=a$; $c=-1$; l'equazione (5) si muta nell'equazione (6), e surrogando nelle formole quinta, e sesta invece dell'esponente c l'unità negativa, si ànno due nuove formole per la sezione indefinite dell'arco, mediante il seno del complemento.

Corollario V (fig. 62). — Se a è uguale al diametro AD; u alla DG corda del complemento al semicerchio dell'arco maggiore AG; e z alla DF corda del complemento al semicerchio dell'arco minore AF; e se ancora $p=a$, e $c=-1$; l'equazione (5) si cangia nell'equazione (6), e sostituendo nelle formole quinta, e sesta in vece dell'esponente c l'unità negativa, si ànno due nuove formole per la sezione indefinita dell'arco mediante la corda del complemento al semicerchio.

Queste due nuove formole non differiranno da quelle dell'antecedente corollario, fuorchè nella significazione della lettera a.

Corollario VI (fig. 62). — Se a è uguale al diametro AD; u alla DN abscissa del complemento al semicerchio dell'arco maggiore AG; e z alla DM abscissa del complemento al semicerchio dell'arco minore AF; e se in oltre $p=a$, e $c=\frac{1}{2}$; allora l'equazione (5) si muta nell'equazione (6), e ponendo nelle formole quinta, e sesta, $-\frac{1}{2}$ in cambio di c, si ànno due nuove formole per la sezione indefinita dell'arco mediante l'abscissa del complemento al semicerchio.

Di queste due nuove formole avrà luogo nella pratica quella, che nasce dalla formola sesta.

Corollario VII (fig. 61, e 62). — In tutte le supposizioni dei corollarj I, III, IV, V, e VI; allorchè l'arco AG diviene eguale al quadrante, o al semicerchio, i due primi membri dell'equazioni, che costituiscono le due formole prima, e quinta, s'annientano, e i secondi membri delle stesse equazioni divenendo anch'essi in tal caso eguali a zero, producono delle nuove formole per la sezione indefinita del quadrante, o del semicerchio.

Scolio II. — Chi desidera altre nuove formole per la sezione indefinita dell'arco mediante il suo seno retto, la sua corda, o la sua abscissa, potrà facilissimamente dedurle dai corollarj IV, V, e VI, senza ch'io maggiormente allunghi questo scritto coll'esposizione di esse.

XLIX.

MANIERA DI FAR SERVIRE ALLA GEOMETRIA ALCUNE DIGNITÀ IMMAGINARIE

NELLA SOLUZIONE DI DUE PROBLEMI, NE' QUALI SI CERCA IL MODO DI RITROVARE PER APPROSSIMAZIONE *PRIMIERAMENTE* UN SETTORE CIRCOLARE, CHE SIA EGUALE A UN DATO SPAZIO COMPRESO TRA L'IPERBOLA EQUILATERA, L'ASIMPTOTO, E DUE ORDINATE AL MEDESIMO ASIMPTOTO; *SECONDARIAMENTE* UN SIMILE SPAZIO IPERBOLICO EGUALE A UN DATO SETTORE DI CERCHIO: IL TUTTO SENZA PREVALERSI DEL METODO CHIAMATO DAGLI ANALISTI *IL RITORNO DELLE SERIE*.

Avia Pieridum peragro loca nullius ante
Trita solo.
Lucr., Lib. 4.

SCHEDIASMA I.

Avvertimento. — Allorchè nel presente schediasma, e nel seguente io cito il mio metodo per la sezione indefinita degli archi circolari, intendo di quello, che immediatamente precede questi due schediasmi.

Teorema I. — Nell'infrascritta serie E continuata in infinito colla medesima legge, che chiaramente apparisce, la lettera n rappresenti qualunque numero razionale intiero, o rotto, positivo, o negativo, e la x denoti qualsivoglia quantità positiva, o negativa; io dico che $(1+x)^n = E$

$$E = 1 + \frac{n}{1}x + \left(\frac{n.n-1}{1.2}\right)x^2 + \left(\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\right)x^3, \text{ ec.}$$

Dimostrazione. — Si consideri la quantità x come variabile, e il calcolo, e l'avvedutezza di chi lo maneggia, faran conoscere, che

$$E = \frac{dif.\ E}{n\,dx} \times (1+x);$$

adunque $\frac{n\,dx}{1+x}=\frac{dif.\,E}{E}$, e integrando $nl.\,1+x=l.E$, ovvero $l.(1+x)^n=l.\,E$, e conseguentemente liberando quest'ultima equazione dalla caratteristica de' logaritmi, $(1+x)^n=E$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I. — Egli è visibile, che se l'esponente n esprimesse non solo uno, ma due, tre quattro, anzi infiniti numeri razionali intieri, o rotti uniti insieme ad arbitrio coi segni negativo, o positivo, sussisterebbe tuttavia l'equazione $(1+x)^n=E$.

COROLLARIO II. — La quantità $(a\pm b)^n$ è uguale a quest'altra $a^n\left(1\pm\frac{b}{a}\right)^n$; adunque ponendo $\pm\frac{b}{a}$ in luogo di x nella serie E moltiplicata per a^n, si à una serie, che è uguale alla quantità $(a\pm b)^n$.

SCOLIO 1. — Da questo corollario potranno dedurre i conoscitori la formola generale per elevare alla dignità n una serie di molti, ed anche d'infiniti termini.

TEOREMA II. — I numeri irrazionali semplici, e immaginarj semplici, intieri, o rotti, positivi, o negativi, possono concepirsi come serie composte d'infiniti termini.

DIMOSTRAZIONE. — Se c significa qualunque numero intiero positivo, p qualsivoglia numero razionale positivo, o negativo, intiero, o rotto, ed n qualunque frazione razionale positiva, o negativa; egli è evidente, che questa quantità $c\left(1+pc^{-\frac{1}{n}}\right)^n$ può esprimere qualunque numero irrazionale semplice, o immaginario semplice, intiero, o rotto: ma moltiplicando per c la serie infinita E del I teorema, e ponendo in essa $pc^{-\frac{1}{n}}$ in vece di x, si avrà una serie composta d'infiniti termini razionali eguale alla suddetta quantità $c\times\left(1+pc^{-\frac{1}{n}}\right)^n$. Adunque, ec. Il che doveva dimostrarsi.

ESEMPIO. — Se $c=1$; $p=\pm 2$; $n=\frac{1}{2}$, si avrà

$$c\times\left(1+pc^{-\frac{1}{n}}\right)^n=\sqrt{1\pm 2},$$

e surrogando $\frac{1}{2}$ in luogo di n, e ± 2 in vece di x nella serie E, ne risulterà l'infrascritta serie R, che sarà eguale a $\sqrt{3}$, allorchè il segno dub-

bioso è positivo, e sarà eguale a $\sqrt{-1}$, quando il medesimo segno è negativo

$$R = 1 \pm 1 - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} - \frac{5}{8} \pm \frac{7}{8} - \frac{21}{16} \pm \frac{33}{16} - \frac{429}{128} \pm \frac{715}{128}, \text{ ec.}$$

Qualunque paradosso si deduca dalla serie R, basta al mio intento, che da essa quadrata (scolio I) venga 1 ± 2, come si vedrà, dando ai termini della serie R la foggia di quelli della serie E. Egli è visibile, che se $R^2 = 1 \pm 2$, anche $R = \sqrt{1 \pm 2}$.

Corollario. — Anche i numeri in qualsivoglia modo composti d'irrazionali, d'immaginarj, e di razionali, possono concepirsi come serie, le quali costino d'infiniti termini razionali. Un esempio semplice, e facile diluciderà la verità di questa asserzione.

Sia il numero $\left[\frac{1}{5} + \sqrt{-1} + \sqrt{3}\right]^{\frac{1}{3}}$, si vede, che la quantità sotto il vincolo si riduce mediante questo teorema ad una serie composta di infiniti termini razionali: or questa medesima serie infinita elevata (scolio I) alla dignità $\frac{1}{3}$, produrrà un'altra serie composta d'infiniti termini razionali, e quest'ultima serie sarà il valore del numero proposto, e sarà elevabile anch'essa a qualunque dignità mediante il metodo accennato nel I scolio.

Chiaramente apparisce, che il simile succede in tutti gli altri numeri composti in qualunque maniera d'irrazionali, d'immaginarj, e di razionali.

Scolio II. — Si noti, che quantunque n significasse un numero composto in qualsivoglia modo di numeri irrazionali, immaginarj, e razionali, nientedimeno si avrebbe sempre $n\,l.(1+x) = l.(1+x)^n$.

Conciosiacchè considerando il numero n come una serie composta d'infiniti termini razionali, e differenziando, si trova che l'elemento di $n\,l.(1+x)$ è $= \frac{n\,dx}{1+x}$, e che l'elemento di $l.(1+x)^n$ è $= n \times \frac{(1+x)^{n-1} \times dx}{(1+x)^n}$ cioè anchesso $= \frac{n\,dx}{1+x}$.

Teorema III. — Posto che nella serie E del I teorema, e nella quantità $(1+x)^n$, la lettera n denoti un numero composto in qualunqne maniera di numeri irrazionali, immaginarj, e razionali; io dico, che $(1+x)^n = E$.

DIMOSTRAZIONE. — Pel II teorema, e suo corollario l'esponente n può concepirsi come una serie composta d'infiniti termini razionali; dunque pel I corollario del I teorema $(1+x)^n = E$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I. — Attribuendo ad n il significato esposto ne' titoli del I, e del III teorema, la quantità complessa $(1+x)^n + (1+x)^{-n}$ divisa per 2 è uguale a tutti quei termini della serie E, ne' quali il numero n, o non si trova, o si trova elevato a potestà pari.

Chiara ne è la ragione, poichè ponendo $-n$ in vece di n nella serie E, si avrà un'altra serie F, e si avrà ancora $E+F$ eguale al doppio di tutti i termini della serie E, ne' quali il numero n, o non si trova, o si trova elevato a potestà pari.

ESEMPIO. — La quantità $(1+x)^{\sqrt{-1}} + (1+x)^{-\sqrt{-1}}$ divisa per 2, è uguale all'infrascritta serie G, ove tutti i termini sono reali

$$G = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^5 - \frac{19}{72}x^6, \text{ ec.}$$

Il modo di continuare in infinito la serie G evidentemente apparisce da questo corollario.

COROLLARIO II. — La quantità complessa $(1+x)^n - (1+x)^{-n}$ divisa per $2n$ è uguale alla somma divisa per n di tutti quei termini della serie E, ne' quali il numero n si trova inalzato a potestà impari; imperciocchè surrogando n negativo in cambio di n positivo nella serie E, si avrà un'altra serie F, e la differenza di queste due serie, cioè $E-F$ sarà eguale al doppio di tutti quei termini della serie E, ne' quali il numero n si trova inalzato a potestà impari.

ESEMPIO. — La quantità complessa $(1+x)^{\sqrt{-1}} - (1+x)^{-\sqrt{-1}}$ divisa per $2\sqrt{-1}$, è uguale alla seguente serie H, ove tutto è reale

$$H = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{8}x^6, \text{ ec.}$$

Questo corollario mostra chiaramente il modo di continuare in infinito la serie H.

PROBLEMA I. — Trovare per approssimazione, *ma senza servirsi del ritorno delle serie*, un settore di cerchio eguale a un dato spazio com-

preso tra l'iperbola equilatera, l'asimptoto, e due ordinate del medesimo asimptoto.

Soluzione (figg. 63 e 64). — Sia (fig. 63) tra gli asimptoti AX, AY l'iperbola equilatera $QBGI$, il di cui vertice è in B, e la di cui potenza $AC \times CB = AC^2 = 1$; sia inoltre nella stessa fig. 63 dal centro C col raggio CA descritto il cerchio ABD eguale all'altro cerchio $TOMH$ della fig. 64. Egli è chiaro, ch'io scioglierò il problema, se troverò per approssimazione, e *senza servirmi del ritorno della serie*, il settore TKO (fig. 64) eguale allo spazio iperbolico dato $CBGF$ (fig. 63), il quale spazio è minore del quarto di cerchio CBD; mentre se lo spazio iperbolico dato fosse maggiore del detto quarto di cerchio, come v. g. è lo spazio $CBIY$, già si sa dividere questo medesimo spazio in un numero di parti eguali tale, che una di essa sia, come è lo spazio $CBGF$, minore del quadrante CBD: onde moltiplicando pel numero di queste parti eguali il settore TKO, che è uguale allo spazio $CBGF$, si avrà un settore circolare, ovvero un multiplo del settore TKO, che sarà eguale allo spazio $BBIY$: ed è manifesto, che qualunque multiplo di un settor circolare può sempre ridursi ad un settor semplice, assumendo nella debita maniera il raggio di quel cerchio, cui dee appartenere il settor semplice, che à da eguagliare il multiplo del dato settore. Quando poi lo spazio dato fosse lo spazio inverso $BCQP$, o in se comprendesse questo spazio, come sarebbe, se lo spazio dato fosse $PQGF$; egli è parimente noto il modo di trovare uno spazio diretto $CBFG$ eguale allo spazio inverso dato $CBQP$, ovvero uno spazio diretto $CBIY$ eguale al dato spazio $PQGF$; laonde questi due casi riduconsi all'altro notato di sopra.

Ciò posto, considero il problema come sciolto, e suppongo (fig. 63, e 64) $TKO = CBGF$; adunque facendo il raggio $TK = CB = AC = 1$, l'abscissa $CF = x$, la tangente TA dell'arco TN sudduplo dell'arco TO, la tangente, dico, $TR = t$, differenziando l'equazione $2TKN - TKO = CBGF$, ed esprimendo in termini analitici quella, che ne deriva, ottengo $\frac{dt}{1+t^2} = \frac{dx}{1+x}$, e moltiplicando l'uno, e l'altro membro per $\sqrt{-1}$, ritrovo

$$(1) \qquad \frac{dt\sqrt{-1}}{1+t^2} = \frac{dx\sqrt{-1}}{1+x}.$$

Rifletto poscia, che l'integrale del secondo membro dell'equazione (1) è $\sqrt{-1}, l.(1+x) = l.(1+x)^{\sqrt{-1}}$ per ciò, che ho dimostrato nel II scolio,

e che l'integrale del primo membro della stessa equazione (1) in vigore dei due teoremi da me dimostrati nel mio metodo per la sezione indefinita degli archi circolari, l' integrale, dico, del primo membro è $l.\ \frac{1+t\sqrt{-1}}{\sqrt{1+t^2}}$, ed è anche $l.\ \frac{\sqrt{1+t^2}}{1-t\sqrt{-1}}$; quindi integrando l'equazione (1) ritrovo in primo luogo $l.\frac{1+t\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = l.\ (1+x)^{\sqrt{-1}}$, cioè

$$\frac{1+t\sqrt{-1}}{\sqrt{1+t^2}} = (1+x)^{\sqrt{-1}} \tag{2}$$

e ritrovo in secondo luogo $l\ .\frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t\sqrt{-1}} = l\ .\ (1+x)^{\sqrt{-1}}$ cioè

$$\frac{\sqrt{1+t^2}}{1-t\sqrt{-1}} = (1+x)^{\sqrt{-1}}$$

ovvero

$$\frac{1-t\sqrt{-1}}{\sqrt{1+t^2}} = (1+x)^{-\sqrt{-1}} \tag{3}$$

e aggiungendo l'equazioni (2), e (3) scopro

$$\frac{2}{\sqrt{1+t^2}} = (1+x)^{\sqrt{-1}} + (1+x)^{-\sqrt{-1}}. \tag{4}$$

Si noti che il secondo membro di quest'equazione è uguale al doppio della serie G in virtù del I corollario del III teorema.

Indi sottraendo l'equazione (3) dall'equazione (2) ottengo

$$\frac{2t\sqrt{-1}}{\sqrt{1+t^2}} = (1+x)^{\sqrt{-1}} - (1+x)^{-\sqrt{-1}}. \tag{5}$$

Si noti eziandio, che il secondo membro di quest'equazione è uguale alla serie H moltiplicata per $2\sqrt{-1}$, come consta dal II corollario del III teorema.

Chiamando ora u la secante $KR = \sqrt{1+t^2}$ (fig. 64), ponendo u in luogo di $\sqrt{1+t^2}$ nell'equazione (4), e operando a dovere, ritrovo questa prima formola.

Formola prima per la secante.

$$u = \frac{2}{(1+x)^{\sqrt{-1}} - (1+x)^{-\sqrt{-1}}}$$

ovvero $u = \dfrac{1}{serie\ G}$.

E in virtù di questo valore di KR (u), il doppio del settore TKN, cioè il settore TKO, sarà eguale allo spazio iperbolico $CBGF$. Il che dovea ritrovarsi.

Corollario della prima formola.

Se la serie G si eleverà alla potestà -1 (scolio I) si troverà

$$u = G^{-1} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4, \text{ ec.}$$

Continuando poscia il filo della soluzione, e nominando (fig. 64) h il coseno $KL = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; dividendo l'equazione (4) per 2, e in essa sostituendo h in vece di $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, ottengo quest'altra formola pel coseno dell'angolo TKN, tale che il settore $TKO = 2TKN$, sarà $= CBCF$.

Formola seconda pel coseno.

$$h = \frac{(1+x)^{\sqrt{-1}} + (1+x)^{-\sqrt{-1}}}{2}$$

ovvero $h = serie\ G$. Il che dovea ritrovarsi.

Dividendo in fine l'equazione (5) per l'equazione (4), e dividendo ancora per $\sqrt{-1}$ l'equazione, che ne risulta, ritrovo questa formola per la tangente dell'arco TN, tale che $TKO = TKN$ sarà eguale a $CBGF$.

Formola terza per la tangente.

$$t = \frac{(1+x)^{\sqrt{-1}} - (1+x)^{-\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}\,(1+x)^{\sqrt{-1}} + \sqrt{-1}\,(1+x)^{-\sqrt{-1}}}$$

ovvero $t = \dfrac{serie\ H}{serie\ G}$.

Corollario della terza formola.

Se la serie G s'inalzerà alla potestà -1 (scolio I) si troverà

$$t = H \times G^{-1} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4, \text{ ec.}$$

Scolio III. — Le tre formole registrate di sopra ànno questo di particolare, che quantunque constino di quantità elevate a potestà immaginarie e la terza di esse contenga di più la $\sqrt{-1}$, elleno nientedimeno rappresentano delle serie infinite, ove tutto è reale, e le rappresentano sotto espressioni finite, e succinte. Ho dunque motivo di sperare che questa mia invenzione giungerà affatto nuova agli analisti, poichè per quanto è a me noto, niuno di essi à mai dato segno di credere, che si potesse far uso delle quantità inalzate a dignità immaginarie.

Abbiasi qui riguardo all'avvertimento premesso allo schediasma antecedente.

L.

MANIERA DI FAR SERVIRE ALLA GEOMETRIA ALCUNE DIGNITÀ IMMAGINARIE, EC.

SCHEDIASMA II.

...... *juvat integros accedere fontes,*
Atque haurire: juvatque novos decerpere flores.
LUCR., lib. 4.

Abbiasi relazione all'avvertimento inserto nella pag. 410 *di questo volume.*

TEOREMA IV. — Posto che m rappresenti un numero dato in qualsivoglia maniera per numeri irrazionali, immaginarj, o razionali, e b denoti qualunque numero razionale intiero, o rotto, positivo, o negativo; io dico che questa quantità $(1-tm)^m \times (1+t^2)^{bm}$ è uguale all' infrascritta serie I moltiplicata per l'altra infrascritta serie K

$$I = 1 - m^2 t + \frac{1}{2} m^3 (m-1) t^2 - \frac{1}{6} m^4 (m-1)(m-2) t^3, \text{ ec.}$$

$$K = 1 + bmt^2 + \frac{1}{2} bm(bm-1) t^4 + \frac{1}{6} bm(bm-1)(bm-2) t^6, \text{ ec.}$$

DIMOSTRAZIONE. — Si surroghi m in luogo di n, e $-tm$ in cambio di x nella serie E registrata nel I schediasma, e in virtù del III teorema si otterrà la serie I. Pongasi ancora bm in vece di n, e t^2 in luogo di x nella medesima serie E, e ne nascerà la serie K, cosicchè il prodotto $I \times K$ sarà eguale all'altra serie infrascritta L

$$L = 1 - m^2 t + \frac{1}{2}(m^4 - m^3 + 2bm) t^2 + \frac{1}{6}(-m^6 + 3m^5 - 2m^4 - 6m^3 b) t^3, \text{ ec.}$$

Il che dovea dimostrarsi.

Questo teorema potrebbe proporsi anche più generalmente, ma basta al mio intento di averlo così proposto.

Corollario I. — La quantità $(1+tm)^{-m}\times(1+t^2)^{-bm}$ si risolve in una serie infinita (ch'io chiamerò O) eguale alla somma di tutti quei termini della serie L col loro segno, ne' quali m, o non si trova, o si trova elevata a potestà pari, meno la somma di tutti quei termini della medesima serie L col loro segno, ne'quali m è elevata a potestà impari. Quest'asserzione si fa manifesta a chi sostituisce la m negativa in luogo della m positiva nelle tre serie I, K, L, e nella quantità $(1-tm)^m\times(1+t^2)^{hm}$ notata nel teorema.

Corollario II. — E conseguentemente questa quantità complessa $(1-tm)^m\times(1+t^2)^{bm}+(1+tm)^{-m}\times(1+t^2)^{-bm}$, cioè la somma delle due serie L, ed O è uguale all'infrascritta serie P, che contiene il doppio di tutti quei termini della serie L, ne'quali il numero m, o non si trova, o si trova elevato a potestà pari

$$P=2-2m^2t+m^4t^2-\frac{1}{3}(m^6+2m^4)t^3, \text{ ec.}$$

La dimostrazione di questo teorema, e il suo I corollario, mostrano il modo di continuare in infinito questa serie P.

Esempio. — Questa quantità complessa particolare

$$(1-t\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}\times(1+t^2)^{-\frac{1}{2}\sqrt{-1}}+(1+t\sqrt{-1})^{-\sqrt{-1}}\times(1+t^2)^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$$

è un caso dell'altra quantità complessa generale registrata nel principio di questo corollario, purchè si supponga $m=\sqrt{-1}$, e $b=-\frac{1}{2}$. Laonde sostituendo in luogo di m, e di b questi loro valori nella serie P, ne risulterà l'altra infrascritta serie Q che sarà eguale alla sopraddetta quantità complessa particolare

$$Q=2+2t+t^2-\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{12}t^4, \text{ ec.}$$

Problema II. — Trovare per approssimazione, ma *senza servirsi del ritorno delle serie*, uno spazio compreso tra l'iperbola equilatera, l'asimptoto, e due ordinate al medesimo asimptoto, che sia eguale a un dato settore di cerchio.

Soluzione I. — Riflettasi a quanto io dissi nel I schediasma, e si considerino le due figure, che servono per esso: intendendo tuttavia per x l'abscissa CF dell'iperbola equilatera (fig. 63), e per t la tangente data TR dell'arco circolare TN (fig. 64), il quale arco TN è sudduplo dell'arco TO del settore dato TKO; e si vedrà, che il problema si riduce a trarre un valore per approssimazione di x in t da questa equazione $\frac{dx}{1+x} = \frac{dt}{1+t^2}$, il primo membro della quale è l'elemento della zona iperbolica ricercata $GBGF$, e il secondo è l'elemento del settore circolare dato TKO, che è uguale al doppio del settore TKN: in modo però, che per trovare questo valore di x in t non si ricorra al metodo chiamato dagli analisti *il ritorno delle serie.*

Ora io osservo, che $\frac{dt}{1+t^2}$ è uguale a quest'altra espressione

$$\frac{-\sqrt{-1} \times dt\sqrt{-1}}{1+t^2},$$

che integrata somministra $\int \frac{dt}{1+t^2} = -\sqrt{-1} \times l.\frac{\sqrt{1+t^2}}{1-t\sqrt{-1}}$, cioè

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = l.(1-t\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} \times (1+t^2)^{-\frac{1}{2}\sqrt{-1}}. \tag{6}$$

La medesima espressione $\frac{dt}{1+t^2}$ integrata in un altro modo somministra $\int \frac{dt}{1+t^2} = -\sqrt{-1} \times l.\frac{(1+t\sqrt{-1})}{\sqrt{1+t^2}}$ cioè

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = l.(1+t^2)^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}} \times (1+t\sqrt{-1})^{-\sqrt{-1}} \tag{7}$$

Il fondamento di queste due integrazioni è stato da me dimostrato abbastanza parte nel I schediasma, e parte nel mio metodo per la sezione indefinita degli archi circolari.

Integrando pertanto l'equazione $\frac{dx}{1+x} = \frac{dt}{1+t^2}$, e integrandola in due

modi, si troveranno due equazioni, che liberate dalla caratteristica dei logaritmi, produrranno quest'altre due

$$1+x=(1-t\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}\times(1+t^2)^{-\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$$

$$1+x=(1+t\sqrt{-1})^{-\sqrt{-1}}\times(1+t^2)^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$$

e dall'addizione di queste due ultime equazioni risulterà l'infrascritta quarta formola.

Formola quarta.

$$2+2x=(1-t\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}\times(1+t^2)^{-\frac{1}{2}\sqrt{-1}}+(1+t\sqrt{-1})^{-\sqrt{-1}}\times \\ \times(1+t^2)^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$$

ovvero pel II corollario del I teorema, e l'esempio ivi annesso

$$2+2x=2+2t+t^2-\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{12}t^4, \text{ ec.}$$

cioè dividendo l'uno, e l'altro membro per 2

$$1+x=1+t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3-\frac{7}{24}t^4, \text{ ec}$$

Il che dovea ritrovarsi.

TEOREMA V. — Se m rappresenta un numero composto in qualunque modo di numeri irrazionali, immaginarj, e razionali, e b esprime qualsivoglia numero razionale intiero, o rotto, positivo, o negativo; io dico, che questa quantità $(1+tbm)^m\times(-tbm)^{-m}$ è uguale al quadrato della somma di tutti quei termini (presi col loro segno), i quali nell'infrascritta serie infinita R, o non contengono il numero m, o lo contengono elevato a potestà pari, meno il quadrato della somma di tutti quei termini (presi col loro seg o) i quali nella medesima serie R contengono il numero m elevato a potestà impari

$$R=1+bm^2t+\frac{1}{2}b^2(m^4-m^3)t^2+\frac{1}{6}b^3(m^6-3m^5+2m^4)t^3, \text{ ec.}$$

DIMOSTRAZIONE. — La quantità $(1+tbm)^m$ è uguale alla serie R, come si vede, ponendo nella serie E registrata nel I schediasma m in luogo di n, e tbm in vece di x. L'altra quantità $(1-tbm)^{-m}$ si risolve (come è chiaro agl'intendenti del calcolo) in un'altra serie, ch'io chiamerò S eguale alla somma di tutti quei termini col loro segno della serie R, ne' quali m, o non si trova, o si trova inalzato a potestà pari (la qual somma si nomini A) meno la somma di tutti quei termini col loro segno della serie R, ne' quali m è elevato a potestà impari (la qual somma si chiami B). Adunque si avrà $R=A+B$; ed $S=A-B$; e per conseguenza la quantità $(1+tbm)^m \times (1-tbm)^{-m}$ che è uguale al prodotto $R \times S$, è ancora eguale a quest'altra espressione A^2-B^2. Il che dovea dimostrarsi.

La serie E mostra il modo di continuare in infinito la serie R.

COROLLARIO I. — Egli è evidente, che nel prodotto delle due serie R, ed S, cioè in A^2-B^2, il numero m non può trovarsi elevato a potestà impari.

COROLLARIO II, ed ESEMPIO. — La quantità particolare

$$(1-t\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}} \times (1+t\sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$$

è un caso della quantità generale notata nel titolo di questo V teorema, e per restarne convinto, basta figurarsi $m=\frac{1}{2}\sqrt{-1}$, e $b=-2$. Surrogando pertanto in vece di m, e di b questi valori nella serie R, si avrà $A=1+\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}t^2-\frac{7}{48}t^3-\frac{43t^4}{384}$, ec. e si avrà ancora

$$B=\frac{1}{4}t^2\sqrt{-1}+\frac{1}{8}t^3\sqrt{-1}-\frac{3}{32}t^4\sqrt{-1}, \text{ ec.}$$

Quindi è, che la quantità particolare soprannotata sarà $=A^2-B^2$.

E qui si rimarchi, che in quest'esempio la quantità $-B^2$, che sembra un quadrato negativamente preso, è in realtà eguale ad un quadrato positivo; attesochè tutti i termini, che compongono la serie infinita B sono moltiplicati per $\sqrt{-1}$.

Corollario III. — Dividendo per $(1-t\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$ il numeratore, e il denominatore di quella frazione, il logaritmo della quale fa il secondo membro dell'equazione (6), notata nella I soluzione del II problema, e dividendo per $(1+t\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$ il numeratore, e il denominatore di quella frazione, il di cui logaritmo fa il secondo membro dell'equazione (7), si à sempre

$$\int\frac{dt}{1+t^2}=\log.(1-t\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}}\times(1+t\sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$$

e in virtù del corollario precedente, si à ancora

$$(8)\qquad\int\frac{dt}{1+t^2}=\log.(A^2-B^2).$$

Queste due ultime equazioni manifestano una nuova, e bellissima proprietà del cerchio, ciascun arco del di cui quadrante à per suo elemento $\frac{dt}{1+t^2}$, quando la t denota la tangente dell'arco medesimo.

Scolio IV. — Se l'arco di cerchio fosse eguale al quadrante, allora la t diverrebbe infinita, e per avere il logaritmo eguale al quadrante nulla gioverebbe l'equazione (8). In questo caso si divida per mezzo lo stesso quadrante, e la tangente dell'arco sudduplo di esso sarà eguale all'unità; pongasi poscia 1 in luogo di t nel secondo membro dell'equazione (8), e si avrà il logaritmo eguale all'arco sudduplo del quadrante, e sarà log. (A^2-B^2). Quindi si avrà lo stesso quadrante $-2l.(A^2-B^2)=$ $=\log.(A^2-B^2)^2$.

Corollario IV. — *Altra soluzione del II problema* (fig. 63, e 64). — Intendasi come nella I soluzione per x l'abscissa CF dell'iperbola equilatera della fig. 63, e per t la tangente TR dell'arco circolare TN (fig. 64) sudduplo dell'arco TO del dato settore TKO, e si giungerà come nella I soluzione a quest'equazione $\frac{dx}{1+x}=\frac{dt}{1+t^2}$, la quale integrata darà in virtù dell'antecedente corollario

$$l.(1+x)=l.(1-t\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}}\times(1+t\sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$$

donde nasce questa quinta formola

Formola quinta.

$$1 + x = (1 - t\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}} \times (1 + t\sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$$

cioè $1 + x = A^2 - B^2$.

SCOLIO V. — Qui si abbia per replicato in vantaggio della quarta, e quinta formola ciò, che ò detto nel III scolio del I schediasma a favore della prima, seconda, e terza formola.

LI.

SOLUZIONE DI TRE PROBLEMI CONCERNENTI IL CALCOLO INTEGRALE.

PROBLEMA I. — Sieno i due binomj infrascritti A, e B (ove la lettera n esprime qualunque esponente, c significa l'unità positiva, ovvero negativa, ed anche $\pm\sqrt{-1}$, a rappresenta qualsivoglia quantità costante col suo segno). Rendere integrabile il binomio A supposta l'integrazione del binomio B

$$\text{(A)} \qquad dx\left[\frac{x^n}{a}+c\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{dz}{\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}}\,.$$

SOLUZIONE. — Sieno l'infrascritte equazioni (1), e (2); io dico, che sussiste l'altra equazione (3). Il che dovea ritrovarsi.

$$\text{(1)} \qquad z=4^{\frac{1}{n}}x\left[\frac{x^n}{a}+c\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{(2)} \qquad q=\frac{1}{2\times 4^{\frac{1}{n}}}$$

$$\text{(3)} \qquad dx\left(\frac{x^n}{a}+c\right)^{\frac{1}{n}}=\pm\frac{cq\,dz}{\sqrt{\frac{z}{a}+c^2}}+q\,dz\,.$$

Dimostrazione. — Dall'equazione (1) nascono l'equazioni seguenti

$$\frac{x}{a}+c=\frac{1}{2}c\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}. \tag{4}$$

$$x^{1-n}\left(\frac{x^n}{n}+c\right)^{\frac{1-n}{n}}=\frac{z^{1-n}}{4^{\frac{1-n}{n}}}. \tag{5}$$

Dall'equazione (4) differenziata risulta quest'altra

$$x^{n-1}dx=\pm\frac{z^{n-1}dz}{4\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}}. \tag{6}$$

E finalmente da quest'ultima equazione moltiplicata pel prodotto delle due equazioni (4), e (3) si genera l'equazione (3). Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I. — Se si dividerà il secondo membro dell'equazione (3) per z, e il primo membro pel valore di z tratto dall'equazione (1), si avrà trasponendo $\frac{cq\,dz}{z\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}}=\pm\frac{1}{4^{\frac{1}{n}}}\frac{dx}{x}\mp\frac{q\,dx}{z}$.

Equazione, che moltiplicata per $4^{\frac{1}{n}}$ riducesi a quest'altra

$$\frac{cdz}{2z\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}}=\pm\frac{dx}{x}\mp\frac{1}{2}\frac{dz}{z}. \tag{7}$$

Scolio I. — Supponendo $t=\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}$ la differenziale $\frac{dz}{z\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}}$, che entra nell'equazione (7) diviene $\frac{2dt}{n(t^2-c^2)}$.

Corollario II. — Chiamisi n il primo valore di x, che si trae dall'equazione (4) supponendo in essa positivo il segno ambiguo $\pm$. Si nomini poscia r il secondo valore di x, che si deduce dalla medesima

equazione (4), facendo in essa negativo il detto segno dubbioso $\pm$, e si otterrà in virtù del corollario precedente

$$\frac{c\,dz}{2z\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}} = +\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\frac{dz}{z}$$

$$\frac{c\,dz}{2z\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}} = -\frac{dr}{r} + \frac{1}{2}\frac{dz}{z}$$

e aggiungendo queste due equazioni, si avrà

$$\frac{c\,dz}{z\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}} = \frac{dx}{x} - \frac{dr}{r}. \tag{8}$$

Corollario III. — La differenziale $\frac{dz}{z\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}}$ diverrà $\frac{dz}{\sqrt{c^2z^2+\frac{1}{a}}}$ allorchè $n=-2$. ma diventerà $\frac{dz}{\sqrt{c^2z^2+\frac{z}{a}}}$, quando si avrà $n=-1$.

Corollario IV. — Dall'equazione (4) risulta quest'altra

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2} = \frac{x^n}{a} + \frac{1}{2}c$$

e moltiplicando per quest'ultima equazione l'equazione (7) trasposta, e moltiplicata per 4, si ottiene

$$\frac{dz}{z}\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2} \pm \frac{c\,dz}{z} = \pm\frac{4x^{n-1}\,dx}{a} \pm \frac{2c\,dx}{x}. \tag{9}$$

Corollario V. — *Che rettifica la logaritmica.* — Se nell'equazione (9) la lettera n esprime il due positivo, ed a l'unità positiva, la differenziale $\frac{dz}{z}\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}$ è l'elemento della logaritmica, purchè c significhi l'unità positiva, ovvero negativa; l'altra differenziale $x^{n-1}dx$ è l'integrabile, e il resto dell'equazione (9) s'integra mediante la descrizione

della stessa logaritmica. Laonde chiaramente si vede, che questa celebre curva non à d'uopo, che della descrizione di se medesima per essere esattamente rettificata.

Scolio II. — Non fa d'uopo esporre le particolarità più distinte di questa rettificazione, perchè gl'intendenti non vi troveranno altra difficoltà di momento. Mi contenterò pertanto d'avvertire: che nell'espressione $\int \frac{dz}{z} \sqrt{z^2+1}$ dell'arco della logaritmica la z denota l'applicata:

Che l'arco suddetto o prendasi da una parte, ovvero dall'altra di quell'applicata, che è uguale all'unità, deve esser nullo allorchè $z=1$.

E che per conseguenza in questo caso il valore analitico di un tal'arco dev'eguagliarsi a zero; il che serve per determinare la costante.

In fine avvertirò, che l'integrazioni dell'equazioni (7), (8), e (9) riusciranno più eleganti, se i due logaritmi, che entrano in dette integrazioni, si ridurranno colle note regole ad un solo logaritmo.

Corollario VI. — Posto $c=\pm 1$ il binomio (B) è uguale a quest'altra espressione, cioè $\left(\frac{2+n}{n}\right) dz \sqrt{\frac{z^n}{a}+1}$ — diff. $\frac{2z}{n} \sqrt{\frac{z^n}{a}+1}$, conforme il calcolo farà conoscere, ma quando a è una quantità positiva, la differenziale $dz \sqrt{\frac{z^n}{a}+1}$ è l'elemento di quelle curve geometriche, la natura delle quali si esprime con quest'equazione

$$\pm z^{\frac{n+2}{2}} = \left(\frac{n+2}{2}\right) y \sqrt{a} + b$$

(b significa una quantità costante ad arbitrio). Adunque sostituendo nell'equazione (3) in vece di c l'unità negativa, o positiva, e in vece del binomio B il suo valore espresso nel principio di questo corollario si scopre il modo d'integrare il binomio A mediante la rettificazione di curve geometriche, purchè in esso la lettera a denoti una quantità positiva, e c significhi l'unità positiva, o negativa.

Corollario VII. — Se l'equazione (6) si moltiplicherà per l'equazione (5), produrrà quest'altra

$$dx\left(\frac{x^n}{a}+c\right)^{\frac{1}{n}} = \pm \frac{dz}{4^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}}. \tag{10}$$

PROBLEMA II. — Sieno i due binomj infrascritti C e D (ove le lettere a, c, n significano lo stesso, che nel I problema, e la lettera p denota qualsivoglia quantità costante col suo segno); rendere integrabile il binomio C supposta l'integrazione del binomio D

$$\text{(C)} \qquad \frac{dx}{\left(\frac{x^n}{a}+c\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$\text{(D)} \qquad \frac{du}{c-\frac{u^n}{p}}.$$

SOLUZIONE. — Adoprisi quest' equazione

$$\text{(11)} \qquad x=\frac{u}{\left(c-\frac{u^n}{p}\right)^{\frac{1}{n}}}\times\left(\frac{ac}{p}\right)^{\frac{1}{n}}$$

e si avrà

$$\text{(12)} \qquad \frac{dx}{\left(\frac{x^n}{a}+c\right)^{\frac{1}{n}}}=\frac{c\,du}{c-\frac{u^n}{p}}\times\left(\frac{a}{cp}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Il che dovea ritrovarsi.

DIMOSTRAZIONE. — L'equazione (11) differenziata produce

$$\text{(13)} \qquad dx=\frac{c\,du}{\left(c-\frac{u^n}{p}\right)^{\frac{1}{n}+1}}\times\left(\frac{ac}{p}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Dalla stessa equazione (1), deriva

$$\text{(14)} \qquad x^n+c=\frac{c^2}{c-\frac{u^n}{p}}$$

e dividendo l'equazione (13) per l'equazione (14) elevata alla potestà $\frac{1}{n}$ si arriva all'equazione (12).

Il che dovea dimostrarsi.

Corollario. — Moltiplicando l'equazione (13) per l'equazione (14) elevata alla potestà $\frac{1}{n}-1$ si trova la seguente

$$(15) \qquad dx\left(\frac{x^n}{a}+c\right)^{\frac{1}{n}-1} = c\,\frac{du}{\left(c-\frac{u^n}{p}\right)^{\frac{2}{n}}} \times \left(\frac{ac^3}{p}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Problema III. — Sieno i due binomj B, ed E (ne'quali le lettere a, c, n, p ànno la stessa significazione esposta di sopra); rendere integrabile il binomio E supposta l'integrazione del binomio B

$$(B) \qquad \frac{dz}{\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}}$$

$$(E) \qquad \frac{du}{\left(c-\frac{u^n}{p}\right)^{\frac{2}{n}}}$$

Soluzione. — Pongasi l'equazione infrascritta

$$(16) \qquad \frac{c^2}{c-\frac{u^n}{p}} = \frac{1}{2}c \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}$$

e si avrà quest'altra

$$(17) \qquad \frac{du}{\left(c-\frac{u^n}{p}\right)^{\frac{2}{n}}} = \frac{c\,dz}{\pm\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}} : \left(\frac{4\,ac^3}{p}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Il che dovea ritrovarsi.

Dimostrazione. — Il corollario VI del I problema fa conoscere, che posta l'equazione (4) si à l'equazione (10). Il corollario del II pro-

blema mostra, che data l'equazione (14) si ottiene l'equazione (15). Dunque ponendo nell'equazione (4) il valore di $\frac{x^n}{a}+c$ tratto dalla equazione (14) si vedrà nascere l'equazione (16), e sostituendo nell'equazione (10) il valore di $dx\left(\frac{x^n}{a}+c\right)^{\frac{1}{n}-1}$ dedotto dall'equazione (15), indi moltiplicando per $\frac{c}{\left(\frac{ac^3}{p}\right)^{\frac{1}{n}}}$ l'equazione, che ne risulta, si giungerà all'equazione (17). Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I. — Dall'equazione (16) proviene la seguente

$$z=u\left(\frac{4ac^3}{p}\right)^{\frac{1}{n}}:\left(c-\frac{u^n}{p}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{18}$$

Corollario II. — Se $n=4$; $a=1$; $c=1$; allora il binomio $E=\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$ e il binomio $B=\frac{dz}{\sqrt{z^4+1}}$.

Corollario III. — Ma se $n=4$; $p=-1$; $a=-1$; $c=1$, allora si à il binomio $E=\frac{du}{\sqrt{u^4+1}}$, e binomio $B=\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$.

Scolio III. — Dai tre precedenti corollarj ànno origine il I, e il III teorema del mio II schediasma sopra la curva lemniscata.

Corollario IV. — Se $n=2$; $a=-1$: $p=-1$; $c=1$. In questo caso il binomio $E=\frac{du}{u^2+1}$, e il binomio $B=\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$.

Corollario V. — Dall'equazione (17) divisa per l'equazione (18) presa al rovescio à origine l'infrascritta $\frac{du}{u}=\pm\frac{cdz}{z\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}}$.

Corollario VI. — La differenziale $\frac{dz}{z\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}}$ diventa

$$\frac{dz}{\sqrt{c^2z^2+\frac{z}{a}}},$$

quando $n=-2$, ma diviene $\frac{dz}{\sqrt{c^2z^2+\frac{z}{a}}}$, allorchè $n=-1$, come appunto si è notato nel III corollario del I problema.

Corollario VII. — La differenziale $\frac{dz}{z}\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}$ è uguale a quest'altra differenziale $\frac{z^{n-1}\,dz}{a\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}}+\frac{c^2dz}{z\sqrt{\frac{z^n}{a}+c^2}}$, il secondo termine della quale si riduce ad una differenziale di logaritmo mediante il V corollario di questo problema, e il primo termine è integrabile.

Corollario VIII. — *Che mostra un'altra maniera di rettificare la logaritmica.* — Adunque supponendo nel precedente corollario $n=2$; $a=1$; $c=\pm1$, e di più nell'equazione (18) $p=+1$ conforme parerà a proposito, si avrà un altro modo di rettificare la logaritmica, supposta però la descrizione di essa.

Corollario IX. — Quando nel binomio B la lettera a denota una quantità positiva, questo medesimo binomio potrà integrarsi supposta la rettificazione di curve geometriche, come si è spiegato nel V corollario del I problema, e però l'integrazione del binomio E si riduce alla rettificazione delle medesime curve.

Potrebbero dedursi da questi principj altre verità.

Scolio IV. — La maniera, che ò tenuta in formar la dimostrazione del scioglimento del III problema, è compresa nell'infrascritto teorema generale facilissimo a dimostrarsi.

TEOREMA. — Le lettere A, B, C, D, E, F dinotino grandezze di qualunque genere, e si abbiano le seguenti tre coppie d'equazioni.

Prima coppia.

$$A = B \tag{19}$$

$$C = D \tag{20}$$

Seconda coppia.

$$A = E \tag{21}$$

$$C = F \tag{22}$$

Terza coppia.

$$E = B \tag{23}$$

$$F = D \tag{24}$$

Io dico, che sussistendo due di queste coppie, sussiste anche l'altra.

DIMOSTRAZIONE. — Se la prima, e la seconda coppia sussistono, dall'equazioni (19), e (21) nasce l'equazione (23), e dall'equazioni (20), e (22) l'equazione (24).

Se la prima, e la terza coppia sussistono, dall'equazioni (19), e (23) proviene l'equazione (21), e dalle equazioni (20), e (24) l'equazioni (22).

In fine, se la seconda, e la terza coppia sussistono, dall'equazioni (21), e (23) risulta l'equazione (19), e dall'equazioni (22), e (24) l'equazione (20). Il che, ec.

Se i membri di tutte, ovvero di alcune delle sei soprannotate equazioni, fossero trasposti in maniera, che il primo divenisse secondo, e versa-vice; egli è visibile, che il teorema non riceverebbe alterazione veruna.

COROLLARIO. L'espressioni X, ed Fx rappresentino funzioni arbitrarie della variabile x;

E così Z, e Kz della variabile z; come pure V, ed Mu della variabile u.

Sieno in oltre le tre infrascritte coppie d'equazioni.

Prima coppia.

$$Fx = Kz$$
$$X\,dx = Z\,dz.$$

Seconda coppia.

$$Fx = Mu$$
$$X\,dx = V\,du.$$

Terza coppia.

$$Mu = Kz$$
$$V\,du = Z\,dz.$$

Due di queste coppie, che sussistano, anche l'altra sussiste.

Non è punto necessario, che le tre funzioni X di x, Z di z, ed V di u sieno simili tra loro. Intendasi lo stesso in ordine alle funzioni Fx, Kz, ed Mu.

Scolio V. — Assai prima dell'anno 1718 io sciolsi questi tre problemi, e nell'anno suddetto, o poco dopo, ne trasmisi all'Accademia d'Arcadia in Roma le soluzioni coi loro corollarj. Le inclusi in un piego segnato al di fuori colla lettera C, e col mio nome pastorale.

Il sig. Giovanni Bernulli nell'edizione delle sue Opere fatta l'anno 1742, tomo IV, pag. 57 riduce questa formola $\dfrac{dx}{\sqrt[n]{ax^p + b^n x}}$ $\left(\text{cioè } \dfrac{dx}{x(ax^{p-n} + b)^{\frac{1}{n}}}\right)$ a quest'altra $\dfrac{z^{n-2}dz}{z^n - b} \times \dfrac{n}{p-n}$.

Il simile nasce dal secondo de' problemi presenti in questo modo.

Nell'equazioni (11), e (12) pongasi t^{-m} in luogo di x, e $\dfrac{-m\,dt}{t^{m+1}}$ in vece di dx. Fatte le debite operazioni l'equazione (11) diverrà

$$t^m = \left(c - \frac{u^n}{p}\right)^{\frac{1}{n}} : u\left(\frac{ac}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{25}$$

e l'equazione (12) apparirà

$$\frac{dt}{t\left(\frac{1}{a}+ct^{mn}\right)^{\frac{1}{n}}} = -\frac{du}{c-\frac{u^n}{p}} \times \frac{c}{m}\left(\frac{a}{cp}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{26}$$

Se oltre di ciò nell'equazioni (25), e (26) si surroga $\frac{1}{r}$ in cambio di u, e $-\frac{dr}{r^2}$ in vece di du, e si opera nella dovuta maniera, dall'equazione (25) si avrà $t^m = \left(cr^n - \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{n}} : \left(\frac{ac}{p}\right)^{\frac{1}{n}}$, e l'equazione (26) darà

$$\frac{dt}{t\left(\frac{1}{a}+ct^{mn}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{r^{n-2}dr}{cr^n-\frac{1}{p}} \times \frac{c}{m}\left(\frac{a}{cp}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

LII.

METODO PER TROVARE NUOVE MISURE DEGLI ARCHI DELL'IPERBOLA EQUILATERA.

TEOREMA I. — Sieno le due equazioni infrascritte (1), e (2); io dico, che posta la prima di esse sussiste anche l'altra

$$x^2 = \frac{2u^2}{u^4 - 1} \tag{1}$$

$$\frac{x^2 dx}{\sqrt{2}\sqrt{x^4+1}} = -\frac{u^2 du}{\sqrt{u^4-1}} + \text{diff.}\frac{u^3}{\sqrt{u^4-1}}\,. \tag{2}$$

DIMOSTRAZIONE. — Dall'equazione (1) nascono le due seguenti

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{u}{\sqrt{u^4-1}} \tag{3}$$

$$\sqrt{x^4+1} = \frac{1+u^4}{u^4-1}\,. \tag{4}$$

Dall'equazione (3) differenziata si deduce $\frac{dx}{\sqrt{2}} = -\frac{du}{\sqrt{u^4-1}} \times \frac{1+u^4}{u^4-1}$ e quest'ultima equazione moltiplicata prima per l'equazione (1), e poscia divisa per l'equazione (4) genera quest'altra

$$\frac{x^2\,dx}{\sqrt{2}\sqrt{x^4+1}} = -\frac{2u^2\,du}{(u^4-1)^{1+\frac{1}{2}}}\,. \tag{5}$$

Ma il calcolo fa conoscere, che $-\frac{2u^2\,du}{(u^4-1)^{1+\frac{1}{2}}}$ equivale a quest'altra quantità $-\frac{u^2\,du}{\sqrt{u^4-1}} + \text{diff.}\frac{u^3}{\sqrt{u^4-1}}$, la quale surrogata in luogo del suo

valore nel secondo membro dell'equazione (5) rende l'equazione (2). Dunque, ec.

Il che dovea dimostrarsi.

Teorema II. — Sieno le due infrascritte equazioni (6), e (7); io dico, che posta la prima di esse sussiste anche l'altra

$$x^2 = t^2 \pm \sqrt{t^4 - 1} \tag{6}$$

$$\frac{x^2\, dx \sqrt{2}}{\sqrt{x^4+1}} = dt \pm \frac{t^2\, dt}{\sqrt{t^4-1}}. \tag{7}$$

Dimostrazione. — L'equazione (6) mostra $\frac{\sqrt{x^3+1}}{x\sqrt{2}} = t$.

La stessa equazione (6) differenziata dà $x\,dx = t\,dt \pm \frac{t^3\, dt}{\sqrt{t^4-1}}$.

Adunque dividendo quest'ultima equazione per la penultima, si arriva all'equazione (7).

Il che dovea dimostrarsi.

Teorema III. — Sieno le due equazioni infrascritte (8) e (9). Io dico, che posta la prima di esse l'altra ancora sussiste

$$t^2 \pm \sqrt{t^4-1} = \frac{2u^2}{u^4-1} \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\, dt \pm \frac{t^2\, dt}{2\sqrt{t^4-1}} = -\frac{u^2\, du}{\sqrt{u^4-1}} + \text{diff.}\ \frac{u^4}{\sqrt{u^4-1}}. \tag{9}$$

Dimostrazione. — Pongasi nell'equazione (1) del I teorema in luogo di x^2 il suo valore $t^2 \pm \sqrt{t^4-1}$ espresso nell'equazione (6) del II teorema, e si avrà l'equazione (8), indi si surroghi nell'equazione (2), del I teorema in vece di $\frac{x^2\, dx}{\sqrt{2}\sqrt{x^4+1}}$ il suo valore $\frac{1}{2}\, dt + \frac{1}{2} \frac{t^2\, dt}{\sqrt{t^4-1}}$, che nasce dalla supposizione fatta di $x^2 = t^2 \pm \sqrt{t^4-1}$ (come mostra l'equazione (7) del secondo teorema divisa per 2), e si giungerà all'equazione (9).

Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA IV. — Sieno le due equazioni infrascritte (10), e (11); io dico, che posta la prima di esse sussiste anche l'altra

$$(10) \qquad t = \frac{\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{z^2-1}}$$

$$(11) \qquad \frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^4-1}} = -\frac{x^2\,dz}{\sqrt{z^4+1}} + \text{diff.}\,\frac{z\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}}.$$

DIMOSTRAZIONE. — Dall'equazione (10) proviene la seguente

$$\frac{t}{\sqrt{t^4-1}} = \frac{z^2-1}{2z} \times \frac{\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{z^2-1}}$$

Dalla medesima equazione (10) quadrata, e poi differenziata deriva $t\,dt = -\frac{2z\,dz}{(z^2-1)^2}$ equazione, che moltiplicata per quella, che immediatamente la precede, fa vedere $\frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^4-1}} = -\frac{dz}{(z^2-1)^{1+\frac{1}{2}}} \times \sqrt{z+1}$.

Ma quest'ultima equazione è la medesima che l'equazione (11), conforme si vede ponendo nel secondo membro dell'equazione (11) in luogo di diff. $\frac{z\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{z^2-1}}$ il suo equivalente, cioè $-\frac{dz\sqrt{z^2+1}}{(z^2-1)^{1+\frac{1}{2}}} + \frac{z^2dz}{\sqrt{z^4-1}}$. Adunque data l'equazione (10) si ha l'equazione (11).

Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO I (fig. 65). — Se nell'iperbola equilatera HOS, il di cui centro è in C, l'abscissa centrale CO, che passa pel vertice si suppone eguale all'unità, e l'altra abscissa centrale indeterminata CZ si chiama z, egli è già noto, che $\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{z^4-1}}$ esprime l'arco iperbolico ZO; laonde potranno gl'intendenti servirsi in più maniere del III e del IV teorema per iscoprire nuove misure degli archi dell'iperbola equilatera, non dovranno però tralasciare, dove farà d'uopo, l'aggiunta o la sottrazione delle debite quantità costanti, ec. Io mi contenterò di darne un solo esempio nel progresso di questo scritto.

TEOREMA V. — Sieno le due seguenti equazioni (12) e (13), io dico, che posta la prima l'altra sussiste

$$\frac{z+1}{z-1}=\frac{2u^2}{u^4-1} \tag{12}$$

$$\text{diff.}\,\frac{\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{z^2-1}}-\frac{z^2dz}{\sqrt{z^4-1}}+ \tag{13}$$

$$+\ \text{diff.}\,\frac{z\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{z^2-1}}=-\frac{2u^2du}{\sqrt{u^4-1}}+\text{diff.}\,\frac{2u^3}{\sqrt{u^4-1}}.$$

DIMOSTRAZIONE. — Facciasi positivo il segno dubbioso nell'equazione (8) del III teorema, e pongasi in essa in cambio di t il suo valore $\frac{\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{z^2-1}}$ preso dall'equazione (10) del IV teorema, e si otterrà l'equazione (12); sostituiscasi poscia nell'equazione (9) del III teorema in vece di $\frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^4+1}}$ il suo valore, cioè $\frac{z^2\,dz}{\sqrt{z^4-1}}+\text{diff.}\,\frac{z\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{z^2-1}}$, che risulta dalla supposizione fatta di t, come fa vedere l'equazione (11) del IV teorema, indi surrogando nella suddetta equazione (9) del III teorema in vece di dt il suo equivalente diff. $\frac{\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{z^2-1}}$, come appare dalla medesima supposizione di t, e finalmente moltiplicando per 2 l'equazione (9) così preparata, si trova l'equazione (13).

Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I. — Dall'equazione (13) integrata, e poi trasposta si tira quest'altra

$$\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{z^4-1}}-2\int\frac{u^2\,du}{\sqrt{u^4-1}}=(z+1)\frac{\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{z^2-1}}-\frac{2u^3}{\sqrt{u^4-1}}. \tag{14}$$

COROLLARIO II. — Dall'equazione (12) nascono le due seguenti

$$u^2=\frac{z-1+\sqrt{2z^2+2}}{z+1} \tag{15}$$

$$\frac{2u}{\sqrt{u^4-1}}=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z^4-1}}$$

e quest'ultima equazione moltiplicata per l'equazione (15) mostra

$$\frac{2u^3}{\sqrt{u^4+1}} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z+1}} + \frac{2\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{z^2-1}}.$$

Corollario III. — Ponendo questo valore di $\frac{2u^3}{\sqrt{u^4-1}}$ nel secondo membro dell'equazione (14), e riducendo ad una semplice espressione il medesimo secondo membro si ottiene finalmente

$$(16) \qquad \int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{z^4-1}} - 2\int\frac{u^2\,du}{\sqrt{u^4-1}} = (\sqrt{z^2+1}-\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z+1}}.$$

Corollario IV (fig. 65). — Se nell'iperbola equilatera HOS si prende l'arco arbitrario OZ determinato dall'abscissa centrale $CZ=z$, si à questo medesimo arco $OZ = \int\frac{z^2dz}{\sqrt{z^4-1}}$, e se nell'istessa curva si prende l'altr'arco VOS determinato dalle due abscisse centrali CV, CS eguali tra loro. e designate colle lettere u si à il detto arco

$$VOS = 2\int\frac{u^2\,du}{\sqrt{u^4-1}},$$

e se in fine si sostituiscono nel primo membro dell'equazione (16) gli archi accennati in luogo de' loro valori, e di più si suppone l'abscissa centrale $CV(u)$ eguale al valore di u, che si deduce dall'equazione (15), allora si scopre

$$(17) \qquad \text{Arc. } OZ - \text{arc. } VOS = (\sqrt{z^2+1}-\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z+1}}.$$

Scolio II. — L'equazione (15) mostra, che quando $CZ\ (z)=1$, allora $CO\ (u)=1$, e per conseguenza tanto l'arco OZ, quanto l'arco VOS sono nulli in questo caso; ma la stessa supposizione di $z=1$ annienta anche il secondo membro dell'equazione (17); adunque questa medesima equazione è completa.

Il secondo membro dell'equazione (15) fa vedere agl'intendenti:

Primo, che z è maggiore di u, e che per conseguenza l'arc. arbitrario OZ è sempre maggiore dell'altr'arc. correlativo OV.

Secondo, che u cresce al crescere di z, poichè amendue queste quantità $\frac{z-1}{z+1}$, e $\frac{\sqrt{2z^2+2}}{z+1}$ s'aumentano all'aumentarsi di z; quindi ad un arco arbitrario maggiore di OZ corrisponde un altr'arco correlativo maggiore di OV.

Terzo, che quantunque questo medesimo arco OV cresca al crescere dell'arco OZ, egli cresce però sì lentamente, che quando l'arco arbitrario OZ è infinito, l'arco corrispondente OV è finito. Per restar convinto di questa verità, suppongasi nell'equazione (15) la z infinita, e si avrà in virtù di questa supposizione $u^2 = \frac{z + \sqrt{2z^2}}{z}$, cioè $u^2 = 1 + \sqrt{2}$; dimodochè in questo caso l'abscissa centrale CV (u) diverrà l'abscissa $CH = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$, e l'arco corrispondente all'arco infinito sarà l'arco OH.

LIII.

METODO PER MISURARE GLI ARCHI DI QUELLA ELISSE CONICA,

IL DI CUI ASSE MAGGIORE È MEDIO PROPORZIONALE TRA L'ASSE MINORE, E IL DOPPIO DEL MEDESIMO ASSE MINORE.

Teorema I. — Sieno l'infrascritte equazioni (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), e (9); io dico, che posta la prima di esse tutte l'altre sussistono.

$$u^2 = \frac{\sqrt{2}}{z^2}\sqrt{1 \pm \sqrt{1-z^4}} - \frac{1}{z^2}(1 \pm \sqrt{1-z^4}) \tag{1}$$

$$\frac{1}{z^2}(1 \pm \sqrt{1-z^4}) = \frac{1-u^4}{2u^2} \tag{2}$$

$$\frac{1}{z^2}(1 \mp \sqrt{1-z^4}) = \frac{2u^2}{1-u^4} \tag{3}$$

$$z = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4} \tag{4}$$

$$\sqrt{1-z^4} = \pm\frac{1-6u^4+u^8}{(1+u^4)^2} \tag{5}$$

$$1 \pm \sqrt{1-z^4} = \frac{2(1-u^4)^2}{(1+u^4)^2} \tag{6}$$

$$\frac{1}{z}(1 \pm \sqrt{1-z^4}) = \frac{(1-u^4)\sqrt{1-u^4}}{u(1+u^4)} \tag{7}$$

$$\frac{1}{z}(1 \mp \sqrt{1-z^4}) = \frac{4u^3}{(1+u^4)\sqrt{1-u^4}} \tag{8}$$

$$u^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 \mp \sqrt{1-z^4}}} - \frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{1-z^4}}}{\sqrt{1 \mp \sqrt{1-z^4}}} \tag{9}$$

Dimostrazione della prima parte.

Trasponendo nell'equazione (1) la quantità $\frac{1}{z}(1 \pm \sqrt{1-z^4})$, si à

$$u^2 + \frac{1}{z^2}(1 \pm \sqrt{1-z^4}) = \frac{\sqrt{2}}{z^2}\sqrt{1 \pm \sqrt{1-z^4}},$$

e poi quadrando si ottiene

$$u^4 + \frac{2}{z^2}(1 \pm \sqrt{1-z^4})\,u^2 + \frac{2}{z^4}(1 \pm \sqrt{1-z^4}) - 1 = \frac{2}{z^4}(1 \pm \sqrt{1-z^4}),$$

cioè togliendo dall'una, e l'altra parte la quantità comune $\frac{2}{z^4}(1 \pm \sqrt{1-z^4})$, indi trasponendo, $\frac{2}{z^2}(1 \pm \sqrt{1-z^4})\,u^2 = 1 - u^4$, e dividendo per $2u^2$ si giunge all'equazione (2). E ciò doveva dimostrarsi in primo luogo.

Dimostrazione della seconda parte.

Il calcolo farà conoscere, che $1 \pm \frac{\sqrt{1-z^4}}{z^2} = 1 \mp \frac{z^2}{\sqrt{1-z^4}}$; ponendo pertanto questa seconda espressione in luogo della prima nell'equazione (2), si avrà $1 \mp \frac{z^2}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{1-u^4}{2u^2}$, e rovesciando quest'ultima equazione, si troverà l'equazione (3). E ciò dovea dimostrarsi in secondo luogo.

Dimostrazione della terza parte.

Si aggiungano le due equazioni (2), e (3), e ne verrà

$$\frac{2}{z^2} = \frac{1-u^4}{2u^2} + \frac{2u^2}{1-u^4},$$

cioè, riducendo il secondo membro di quest'equazione ad uno stesso denominatore, $\frac{2}{z^2} = \frac{(1-u^4)^2 + 4u^4}{2u^2(1-u^4)}$, vale a dire $\frac{2}{z^2} = \frac{(1+u^4)^2}{2u^2(1-u^4)}$, e dividendo per 2 quest'ultima equazione, indi rovesciando quella, che ne proviene, si otterrà quest'altra

$$z^2 = \frac{4u^2(1-u^4)}{(1+u^4)^2}. \tag{10}$$

Le radici dei due membri della quale daranno l'equazione (4). E ciò dovea dimostrarsi in terzo luogo.

Scolio I. — Si noti, che l'espressione di z in u esposta nell'equazione (4) conserva sempre la medesima sembianza in ordine ad ambedue i valori di u^2, che sono rappresentati dall'equazione (1) in virtù del segno doppio.

Dimostrazione della quarta parte.

Sottraendo l'equazione (3) dall'equazione (2), abbiamo la seguente $\pm\frac{2}{z^2}\sqrt{1-z^4}=\frac{1-u^4}{2u^2}-\frac{2u^2}{1-u^4}$, e riducendo il secondo membro di questa ad un medesimo denominatore, e poscia dividendo per due, l'uno e l'altro membro della risultante, troviamo $\pm\frac{1}{z^2}\sqrt{1-z^4}=\frac{(1-u^4)^2-4u^4}{4u^2(1-u^4)}$, ma il secondo membro di quest'equazione equivale ad $\frac{1-6u^4+u^8}{4u^2(1-u^4)}$; adunque $\frac{1}{z^2}\sqrt{1-z^4}=\pm\frac{1-6u^4+u^8}{4u^2(1-u^4)}$, e quest'ultima equazione moltiplicata per l'equazione (10), che è registrata nella dimostrazione della terza parte, somministra l'equazione (5). E ciò dovea dimostrarsi in quarto luogo.

Dimostrazione della quinta parte.

Dall'equazione (2) moltiplicata per l'equazione (10) risulta l'equazione (6). Il che dovea dimostrarsi in quinto luogo.

Dimostrazione della sesta parte.

L'equazione (2) moltiplicata per l'equazione (4) conduce all'equazione (7). Il che dovea dimostrarsi in sesto luogo.

Dimostrazione della settima parte.

Moltiplicando l'equazione (3) per l'equazione (4), ne nasce l'equazione (8). Il che dovea dimostrarsi in settimo luogo.

Dimostrazione dell'ottava parte.

Il calcolo fa vedere, che $\frac{1}{z}\sqrt{1\pm\sqrt{1-z^4}}=\frac{z}{\sqrt{1\pm\sqrt{1-z^4}}}$, ma l'equazione (1) equivale a quest'altra

$$u^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{z}\right)\frac{1}{z}\sqrt{1\pm\sqrt{1-z^4}}-\frac{1}{z}\sqrt{1\pm\sqrt{1-z^4}}\times\frac{1}{z}\sqrt{1\pm\sqrt{1-z^4}};$$

adunque ponendo in quest'ultima equazione in luogo dell'espressione $\frac{1}{z}\sqrt{1\pm\sqrt{1-z^4}}$ la sua equivalente $\frac{z}{\sqrt{1\pm\sqrt{1-z^4}}}$, ne risulterà l'equazione (9). E ciò dovea dimostrarsi in ottavo, ed ultimo luogo.

Corollario I. — Se nell'equazione (1), e per conseguenza nell'equazioni (6), e (9) si fa valere nel segno doppio il segno *superiore;* io dico, che quando la z è uguale a zero, anche la u è uguale a zero. Ciò si dimostra annullando z nell'equazione (6), mentre allora si à $2=2\frac{(1-u^4)}{(1+u^4)^2}$; adunque nel caso di $z=0$, anche $u=0$.

Si dimostra lo stesso annullando z nell'equazione (9), poichè da quest'ipotesi nasce $u^2=\frac{\sqrt{2}}{0}-\frac{\sqrt{2}}{0}$, ma un infinito meno lo stesso infinito è uguale a zero; adunque nella supposizione di $z=0$, ancora $u=0$. La stessa cosa si mostra mediante l'equazione (1).

Corollario II. — Se nell'equazione (1), e conseguentemente nell'equazione (6), e (9) si fa valere nel segno doppio il segno *inferiore*; io dico, che quando z è uguale a zero, u è uguale all'unità. Questo si mostrerà annientando z nell'equazione (6), che in tal caso darà $0=\frac{(1-u^4)^2}{(1+u^4)}$; adunque in questo medesimo caso $u=1$.

La medesima cosa si mostrerà mediante l'equazione (9), la quale supponendo z eguale a zero, si cangia nella seguente $u^2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; adunque in questa supposizione $u=1$

Corollario III. — Se nell'equazione (1), e per conseguenza nell'equazione (6) in vece del segno doppio si prende il *superiore*; io dico, che la massima u è uguale a $\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

Imperciocchè considerando l'equazione (6), e prendendo in essa il segno superiore, si vedrà, che il suo secondo membro, vale a dire $2\frac{(1-u^4)^2}{(1+u^4)^2}$ *decresce* al crescere della u, la quale è la stessa colla u dell'equazione (1); adunque quando la quantità $2\,\frac{(1-u^4)^2}{(1+u^4)^2}$ è un *minimo*, allora la u è un *massimo*.

Ciò posto, si rifletta, che il primo membro della medesima equazione (6), cioè $1+\sqrt{1-z^4}$ è un *minimo*, quando $\sqrt{1-z^4}$ è uguale a zero; adunque allorchè $\sqrt{1-z^4}=0$ (cioè quando $z=1$) la quantità $2\frac{(1-u^4)^2}{(1-u^4)^2}$, ch'è uguale ad $1+\sqrt{1-u^4}$ sarà un *minimo*, e conseguentemente per la riflessione fatta di sopra nel caso di $\sqrt{1-z^4}=0$, la u sarà un *massimo*, ma facendo $\sqrt{1-z^4}=0$, l'equazione (9) diviene $u^2=\sqrt{2}-1$, donde nasce $u=\sqrt{\sqrt{2}-1}$; adunque se nel segno doppio dell'equazione (1) vale il superiore, la massima u è uguale a $\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

Corollario IV. — Se nell'equazione (1), e conseguentemente nell'equazione (6) invece del segno doppio si prende l'*inferiore*; io dico che la minima u è uguale a $\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

Poichè se si considera l'equazione (6), e si prende in essa il segno inferiore si renderà manifesto, che il suo secondo membro $2\frac{(1-u^4)^2}{(1+u^4)^2}$ *cresce* al decrescere della u, la quale è la stessa, che la u dell'equazione (1); dimodochè, quando la quantità $2\frac{(1-u^4)^2}{(1+u^4)^2}$ è un *massimo*, allora la u è un *minimo*.

Riflettasi pertanto, che il primo membro della stessa equazione (6), cioè $1-\sqrt{1-z^4}$ è un *massimo*, quando $\sqrt{1-z^4}$ è zero, e quindi sarà chiaro, che quando $\sqrt{1-z^4}=0$, cioè allorchè $z=1$, la quantità $2\frac{(1-u^4)^2}{(1+u^4)^2}$, ch'è uguale ad $1-\sqrt{1-z^4}$ dev'essere un *massimo*; adunque per ciò, che si è considerato di sopra, nella supposizione di $\sqrt{1-z^4}=0$ la u dovrà essere un *minimo*, ma supponendo $\sqrt{1-z^4}=0$, l'equazione (1) diventa

$u^2 = \sqrt{2} - 1$, cioè si à $u = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$; adunque se nel segno doppio dell'equazione (1) si fa valere l' inferiore, la minima u è uguale a $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

Corollario V. — Se nel segno doppio dell'equazione (1), e conseguentemente dell'equazione (6), vale il *superiore*, la minima u è uguale a zero.

Imperciocchè il secondo membro dell'equazione (6) *cresce* al decrescere di u, ma lo stesso secondo membro *cresce* al decrescere di z; adunque al decremento di z corrisponde il decremento di u, e quindi alla *minima* z corrisponde la *minima* u; ma la minima z è uguale a zero, e pel corollario I, alla $z = 0$ corrisponde la $u = 0$; adunque nella supposizione di questo corollario la *minima* u è uguale a zero.

Corollario VI. — Se nel segno doppio dell'equazione (1), e conseguentemente dell'equazione (6) vale l'*inferiore*, la massima u è uguale all'unità. Imperciocchè il secondo membro dell'equazione (6) *cresce* al decrescere di u, e il medesimo secondo membro *decresce* al decrescere di z, di maniera che al *decremento* di z corrisponde l'*aumento* di u, e per conseguenza alla *minima* z corrisponde la *massima* u, ma la minima z è uguale a zero, e pel corollario II alla $z = 0$ corrisponde la $u = 1$; adunque nell'ipotesi del corollario presente la massima u è uguale all'unità.

Scolio II. — Egli è evidente, che la massima z è uguale all'unità in ambedue i casi rappresentati dal segno doppio nell'equazione (1); poichè se la z fosse maggiore dell'unità, la quantità $\sqrt{1 - z^4}$, che in ambedue i suddetti casi entra nell'equazione (1) sarebbe immaginaria.

Teorema II. — Sieno la retroscritta equazione (1), e l'infrascritta equazione; io dico, che posta quella, sussiste questa

$$\frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}} = \pm \frac{2\,du}{\sqrt{1 - u^4}}. \tag{11}$$

Dimostrazione. — Posta l'equazione (1) sussiste l'equazione (4) per la terza parte del I teorema, e l'equazione (4) differenziata produce

$$dz = 2\frac{du\sqrt{1 - u^4}}{1 + u^4} - \frac{4u^4\,du}{(1 + u^4)\sqrt{1 - u^4}} - \frac{8u^4\sqrt{1 - u^4}}{(1 + u^4)^2}$$

riducendo il secondo membro di quest'equazione a uno stesso denominatore, dopo fatte le debite operazioni ne viene quest'altra

$$dz = \frac{2du}{\sqrt{1-u^4}} \times \frac{1-6u^4+u^8}{(1+u^4)^2},$$

la quale divisa per l'equazione (5) dà l'equazione (11); adunque posta l'equazione (1), sussiste l'equazione (11). Il che dovea dimostrarsi.

Scolio III. — Questo teorema comprende i teoremi V e VI del mio II schediasma in ordine alla misura della lemniscata, i quali teoremi V e VI sono nel presente un poco differentemente enunciati, e diversamente dimostrati.

Teorema III. — Sieno l'equazione retroscritta (1), e l'infrascritta equazione (12). Io dico, che posta quella, sussiste questa

$$(12)\quad \int \frac{dz\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}} - 2\int \pm \frac{du\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}} = \mp\frac{1}{z}(1\pm\sqrt{1-z^4}) \pm \frac{1}{u}\sqrt{1+u^4}.$$

Dimostrazione. — Si moltiplichi l'equazione (11) del teorema II per l'equazione (2) del teorema I, e si troverà

$$\frac{dz}{z^2\sqrt{1-z^4}} \pm \frac{dz}{z^2} = \pm\frac{du}{u^2}\sqrt{1-u^4},$$

cioè

$$(13)\qquad \frac{dz}{z^2\sqrt{1-z^4}} + \text{diff.}\mp\frac{1}{z} = \pm\frac{du}{u^2}\sqrt{1+u^4}.$$

Ma
$$\frac{dz}{z^2\sqrt{1-z^4}} = \text{diff.} -\frac{1}{z}\sqrt{1-z^4} - \frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^4}},$$

e
$$\pm\frac{du}{u^2}\sqrt{1-u^4} = \text{diff.}\mp\frac{1}{u}\sqrt{1-u^4}\mp\frac{2u^2du}{\sqrt{1-u^4}},$$

conforme si vede differenziando i secondi membri di queste due ultime equazioni; adunque surrogando nell' equazione (13) questi valori di $\frac{dz}{z^2\sqrt{1-z^4}}$, e di $\pm\frac{du}{u^2}\sqrt{1-u^4}$ si giungerà alla seguente

$$\text{diff.} -\frac{1}{2}\sqrt{1-z^4} - \frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^4}} + \text{diff.}\mp\frac{1}{z} = \text{diff.}\mp\frac{1}{u}\sqrt{1-u^4}\mp\frac{2u^2du}{\sqrt{1-u^4}}$$

e trasponendo si troverà, purchè si operi destramente

$$(14)\quad \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^4}} \mp \frac{2u^2\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \mp \text{diff.}\,\frac{1}{z}(1 \mp \sqrt{1-z^4}) \pm \text{diff.}\,\frac{1}{u}\sqrt{1-u^4}.$$

Si consideri ora che posta l'equazione (1), si à pel II teorema

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \pm \frac{2\,du}{\sqrt{1-u^4}},$$

cioè

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} \mp \frac{2\,du}{\sqrt{1-u^4}} = 0.$$

Se quest'ultima equazione si aggiunge all'equazione (14), e ad essa si adatta, si otterrà debitamente operando

$$(15)\quad \frac{dz\,(1+z^2)}{\sqrt{1-z^4}} \mp \frac{2\,du\,(1+u^2)}{\sqrt{1-u^4}} = \mp \text{diff.}\,\frac{1}{z}\,(1 \pm \sqrt{1-z^4}) \pm \text{diff.}\,\frac{1}{u}\,\sqrt{1-z^4}.$$

Scrivansi nell'equazione (15) in vece delle due espressioni $\frac{dz(1+z^2)}{\sqrt{1-z^4}}$, e $\frac{du\,(1+u^2)}{\sqrt{1-u^4}}$, l'altre due espressioni $\frac{dz\,\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}}$ e $\frac{du\,\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}}$ ad esse rispettivamente eguali, e si troverà quest'altra equazione

$$\frac{dz\,\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}} \mp 2\,du\,\frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}} = \mp \text{diff.}\,\frac{1}{z}\,(1 \pm \sqrt{1-z^2}) \pm \text{diff.}\,\frac{\sqrt{1-z^4}}{\sqrt{1-u^4}}$$

la quale integrata darà l'equazione (12). Adunque posta l'equazione (1), sussiste l'equazione (12).

Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I. — Ponendo nel secondo membro dell'equazione (12) in cambio di $\frac{1}{z}(1 \pm \sqrt{1-z^4})$ l'espressione $\frac{(1-u^4)\sqrt{1-u^4}}{u(1+u^4)}$, che gli equivale in virtù dell'equazione (7) del I teorema, il secondo membro suddetto dell'equazione (12) diviene $\mp\frac{(1-u^4)\,\sqrt{1-u^4}}{u(1+u^4)} \pm \frac{1}{u}\,\sqrt{1-u^4}$, ma questa quantità ridotta ad un medesimo denominatore, e maneggiata nel debito modo è uguale a quest'altra $\pm\frac{2u^3\,\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$; adunque sosti-

tuendo nell'equazione (12) queto valore del suo secondo membro, si vede, che posta l'equazione (1), sussiste la seguente

$$\int \frac{dz\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}} - 2\int \pm \frac{du\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}} = \pm \frac{2u^3\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}. \tag{16}$$

Corollario II. — Surrogando nel secondo membro dell'equazione (16) in luogo di $\frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$ la z, che gli equivale in vigore dell'equazione (4) del I teorema, si vedrà, che posta l'equazione (1), sussiste quest'altra

$$\int \frac{dz\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}} - 2\int \pm du \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}} = \pm zu^2. \tag{17}$$

Corollario III. — Separando nell'equazioni (12), (16), e (17) i casi, che nascono dal segno doppio, e lasciando sì in esse, come nell'equazione (1) alla lettera u il suo significato, allorchè si fa valere il segno *superiore*, ma ponendo in esse la lettera t in vece di u, allorchè si fa valere il segno *inferiore*, si renderà manifesto, che dalle medesime equazioni (12), (16), e (17) risulteranno le sei equazioni infrascritte (18), (19), (20), (21), (22), e (23).

$$\int \frac{dz\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}} - 2\int \frac{du\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{u}\sqrt{1-u^4} - \frac{1}{z}(1+\sqrt{1-z^4}) \tag{18}$$

$$\int \frac{dz\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}} - 2\int \frac{dt\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{z}(1-\sqrt{1-z^4}) - \frac{1}{t}\sqrt{1-t^4} \tag{19}$$

$$\int \frac{dz\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}} - 2\int \frac{du\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2u^3\sqrt{1-u^4}}{1+u^4} \tag{20}$$

$$\int \frac{dz\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}} - 2\int - \frac{dt\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}} = - \frac{2t^3\sqrt{1-t^4}}{\sqrt{1+t^4}} \tag{21}$$

$$\int \frac{dz\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}} - 2\int \frac{du\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}} = zu^2 \tag{22}$$

$$\int \frac{dz\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}} - 2\int \frac{dt\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}} = -zt^2. \tag{23}$$

In modo, che l'equazioni (18), (20), e (22) sussistono, posta quest'equazione

$$(24) \qquad u^2 = \frac{\sqrt{2}}{z^2}\sqrt{1+\sqrt{1+z^4}} - \frac{1}{z^2}(1+\sqrt{1-z^4})$$

e l'equazioni (19), (21), e (23) sussistono posta quest'altra equazione

$$(25) \qquad t^2 = \frac{\sqrt{2}}{z^2}\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}} - \frac{1}{z^2}(1-\sqrt{1-z^4}).$$

Scolio IV. — Si noti primieramente, che l'equazioni (24), e (25) rappresentano separatamente i due casi, che in se racchiude l'equazione (1) del I teorema in virtù del segno doppio, che in essa à luogo. Si noti secondariamente, che posta l'equazione (24) si à

$$(26) \qquad z = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$$

e posta l'equazione (25) si à

$$(27) \qquad z = \frac{2t\sqrt{1-t^4}}{1+t^4}.$$

Tutto questo in vigore dell'equazione (4) del I teorema.

Si noti in terzo luogo, che posta l'equazione (24) sussiste questa

$$(28) \qquad \sqrt{1-z^4} = \frac{1-6u^4+u^8}{(1+u^4)^2}$$

e posta l'equazione (25) sussiste quest'altra

$$(29) \qquad \sqrt{1-z^4} = -\frac{1-6t^4+t^8}{(1+t^4)^2}.$$

Tutto ciò in virtù dell'equazione (5) del I teorema.

Problema. — Poste le due equazioni soprascritte (24), e (25), trovare il valore di u in t, e il valore t in u.

Soluzione della prima parte.

Se nella quantità $\frac{1}{z^2}\sqrt{1+\sqrt{1-z^4}}$ si sostituirà il valore di $\sqrt{1-z^4}$ in t tratto dall'equazione (29), e il valore di z^2 in t tratto dall'equazione (27) si scoprirà $\frac{1}{z^2}\sqrt{1+\sqrt{1-z^4}}=\sqrt{1-\frac{1-6t^4+t^8}{(1+t^4)^2}:4t^2\frac{(1+t^4)^2}{(1-t^4)}}$, ma il secondo membro di quest'equazione destramente trattato riducesi a questa espressione $\frac{1+t^4}{\sqrt{2}(1-t^4)}$; adunque si à

$$(30)\qquad \frac{1}{z^2}\sqrt{1+\sqrt{1-z^4}}=\frac{1+t^4}{\sqrt{2}\,(1-t^4)}.$$

In oltre, se nella quantità $\frac{1}{z^2}(1+\sqrt{1-z^4})$ si surrogano i valori di $\sqrt{1-z^4}$, e di z^2 presi, come sopra dalle rispettive equazioni (29), e (27), si conosce essere $\frac{1}{z^2}(1+\sqrt{1-z^4})=1-\frac{1-6t^4+t^8}{(1+t^4)^2}:4t^2\frac{(1-t^4)}{(1+t^4)^2}$, e sic- come il secondo membro, di quest'equazione maneggiato a dovere si cangia in quest'espressione $\frac{2t^2}{1-t^4}$, così à luogo l'equazione seguente

$$(31)\qquad \frac{1}{z^2}(1+\sqrt{1-z^4})=\frac{2t^2}{1-t^4}.$$

Si pongano ora nell'equazione (24) in cambio di $\frac{1}{z^2}\sqrt{1+\sqrt{1-z^4}}$, e di $\frac{1}{z^2}(1+\sqrt{1-z^4})$ i loro valori dedotti dalle rispettive equazioni (30), e (31), e si avrà $u^2=\frac{1+t^4}{1-t^4}-\frac{2t^2}{1-t^4}$; ma il secondo membro di quest'equazione equivale ad $\frac{(1-t^2)^2}{1-t^4}$, cioè ad $\frac{1-t^2}{1+t^2}$; adunque $u^2=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, donde nasce finalmente

$$(32)\qquad u=\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1+t^2}}.$$

E questa è la soluzione della prima parte.

Soluzione della seconda parte.

Per isciogliere la seconda parte del problema si seguiranno i medesimi vestigj della soluzione della prima parte, e in vece dell'equazioni (24), (27), e (29) si adopreranno le rispettive equazioni (25), (26), e (28), in virtù delle quali si troverà similmente $\frac{1}{z^2}\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}}=\frac{1+u^4}{\sqrt{2(1-u^4)}}$, e $\frac{1}{z^2}(1-\sqrt{1-z^4})=\frac{2u^2}{1-u^4}$, e surrogando i secondi membri di queste due ultime equazioni in luogo de' primi nell'equazione (25) si troverà $t^2=\frac{1+u^4}{1-u^4}-\frac{2u^2}{1-u^4}$, cioè $t^2=\frac{(1-u^2)^2}{1-u^4}=\frac{1-u^2}{1+u^2}$; e in fine

$$t=\frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1+u^2}}. \tag{33}$$

Dimodochè la t è data per u, come la u per t.

La medesima equazione (33) può dedursi immediatamente, e con facilità dall'equazione (32). E questa è la soluzione della seconda parte del problema.

Corollario I. — L'equazione (32) à rapporto all'equazione (24), e l'equazione (33) à rapporto all'equazione (25); adunque inerendo a ciò, che si è notato nel primo articolo dello scolio IV l'equazioni (32), e (33) esprimono separatamente i due casi, che l'equazione (1) del I teorema comprende in se medesima in virtù del suo doppio segno.

Corollario II. — Posta una delle due equazioni (32), e (33) io dico, che sussiste l'equazione infrascritta

$$\int -dt\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}}-\int du\frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}}=t^3\frac{\sqrt{1-t^4}}{1+t^4}+u^3\frac{\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}. \tag{34}$$

I. Imperciocchè poste le due equazioni (24), e (25) sussistono le due equazioni (20), e (21) pel corollario III del teorema III, ma sottraendo l'equazione (21) dall'equazione (20), e dividendo per 2 quella, che ne proviene, si trova l'equazione (34); adunque poste le due equazioni (24), e (25) sussiste l'equazione (34).

II. In oltre pel I corollario antecedente, l'equazione (32) à rapporto all'equazione (24), e l'equazione (33) à rapporto all'equazione (25); adunque poste le due equazioni (32), e (33) sussiste l'equazione (34) pel primo articolo di questo corollario.

III. In fine si dimostra agevolmente col calcolo, che, posta l'equazione (32), sussiste l'equazione (33), e versa-vice, posta l'equazione (33), sussiste l'equazione (32); adunque posta una delle due equazioni (32), e (33), sono poste ambedue, e conseguentemente pel secondo articolo del presente corollario, posta una delle due equazioni (32), e (33), sussiste l'equazione (34).

Il che dovea dimostrarsi.

Corollario III. — Posta una delle due equazioni (32), e (33); io dico, che sussiste quest'altra

$$\int -dt\,\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}} - \int du\,\frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}} = ut \cdot \tag{35}$$

Imperciocchè, se nel secondo membro dell'equazione (34) si sostituisce $\frac{1}{2}z$ in luogo di $u\,\frac{\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$, e parimente $\frac{1}{2}z$ in cambio di $t\,\frac{\sqrt{1-t^4}}{1+t^4}$ (mentre le due equazioni (26), e (27), registrate nel IV scolio, permettono queste sostituzioni), si vedrà essere il secondo membro dell'equazione (34), cioè la quantità $t^3\,\frac{\sqrt{1-t^4}}{1+t^4} + u^3\,\frac{\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$ eguale all'espressione $\frac{1}{2}z\,(t^2+u^2)$; ma ponendo in vece di z, e di t^2 i loro valori in u presi dall'equazioni rispettive (26), e (33), e operando nella dovuta maniera sarà $\frac{1}{2}z\,(t^2+u^2) = u\,\frac{\sqrt{1-u^4}}{1+u^2} = u\,\frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1+u^2}}$, e surrogando in cambio di $\frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1+u^2}}$ il suo valore t tratto dall'equazione (33), sarà eziandio $\frac{1}{2}z(t^2+u^2)$, cioè $t^3\,\frac{\sqrt{1-t^4}}{1+t^4} + u^3\,\frac{\sqrt{1-u^4}}{1+u^4} = ut$; pongasi pertanto nella equazione (34) ut in luogo del secondo membro di essa, e ne verrà la equazione (35).

Il che dovea dimostrarsi.

Se nell'espressione $\frac{1}{2}z\,(t^2+u^2)$ si fossero sostituiti in vece di z, e di u^2 i loro valori in t tratti dall'equazioni rispettive (27), e (32), si sarebbe similmente trovato $\frac{1}{2}z\,(t^2+u^2)=tu$.

Corollario IV. — Se nell'equazione (35) in luogo di dt, t^2, t si sostituirà rispettivamente du, u^2, u, e versa-vice in luogo di du, u^2, u, si surrogherà dt, t^2, t, ne risulterà l'equazione seguente (36), la quale sussiste, posta una delle due equazioni (32), e (33)

$$(36)\qquad \int -du\,\frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}} - \int dt\,\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}} = tu\,.$$

Imperciocchè i secondi membri di ambedue l'equazioni (35), e (36) sono manifestamente eguali; e differenziando i primi membri delle suddette due equazioni (35), e (36), si vede, che i loro differenziali sono eguali; adunque *integrando*, anche i primi membri delle medesime equazioni sono eguali, e conseguentemente l'equazione (36) sussiste, posta una delle due equazioni (32), e (33), poichè posta una di queste medesime equazioni (32), e (33), si è dimostrato sussistere l'equazione (35) nel precedente corollario.

Scolio V. — Nell'integrazione di questo corollario, e in tutte l'integrali *astratte*, che ò date, e darò in questo scritto, ò tralasciato, e tralascerò l'aggiunta della costante *astratta*, riserbandomi di mostrare nell'applicazione di questa teoria alla mia *Elisse*, che le integrazioni suddette sono complete, e che per conseguenza non abbisognano dell'aggiunta di veruna costante.

Teorema IV. — Sia la retroscritta equazione (1), e l'infrascritta equazione (37); io dico, che posta quella sussiste questa

$$(37)\ \int dz\,\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}} - 2\int \pm du\,\frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}} = \pm\frac{1}{z}(1\pm\sqrt{1-z^4}) \pm \frac{2u^3}{\sqrt{1-u^4}}.$$

DIMOSTRAZIONE. — Moltiplicando l'equazione (11) del teorema II per l'equazione (3) del teorema I si vede

$$\frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^4}} \mp \frac{dz}{z^2} = \pm \frac{4u^2\,du}{(1-u^4)\sqrt{1-u^4}},$$

cioè

$$\text{(38)} \qquad \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^4}} + \text{diff.} \mp \frac{1}{z} = \pm \frac{4u^2\,du}{(1-u^4)\sqrt{1-u^4}}$$

ed essendo

$$\frac{dz}{z^2\sqrt{1-z^4}} = \text{diff.} - \frac{1}{z}\sqrt{1-z^4} - \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^4}};$$

e

$$\mp \frac{4u^2\,du}{(1-u^4)\sqrt{1-u^4}} = \text{diff.} \mp \frac{2u^3}{\sqrt{1-u^4}} \mp \frac{2u^2\,du}{\sqrt{1-u^4}},$$

conforme mostrerà la differenziazione, ne segue, che se si pongono nell'equazione (38) i suddetti valori di $\frac{dz}{z^2\sqrt{1-z^4}}$, e di $\pm \frac{4u^2\,du}{(1-u^4)\sqrt{1-u^4}}$ si avrà

$$\text{diff.} - \frac{1}{z}\sqrt{1-z^4} - \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^4}} + \text{diff.} \pm \frac{1}{z} = \text{diff.} \pm \frac{2u^3}{\sqrt{1-u^4}} \mp \frac{2u^2\,du}{\sqrt{1-u^4}}$$

laonde trasponendo, e calcolando con destrezza, si vedrà essere

$$\text{(39)} \qquad \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^4}} \mp \frac{2u^2\,du}{\sqrt{1-u^4}} = \mp \text{diff.} \frac{1}{z}(1 \mp \sqrt{1-z^4}) \mp \text{diff.} \frac{2u^3}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Ciò posto convien riflettere, che in virtù del II teorema abbiamo $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \pm \frac{2\,du}{\sqrt{1-u^4}}$, vale a dire $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} \mp \frac{2\,du}{\sqrt{1-u^4}} = 0$ dimodochè quest'ultima equazione aggiunta, e adattata all'equazione (39) somministra dopo fatte le dovute operazioni

$$\text{(40)} \quad \frac{dz\,(1+z^2)}{\sqrt{1-z^4}} \mp 2du\,\frac{(1+u^2)}{\sqrt{1-u^4}} = \pm \text{diff.} \frac{1}{z}(1 \mp \sqrt{1-z^4}) \mp \text{diff.} \frac{2u^3}{\sqrt{1-u^4}}.$$

In cambio delle due espressioni $dz\frac{1+z^2}{\sqrt{1-z^4}}$, e $du\frac{1+u^2}{\sqrt{1+u^4}}$ si scrivano respettivamente nell'equazione (40) quest'altre due espressioni $dz\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}}$, e $du\frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}}$, che sono ad esse eguali, e la medesima equazione (40) prenderà quest'aspetto

$$dz\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}} \mp 2du\frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}} = \pm \text{ diff.} \frac{1}{z}(1 \pm \sqrt{1-z^4}) \mp \text{ diff.} \frac{2u^3}{\sqrt{1-u^4}} \cdot$$

Ma da quest'ultima equazione integrata nasce l'equazione (37); adunque posta l'equazione (1), sussiste l'equazione (37). Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I. — Si sostituisca nell'equazione (37) invece di $\frac{1}{z}(1 \mp \sqrt{1-z^4})$ l'espressione $\frac{4u^3}{(1+u^4)\sqrt{1-u^4}}$ ad essa eguale per l'equazione (8), il secondo membro della stessa equazione (37) diverrà $\pm \frac{4u^3}{(1+u^4)\sqrt{1-u^4}} \mp \frac{2u^3}{\sqrt{1-u^4}}$, quantità, che ridotta ad un medesimo denominatore, e maneggiata con destrezza, equivale a $\mp \frac{2u^3\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$, e quindi surrogando nell'equazione (37) questo valore del suo secondo membro, si vede risultar di nuovo l'equazione (16) del I corollario del III teorema, supposta la sussistenza dell'equazione (1).

Corollario II. — Operando, come si è fatto nel corollario II del III teorema, si giungerà di nuovo all'equazione (17) dello stesso corollario II del teorema III, supposta la sussistenza dell'equazione (1).

Corollario III. — Similmente operando, come si è fatto nel corollario III del III teorema, e facendo le medesime denominazioni, si troveranno di nuovo l'equazioni (20), (21), (22), e (23), dello stesso corollario III del teorema III, supposta la sussistenza dell'equazione (1).

Corollario IV. — Adunque si troveranno anche l'equazioni (34), (35), e (36) de'corollarj II, III, e IV del problema indipendentemente

dal teorema III, purchè si proceda come si è fatto ne' suddetti corollarj del problema.

Corollario V. — Separando nell'equazioni (1), e (37) i casi, che nascono dal segno doppio, e lasciando nelle medesime equazioni alla lettera u il suo significato, quando si fa valere il segno *superiore*, ma ponendo in esse la lettera t in cambio di u, quando si fa valere il segno *inferiore*; dall'equazione (1) verranno le due equazioni (24) e (25), come appunto nel corollario III del III teorema, e in virtù del teorema presente si conoscerà, che posta l'equazione (24) sussiste quella che segue

$$(41)\qquad \int \frac{dz\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}} - 2\int \frac{du\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{z}(1-\sqrt{1-z^4}) - \frac{2u^3}{\sqrt{1-u^4}}$$

e che posta l'equazione (25), sussiste l'infrascritta

$$(42)\qquad \int \frac{dz\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}} - 2\int - \frac{dt\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2t^3}{\sqrt{1-t^4}} - \frac{1}{z}(1+\sqrt{1-z^4})\,.$$

Corollario VI. — Sottraggasi ora l'equazione (19) del corollario III del III teorema dall'equazione (41) del corollario precedente, indi si divida per 2 l'equazione, che ne deriva, e si avrà la seguente

$$(43)\qquad \int -dt\,\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}} - \int du\,\frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2t}\sqrt{1-t^4} - \frac{u^3}{\sqrt{1-u^4}}\,.$$

Sottraggasi in oltre l'equazione (42) dell'antecedente corollario dall'equazione (18) del corollario III del III teorema, dividasi poscia per 2 l'equazione, che ne viene, e si troverà quest'altra

$$(44)\qquad \int -dt\,\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}} - \int du\,\frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2u}\sqrt{1-u^4} - \frac{t^3}{\sqrt{1-t^4}}\,.$$

Ciò fatto, si consideri, che ciascuna delle due equazioni (43), e (44) sussiste supposta la sussistenza delle due equazioni (24), e (25), le quali sono rappresentate respettivamente dalle due equazioni (32), e (33) del problema, a tenore del corollario I di esso problema; adunque razioci-

nando, come si è fatto nel corollario II del problema medesimo, si dimostrerà, che posta ciascuna delle due equazioni (32), e (33) sussiste l'equazione (43), e sussiste l'equazione (44).

Corollario VII. — Se nella quantità $\frac{1}{2t}\sqrt{1-t^4}$, che entra nel secondo membro dell'equazione (43), si porrà in luogo di t il suo valore in u desunto dall'equazione (33) del problema, si avrà

$$\frac{1}{2t}\sqrt{1-t^4}=\frac{u\sqrt{1+u^2}}{(1+u^2)\sqrt{1-u^2}}=\frac{u}{\sqrt{1-u^4}};$$

cosicchè sostituendo nel secondo membro dell'equazione (43) invece di $\frac{1}{2t}\sqrt{1-t^4}$ il suo valore $\frac{u}{\sqrt{1-u^4}}$, lo stesso secondo membro sarà

$$\frac{u}{\sqrt{1-u^4}}-\frac{u^3}{\sqrt{1-u^4}}=u\frac{1-u^2}{\sqrt{1-u^4}}=u\frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1+u^2}}=ut,$$

e la suddetta equazione (43) si muterà nell'equazione (35) del corollario III del problema.

Anche l'equazione (44) si cangia nella medesima equazione (35), se nella quantità $\frac{1}{2u}\sqrt{1-u^4}$, che entra nel secondo membro dell'equazione (44) si pone in vece di u il suo valore in t preso dall'equazione (32) del problema, mentre da questa sostituzione si dedurrà similmente $\frac{1}{2u}\sqrt{1-u^4}=t\frac{\sqrt{1+t^2}}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}=\frac{t}{\sqrt{1-t^4}}$, e questo valore di $\frac{1}{2u}\sqrt{1-u^4}$ surrogato nel secondo membro dell'equazione (44) farà, che lo stesso membro divenga $\frac{t}{\sqrt{1-t^4}}-\frac{t^3}{\sqrt{1-t^4}}=t\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^4}}=t\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1+t^2}}=tu.$

Scolio VI. — L'equazione (35) del corollario III del problema, che è trovata col presente metodo in quattro differenti maniere, nasce ancora da un altro mio metodo inserto nel presente volume pag. 288-9. Questo consenso di verità mostra vieppiù la giustezza de' medesimi metodi, e fa conoscere sensibilmente la fecondità dell'Analisi.

Applicazione di questa teoria alla mia elisse (fig. 66).

Supposizioni. — Sia come in questa figura l'elisse conica $ABED$, il di cui semiasse minore $CE = 1$, e il semiasse maggiore $CB = \sqrt{2}$; l'abscisse indeterminate CV, CZ, CT, che ànno origine dal centro C, si chiamino respettivamente u, z, t; è noto agl'intendenti del calcolo infinitesimale, che l'arco diretto BL corrisponde all'abscissa $CV\,(u)$ à per sua espressione $\int du \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}}$, che l'altro arco diretto BI corrispondente all'abscissa $CZ\,(z)$ si esprime in questa guisa $\int dz \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}}$, e che l'arco inverso ES corrispondente all'abscissa $CT\,(t)$ equivale a quest'espressione $\int -dt \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}}$.

Dimodochè tirando la retta LN parallela all'asse minore, la quale taglia in N il quadrante AB dell'elisse, e prolungando l'ordinata ST finchè tagli in M il quadrante ED, l'arco LBN, ch'è uguale al doppio dell'arco diretto BL dovrà esprimersi in questa guisa $2\int du \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}}$, e l'arco SEM, ch'è uguale al doppio dell'arco inverso ES, si denoterà così $2\int -dt \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}}$.

È parimente noto, che l'arco *diretto* BS corrispondente all'abscissa $CT\,(t)$ à per sua espressione $\int dt \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}}$, e che l'arco *inverso* EL corrispondente all'abscissa $CV\,(u)$ si denota in questo modo $\int -du \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}}$.

Premesse queste supposizioni appartenenti alla geometria interiore, passo a misurare gli archi della mia elisse nelle tre seguenti maniere.

Prima misura.

Nell'elisse $ABED$ prendasi l'abscissa CV eguale al valore di u tratto dall'equazione (24), e l'abscissa CZ eguale al valore di z espresso nell'equazione (26); si ponga nell'equazione (20) e (22) l'arco BI in luogo

di $\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}}$, e l'arco LBN in luogo di $2\int du\frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}}$; le suddette equazioni (20) e (22) diverranno respettivamente le due seguenti

$$\text{(45)}\qquad \text{Arc. } BI - \text{arc. } LBN = 2u^3\frac{\sqrt{1-u^4}}{\sqrt{1+u^4}}$$

$$\text{(46)}\qquad \text{Arc. } BI - \text{arc. } LBN = zu^2.$$

SCOLIO VII. — I. Quando l'abscissa $CZ(z)$ è nulla, si annulla anche l'abscissa $CV(u)$, e ciò pel corollario I del I teorema; laonde se l'arco BI è nullo, anche l'arco LBN sarà nullo, come pure ambedue i secondi membri dell'equazioni (45), e (46), le quali in conseguenza sono complete.

II. La *maggiore* delle abscisse CV rappresentate colla lettera u corrisponde all'abscissa $CZ(z) = 1$, e allora il punto Z cade in E e l'abscissa CZ diviene il semiasse minore; in questo medesimo caso il punto V cade in K, in modo che l'abscissa *massima* CK è uguale a $\sqrt{\sqrt{2}-1}$; questo pel corollario III del I teorema.

III. Una delle due abscisse $CZ(z)$, ovvero $CV(u)$ può essere arbitraria, purchè la CV non superi la CK.

Seconda misura.

Nell'elisse $ABED$ facciasi l'abscissa CT eguale al valore di t desunto dall'equazione (25), e l'abscissa CZ eguale al valore di z rappresentato nell'equazione (27); s'introducano nell'equazioni (21), e (23) l'arco BI in vece di $dz\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}}$, e l'arco SEM in vece di $2\int -dt\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}}$ le medesime equazioni (21), e (23) si muteranno nelle due respettive, che seguono

$$\text{(47)}\qquad \text{Arc. } BI - \text{arc. } SEM = -2t^3\frac{\sqrt{1-t^4}}{1+t^4}$$

$$\text{(48)}\qquad \text{Arc. } BI - \text{arc. } SEM = -zt^2.$$

SCOLIO VIII. — I. Quando l'abscissa $CZ(z) = 0$, l'abscissa $Ct(t) = 1$ pel corollario II del I teorema, e perciò se l'arco BI è nullo, sono parimente nulli in tal caso i secondi membri delle due equazioni (47), e (48), e conseguentemente queste sono complete.

II. La *minore* dell'abscisse CT espresse colla lettera t corrisponde all'abscissa $CZ(z) = 1$, e allora il punto Z cade in E; in questo istesso caso il punto T cade in K in maniera, che l'abscissa *minima* CK è uguale a $\sqrt{\sqrt{2}-1}$; e ciò pel corollario IV del I teorema.

III. Una delle due abscisse $CZ(z)$ e $CT(t)$ può essere arbitraria, purchè la $CT(t)$ non sia minore di CK.

Terza misura.

Nell'elisse $ABED$ sia l'abscissa $CV = u$, e l'abscissa $CT = t$ in modo, che se $CV(u)$ è arbitraria, la CT sia uguale al valore di t espresso nell'equazione (33), e se $CT(t)$ è arbitraria, la CV sia eguale al valore di u espresso nell'equazione (32); si surroghi nell'equazioni (34), (35), (43), e (44) l'arco diretto BL in cambio di $du\frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}}$, e l'arco inverso ES in luogo di $-dt\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}}$, e le suddette equazioni (34), (35), (43), e (44) si cangeranno respettivamente nelle quattro infrascritte

$$\text{Arc. } ES - \text{arc. } BL = t^3\frac{\sqrt{1+t^4}}{1+t^4} + u^3\frac{\sqrt{1-u^4}}{1+u^4} \tag{49}$$

$$\text{Arc. } ES - \text{arc. } BL = ut \tag{50}$$

$$\text{Arc. } ES - \text{arc. } BL = \frac{1}{2t}\sqrt{1-t^4} - \frac{u^3}{\sqrt{1-u^4}} \tag{51}$$

$$\text{Arc. } ES - \text{arc. } BL = \frac{1}{2u}\sqrt{1-u^4} - \frac{t^3}{\sqrt{1-t^4}}. \tag{52}$$

Scolio IX. — L'equazione (32) mostra, che se la $CV(u)$ è zero, la $CT(t)$ è uguale all'unità, e quindi allorchè l'arco diretto BL è nullo, è tale anche l'arco inverso ES; in questo caso sono manifestamente nulli i secondi membri dell'equazioni (49), (50), e (51), ed è nullo anche il secondo membro dell'equazione (52), ch'equivale ad ut, come si è mostrato nel corollario VII del IV teorema; adunque le quattro equazioni (45), (50), (51), e (52) sono tutte complete.

Scolio X. — I. Introducendo nell'equazione (36) del corollario IV del problema in vece di $dt\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}}$ l'arco diretto BS corrispondente

all'abscissa $CT\ (t)$, e in cambio di $du\frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}}$ l'arco inverso EL corrispondente all'abscissa $CV\ (u)$, la detta equazione (36) diventa quest'altra

$$\text{Arc. } EL - \text{arc. } BS = tu \tag{53}$$

la quale è completa, poichè l'equazione (33) fa conoscere, che quando la $CT(t)=0$, la $CV(u)=1$, dimodochè, quando l'arco diretto BS è nullo, si annienta anche l'arco inverso EL, e in questo caso è nullo anche tu.

Or siccome si è dimostrato nel corollario II del problema, e nel corollario VII del IV teorema, che le tre espressioni seguenti

$$t^3\frac{\sqrt{1-t^4}}{1+t^4}+u^2\frac{\sqrt{1-u^4}}{1+u^4};\ \frac{1}{2t}\sqrt{1-t^4}-\frac{u^4}{\sqrt{1-u^4}};\ \frac{1}{2u}\sqrt{1-u^4}-\frac{t^3}{\sqrt{1-t^4}}$$

sono eguali ad ut, così sussistono ancora le tre equazioni, che seguono

$$\text{Arc. } EL - \text{arc. } BS = t^3\frac{\sqrt{1-t^4}}{1+t^4}+u^3\frac{\sqrt{1-u^4}}{1+u^4} \tag{54}$$

$$\text{Arc. } EL - \text{arc. } BS = \frac{1}{2t}\sqrt{1+t^4}-\frac{u^3}{\sqrt{1-u^4}} \tag{55}$$

$$\text{Arc. } EL - \text{arc. } BS = \frac{1}{2u}\sqrt{1-u^4}-\frac{t^3}{\sqrt{1-u^4}}. \tag{56}$$

le quali sono complete, come l'equazione (53).

II. Le tre ultime equazioni (54), (55), e (56) potrebbero dedursi immediatamente dall'equazioni rispettive (34), (43), e (44) con modo simile a quello, che si è tenuto per dedurre dall'equazione (35) l'equazione (36) registrata nel corollario IV del problema.

E in effetti, se nel secondo membro dell'equazione (34) in luogo di t si pone u, e in luogo di u si pone t, il medesimo secondo membro conserva la sua pristina espressione, e quantità. Se poi ne' secondi membri dell'equazioni (43), e (44) si sostituirà u in cambio di t, e t in cambio di u, si vedrà, che il secondo membro dell'equazione (43) si cangia nel secondo membro dell'equazione (44), e versa-vice il secondo membro dell'equazione (44) si muta nel secondo membro dell'equazione (43), ma non ostante questa vicendevole trasmutazione de' secondi membri del-

l'equazioni suddette (43), e (44) i medesimi secondi membri non cangiano punto di valore, poichè nel corollario VII del IV teorema sono stati essi provati eguali tra loro, essendosi ivi mostrato, che ciascuno di quelli è uguale ad ut.

Scolio XI. — I. Si noti, che in virtù del corollario III del III teorema, e del corollario III del I teorema, l'abscissa CV (u) non può essere maggiore di $\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

Si noti altresì, che pel corollario III del III teorema, e pel corollario IV del I teorema l'abscissa CT (t) non può essere minore di $\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

II. Adunque nelle quattro equazioni (53), (54), (55), e (56) l'arco *diretto*, cioè l'arco BS, che à relazione all'abscissa CT (t), principia al punto R dell'elisse determinato dall'abscissa $CK = \sqrt{\sqrt{2}-1}$, e può stendersi fino al punto E estremità del secondo asse, ma l'arco *inverso*, cioè l'arco EL, che si riferisce all'abscissa CV (u), principia al suddetto punto R, e può stendersi sino al punto B, estremità del primo asse.

III. Tutto all'opposto accade nelle quattro equazioni (49), (50), (51), e (52), nelle quali, per quanto si è notato nel primo articolo di questo scolio, l'arco *diretto*, cioè l'arco BL correlativo all'abscissa CV (u), principia al punto B, e non può stendersi oltre il mentovato punto R, e l'arco *inverso*, cioè l'arco ES correlativo all'abscissa CT (t), principia al punto E, e non può stendersi oltre il punto R.

IV. Egli è però vero, che nell'equazioni (53), (54), (55), e (56) togliendo dall'arco *inverso* EL, e dall'arco *diretto* BS l'arco intermedio LS, ch'è comune ad ambedue, le quattro suddette equazioni si riducono all'equazioni (49), (50), (51), e (52).

Fig. I.
2.
3.
4.
5
6
7.
8.
9.
10.
11.

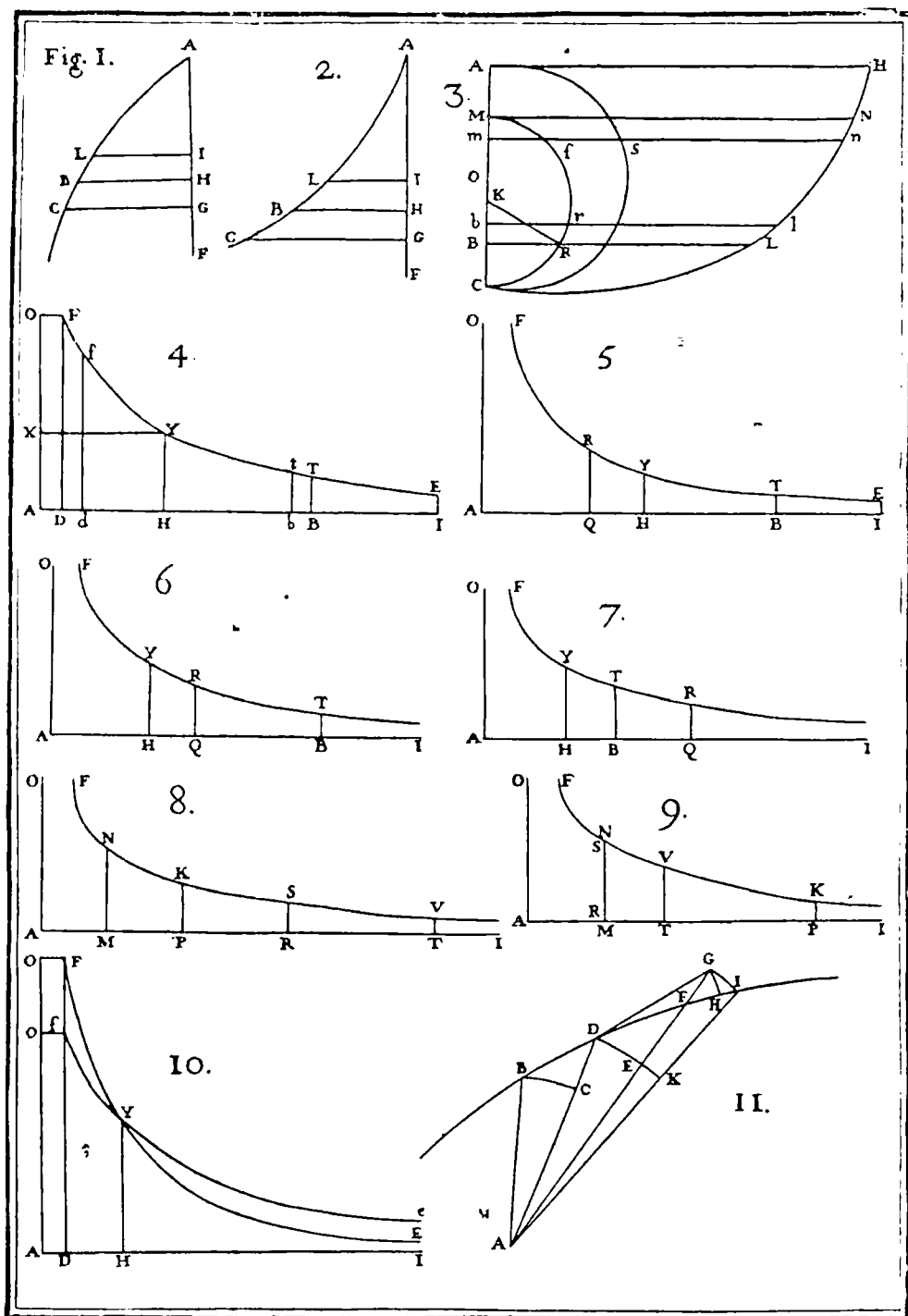
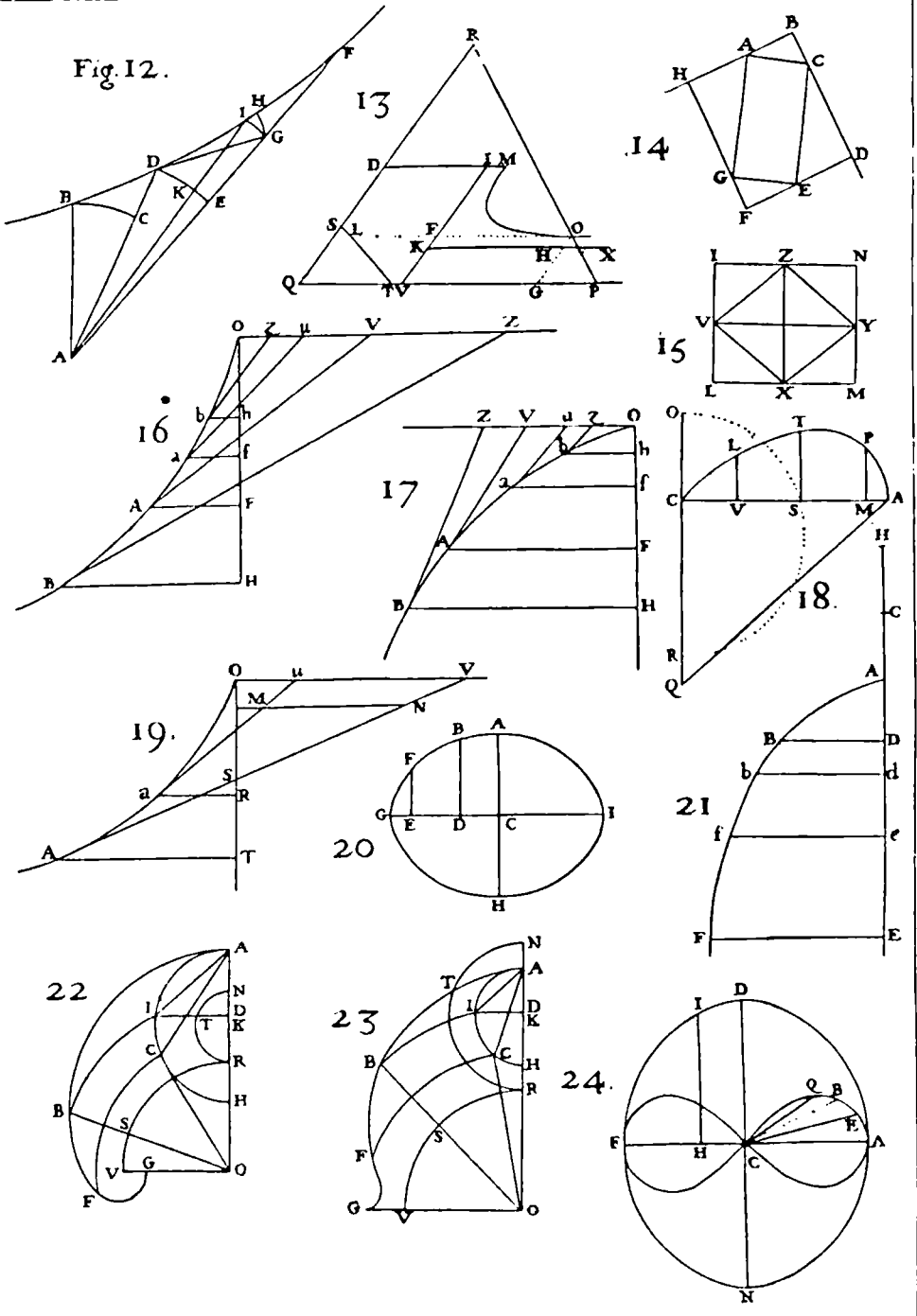
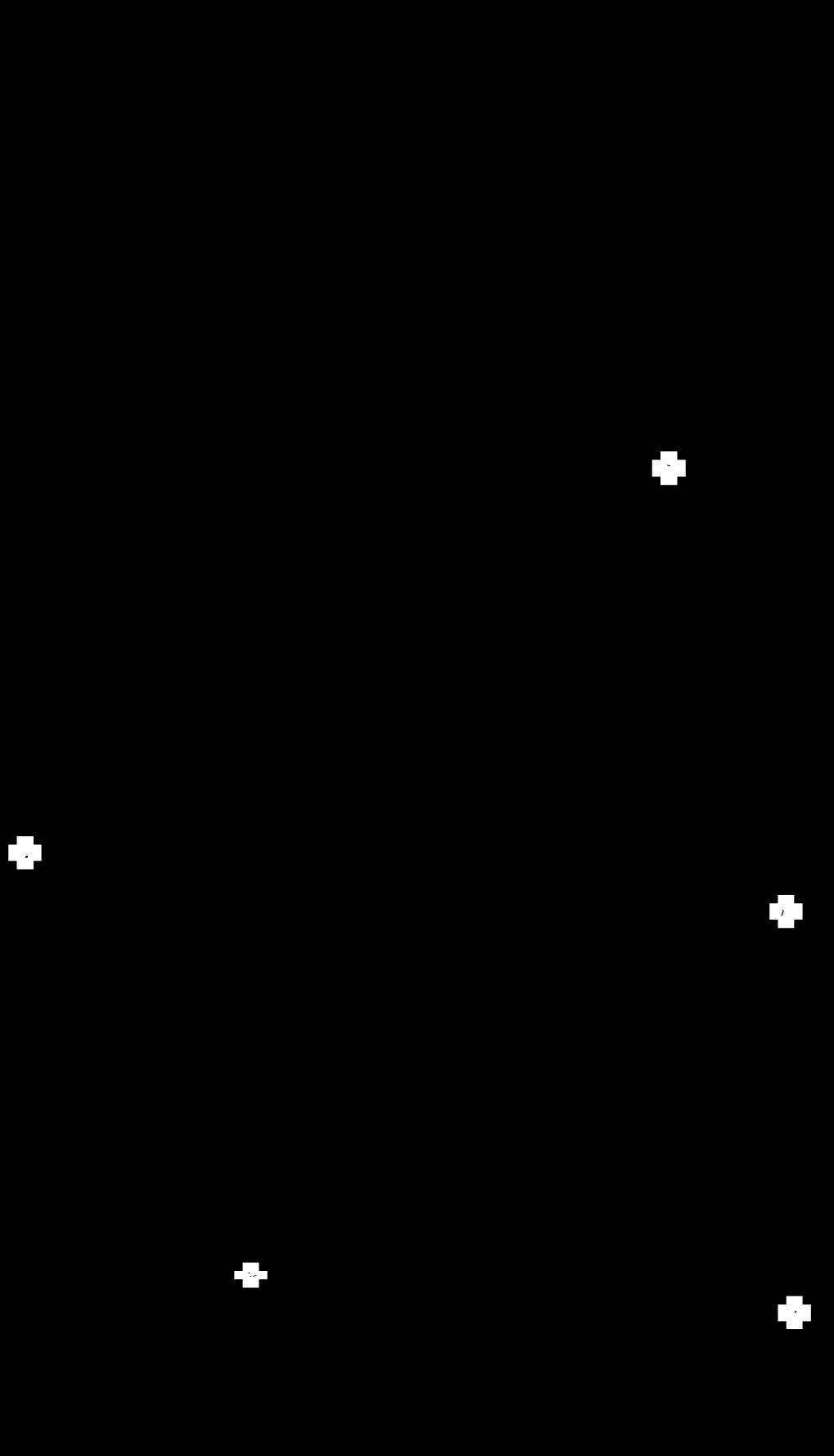
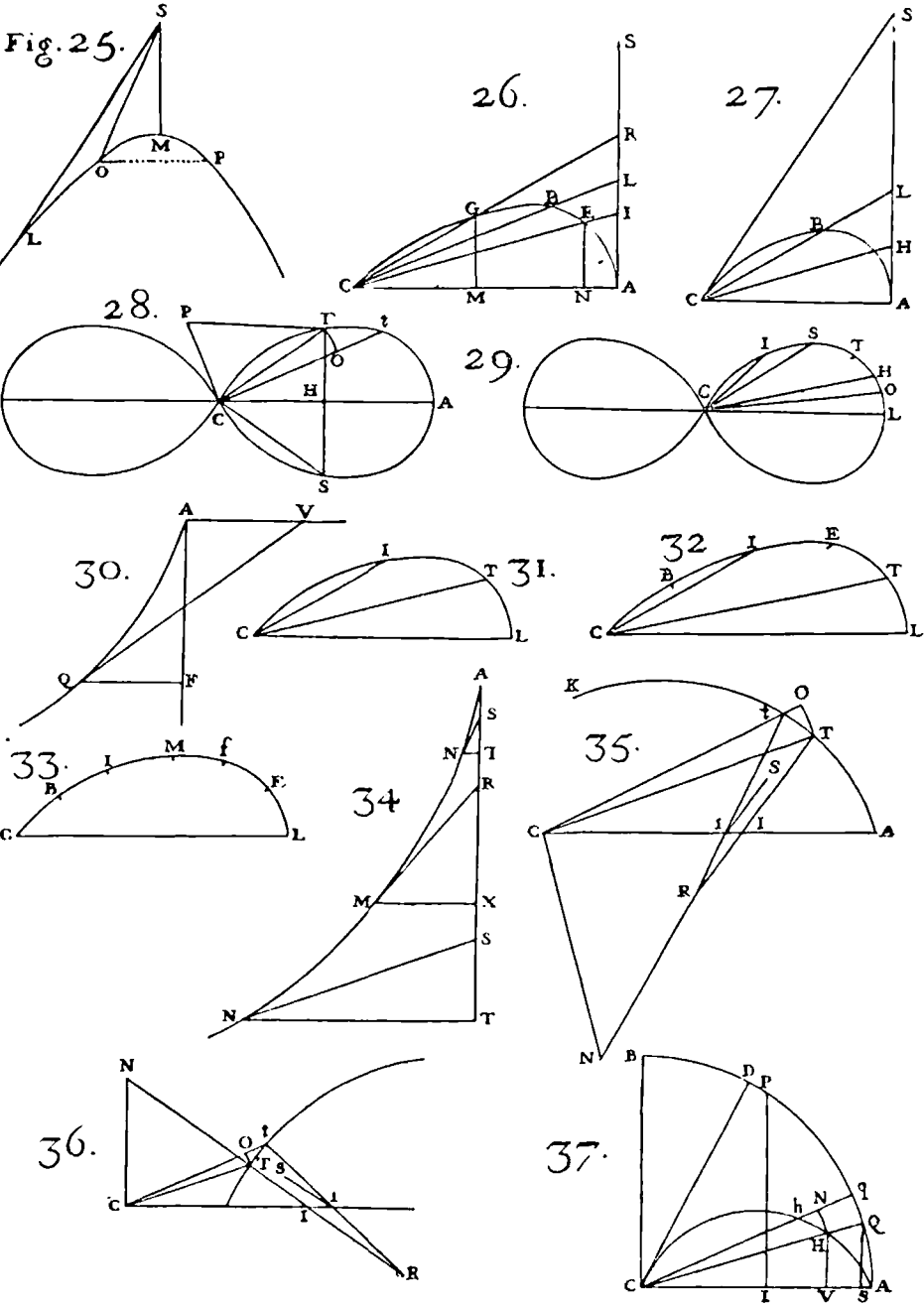
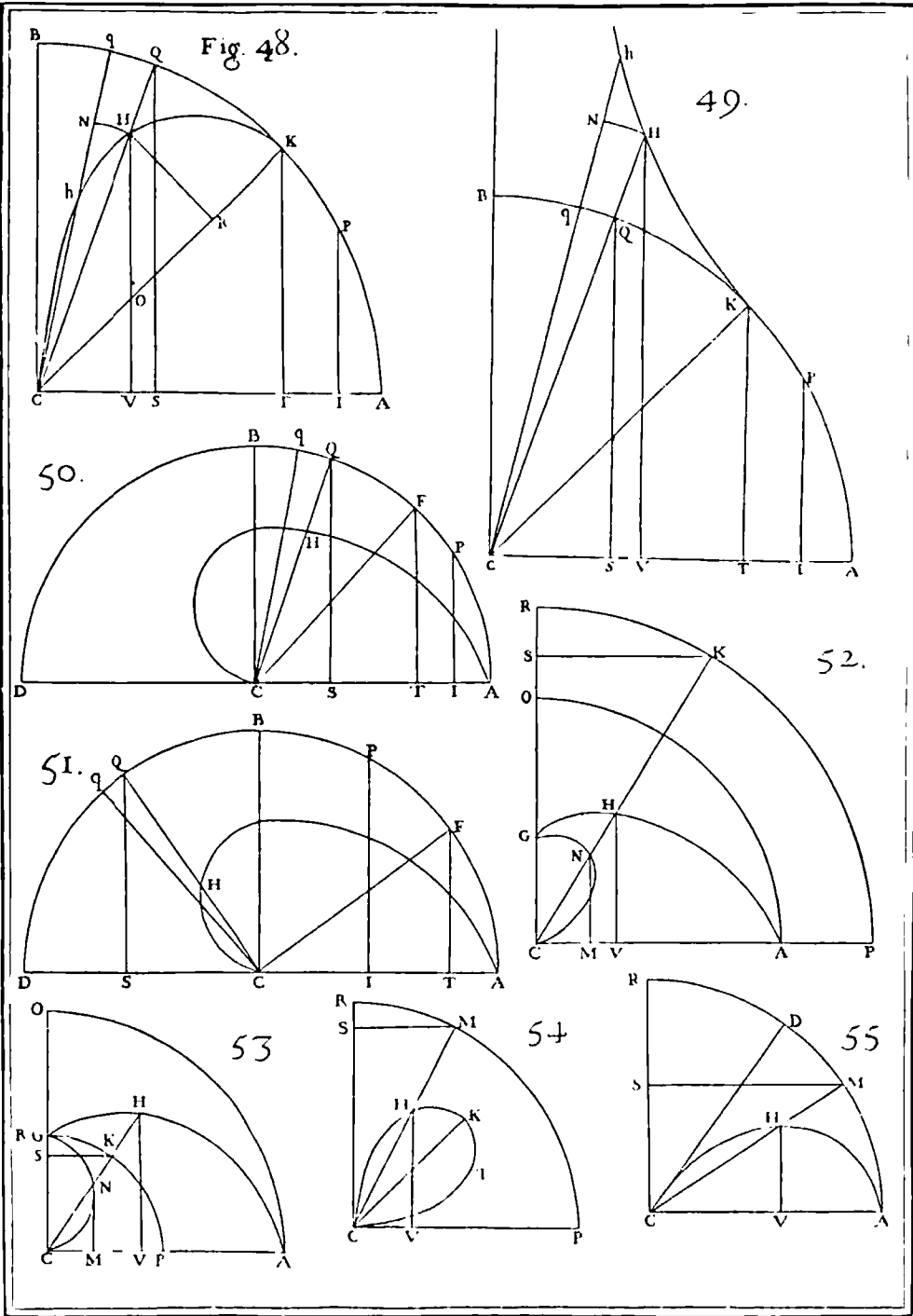
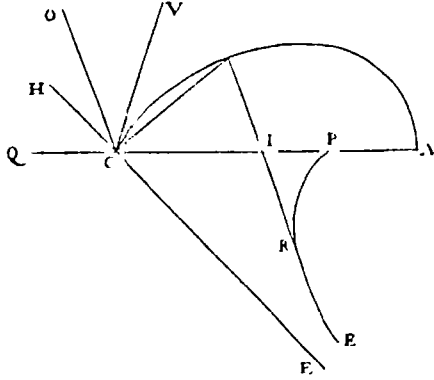
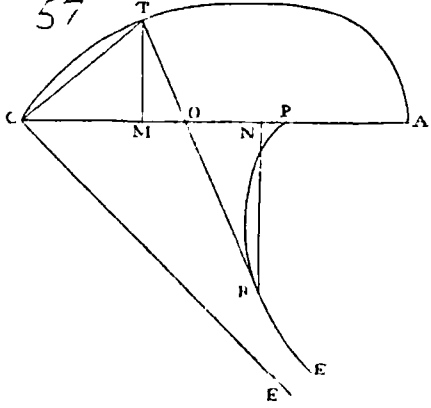
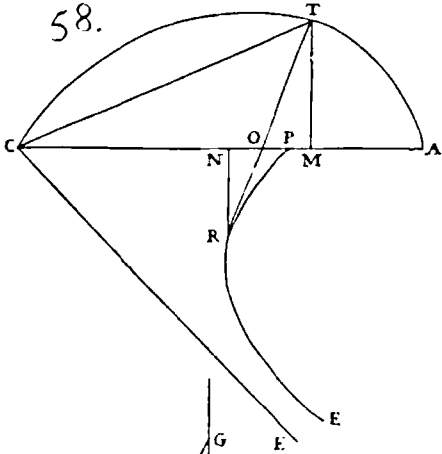
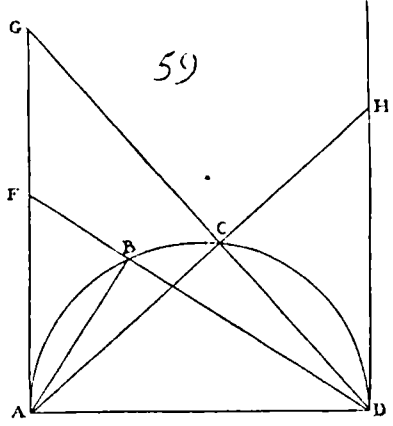
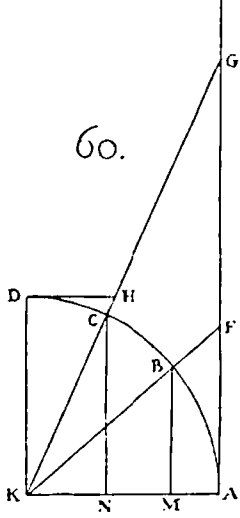
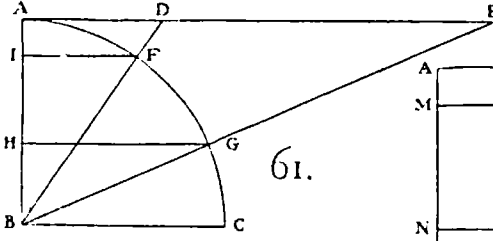
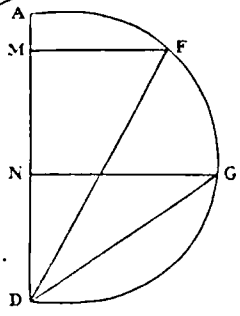
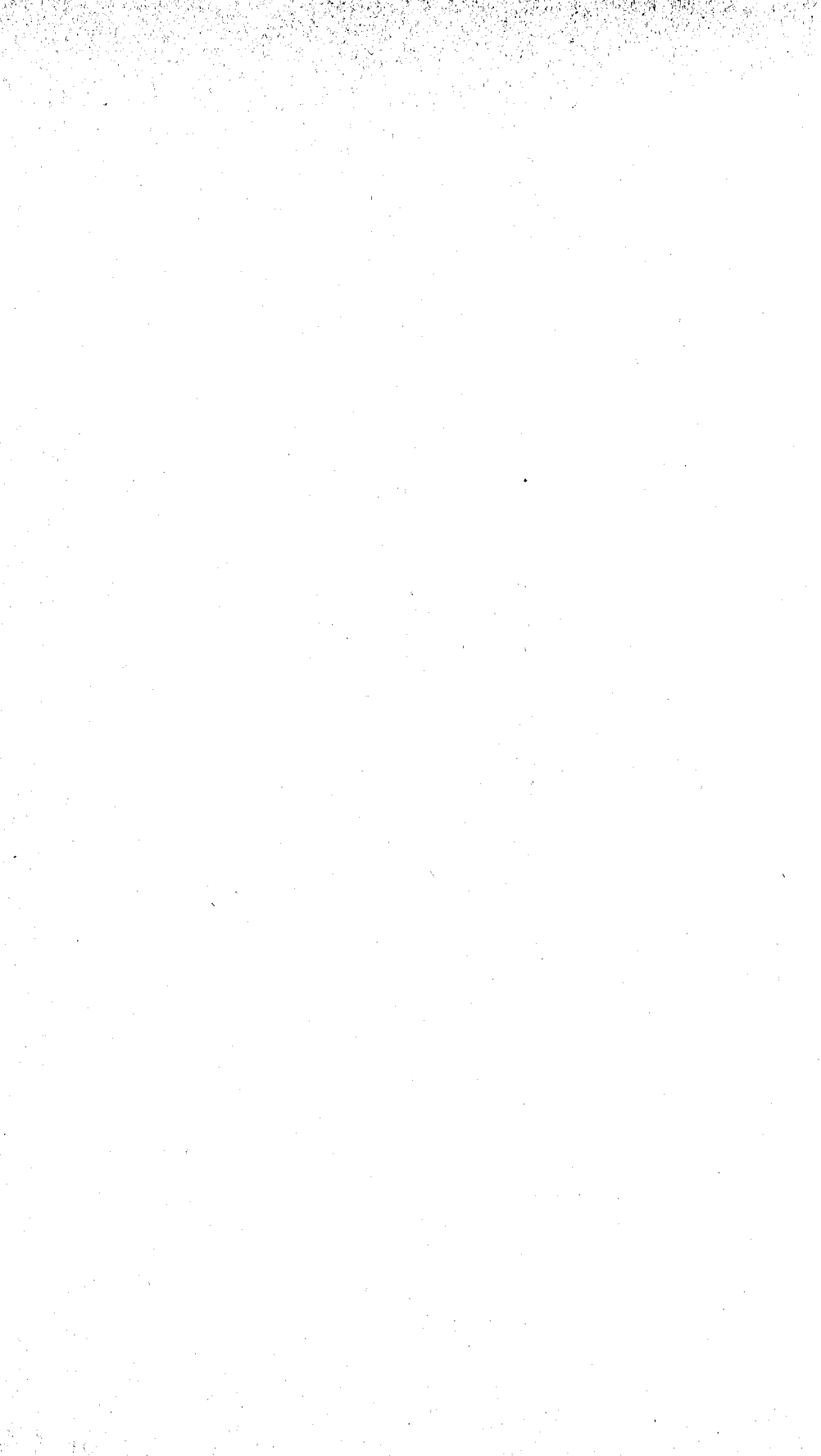
Fig. 12.
13
14
15
16
17
18.
19.
20
21
22
23
24.

Fig. 25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32
33.
34
35.
36.
37.

Fig. 38.
39
40
41.
42
43
44
45
46
47

Fig. 48.
49.
50.
51.
52.
53
54
55

Fig. 56
57
58.
59
60.
61.
62.

Fig. 63
A
X
P
Q
C
F
G
D
Y
I
65.
O
V
S
T
R
L
N
64.
O
K
M
H
66.
B
I
Z
E
K
V
A
D

NOTE.

Pag. 8. — Giova rilevare come la « nuova, e bellissima proprietà » contenuta ne Corollario II rientri in una nota proprietà di ogni triangolo rettilineo. Infatti la relazione esposta in quel Corollario, quando si tenga conto dei segni, si scrive come segue:

$$\frac{RC}{RP} + \frac{AC}{AO} + \frac{BC}{BD} = 2\left\{\frac{CP}{RP} + \frac{CO}{AO} + \frac{CD}{BD}\right\};$$

ora $RC = RP - CP$, $AC = AO - CO$, $BC = BD - CD$, onde essa diviene

$$\frac{CP}{RP} + \frac{CO}{AO} + \frac{CD}{BD} = 1,$$

o anche

$$tr.\ CAB + tr.\ CBR + tr.\ CRA = tr.\ ABR,$$

relazione valida qualunque sia la disposizione de' punti considerati, purchè si tenga il debito conto dei segni delle aree.

Pag. 24. — SCHOOTEN, *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico* (Francfurti, MDCXCV).

Pag. 26. — Qui ed altrove il Fagnano allude ai *Commentaria in Euclidis Elementa geometriae* inserite nel T. I di CHR. CLAVII, *Opera mathematica* (Moguntiae, MDCXII).

Pag. 27 — Nella equazione (43) il lettore ravviserà tosto il celebre teorema di G. Ceva; benchè reso di pubblica ragione assai prima della pubblicazione delle *Produzioni Matematiche* (giacchè l'opuscolo *De lineis rectis se invicem secantibus, statica, constructio* fu edito a Milano nel 1678), pure tutto fa credere che il nostro Autore vi sia giunto per proprio conto.

Pag. 33. — La proposizione citata nel COR. IV (« In ogni parallelogramma la somma dei quadrati delle diagonali è eguale alla somma dei quadrati dei lati ») si legge nella nota del DE LAGNY, *Sur une proposition de géométrie élémentaire* (*Histoire de l'Académie Royale des sciences*, année MDCCCVI, Paris, 1707).

Pag. 36. — Il THEOREMA X non differisce da quello che di consueto si chiama teorema di Stewart (v. M. STEWART, *Some general Theorems of considerable use in the higher parts of Mathematics;* Edinburgh, 1746); non v'ha dubbio che il Fagnano vi sia giunto da sè, dal momento che l'opera del citato geometra inglese rimase pressochè ignota sul continente prima che M. CHASLES vi richiamasse nel 1837 (col suo *Aperçu historique*) l'attenzione dei matematici.

Pag. 42. — Per quanto ingegnosa sia la dimostrazione del TEOREMA esposto nella indicata pagina, pure è naturale pensare all'esistenza di un ragionamento equivalente, ma indipendente da considerazioni infinitesimali: a tal condizione soddisfa il seguente: Si chiamino α, β gli angoli in A, B del triangolo ABD, d la lunghezza della bisettrice AO, r il raggio del cerchio circoscritto al dato triangolo, finalmente ω la comune ampiezza degli angoli VAO, NAO; dal triangolo AOV si trae

$$AV = d \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2} + \beta - \omega\right)};$$

d'altronde, AN è una corda di cui si calcola agevolmente la lunghezza e si trova

$$AN = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2} + \beta - \omega\right);$$

onde

$$AV.AN = dr \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right),$$

Quest'ultima espressione è evidentemente uguale a $AB.AD$.

Pag. 50. — Richiamiamo l'attenzione del lettore sopra il TEOREMA XVI, il quale dà un enunciato elegantissimo (e che riteniamo originale) della soluzione del problema: condurre per un punto posto nel piano di un angolo una trasversale tale che risulti minimo il segmento di essa intercetto fra i lati dell'angolo.

Pag. 55. — Anche il TEOREMA XVIII si può stabilire senza ricorrere ai « principii dell'interiore geometria » come segue: Siccome tutti i triangoli BAR hanno la stessa altezza $AH = h$, così il minimo della base BR corrisponde al minimo dell'area S di quei triangoli. Ora, detto α l'angolo dato BAR e ω l'angolo BAH, si trova agevolmente

$$S = \frac{h^2 \operatorname{sen} \alpha}{2 \cos \omega \,.\, \cos(\alpha - \omega)},$$

ovvero

$$S = \frac{h^2 \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + \cos(2\omega - \alpha)}.$$

Tale relazione prova che il minimo di S corrisponde al massimo di $\cos(2\omega - \alpha)$, cioè ad $\omega = \frac{\alpha}{2}$; in questa ipotesi il triangolo ABR è tale che la bisettrice dell'angolo in A coincide con la relativa altezza, onde è isoscele *c.d.d.*

Pag. 62. — Anche il TEOREMA XX si può fare rientrare nell'ambito della geometria elementare ragionando come segue: Si considerino tutti i parallelogrammi $AXZY$ con i vertici X, Z, Y, risp. sopra i lati AC, CB, BA del triangolo ABC; posto $AX = x$, $AY = y$ e chiamando s l'area del dato triangolo e u quella del parallelogrammo $AXZY$ si ha subito $\frac{u}{2s} = \frac{xy}{bc}$, ovvero, se si pone $\frac{x}{b} = \xi$ e $\frac{y}{c} = \eta$, $u = 2s\xi\eta$. Ma è facile vedere che $\xi + \eta = 1$. Ora, dal momento che la somma è costante, il massimo del prodotto $\xi\eta$ corrisponde all'ipotesi $\xi = \eta$, onde il massimo cercato si ha per $\xi = \eta = \frac{1}{2}$, cioè per $x = \frac{1}{2} a$, $y = \frac{1}{2} b$, conformemente all'enunciato.

Pag. 74. — Per chi non trovasse abbastanza stringente la dimostrazione del TEOREMA XXIII, aggiungiamo le seguenti osservazioni.

Si chiami f una funzione simmetrica di due variabili e $f_1 = f_2$ le sue due prime derivate parziali.

a) Del triangolo ABC si suppongano costanti la base $BC = a$ e l'angolo opposto A; allora gli altri due lati sono espressi come segue:

$$a\,\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A},\quad a\,\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = a\,\frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen} A}.$$

In conseguenza le quantità di cui si vogliono determinare i valori estremi sono del tipo

$$u = f\left(a\,\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A},\ a\,\frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen} A}\right).$$

I valori corrispondenti di B sono quelli che annullano

$$\frac{du}{dB} = a\,\frac{\cos B}{\operatorname{sen} A} f_1\left(a\,\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A},\ a\,\frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen} A}\right) + a\,\frac{\cos(A+B)}{\operatorname{sen} A} f_2\left(a\,\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A},\ a\,\frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen} A}\right).$$

Ma per ipotesi $f_1 = f_2$ onde i valori cercati corrispondono a

$$\cos B + \cos(A+B) = 0$$

cioè $\cos B = \cos C$, ovvero $B = C$, conformemente all'enunciato.

b) Nello stesso triangolo si supponga costante la base e la corrispondente altezza h; sarà

$$b = \frac{h}{\operatorname{sen} C},\quad c = \frac{h}{\operatorname{sen} B}$$

$$(*) \qquad a = h\,(\cos B + \cos C).$$

Si tratta, quindi, di determinare i valori estremi della funzione

$$u = f\left(\frac{h}{\operatorname{sen} B},\ \frac{h}{\operatorname{sen} C}\right),$$

gli angoli B e C essendo fra loro legati dalla relazione (*). Applicando il procedimento consueto e tenendo conto dell'essere $f_1 = f_2$ si trova $\cos B = \cos C$, onde $B = C$, ecc.

Pag. 101. — Il TEOREMA XXXI non è sostanzialmente nuovo, perchè si trasforma agevolmente in quella ampia estensione del teorema di Pitagora che PAPPO ha scoperto (*Collect. mathem.* Lib. IV, Prop. I, *Pappo ed. Hultsch*, Berlino, 1878-79, pagine 176-177) e di cui CHASLES ha avvertita (*Aperçu historique*, II éd., Paris, 1875, pag. 545) l'identità col teorema di Varignon.

Pag. 122. — J. HERMANN, *Disquisitio dioptrica de curvatura radiorum visivorum atmosphaera traijcentium, cui accedit indefinita sectio angularis ope tangentium et secantium* (*Acta Eruditorum*, MDCCCVI, pag. 256-263).

JOH. BERNOULLI, *Theorema novum habens utilitatem in dividendis multiplicandisque angulis, nec non in condendis tabulis sinuum, tangentium & secantium.* (*Acta Erud.*, MDCCXXII, pag. 361; oppure JOH. BERNOULLI, *Opera*, T. II, pag. 526-535).

Pag. 142. — Malgrado la forma insolita ed un po' oscura adottata dal nostro autore, con un po' d'attenzione si riconosce che il TEOREMA LXI concerne il celebre

problema di determinare nel piano di un triangolo rettilineo un punto per cui sia minima la somma delle distanze dai vertici. Chi desidera conoscere l'origine e la storia di tale questione ricorra all'esordio della nota di G. LORIA, *Généralisation d'un problème de minimum classique* (*Mathésis*, 2e Sér., T. IX, 1899, pag. 131 e segg.).

Pag. 163. — Le opere ricordate dal nostro autore sono:
Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problèmes tant déterminez qu'indéterminez. Ouvrage posthume de M. le Marquis DE L'HÔPITAL (Venise, MDCCXL) pag. 253-254.
Traité de la construction des equations pour la solution des problèmes déterminez par M. OZANAM (Paris, MDCLXXXVII) pag. 31, 35, 38, 52.

Pag. 177. — Il LEMMA I è un'immediata conseguenza del teorema di Lagny ricordato dal Fagnano a pag. 33.

Pag. 197. — Il metodo ideato da Filone per inserire due medie proporzionali fra due date rette ci è pervenuto per il tramite di Eutocio, il quale ne parla nel ben noto suo commento al II dei Libri di Archimede *Sopra la sfera ed il cilindro* (v. *Archimede ed. Heiberg*, T. III, Lipsiae 1881, pag. 72-74).

Pag. 205. — La memoria di VARIGNON porta il titolo *Refléxions sur les espaces plus qu'infinis de M. Wallis* (*Histoire de l'Académie de sciences*, année MDCCVI, Paris 1707), pag. 13-19.

Pag. 242. — Le memorie ricordate di VARIGNON portano i titoli seguenti:
Autre règle générale des forces centrales, avec une manière d'en déduire et d'en trouver une infinité d'autres à la fois dépendemment et indépendemment des rayons osculateurs qu'on va trouver aussi d'une manière infiniment générale (*Histoire de l'Académie des sciences*, année MDCCI, pag. 20-40).
Des forces centrales avec les pésanteurs absolues des corps mûs de vitesses variées à discrétion le long de telles courbes que l'on voudra (*Id.*, année MDCCVI, pag. 178-235).

Pag. 252. — Altre soluzioni del famoso problema proposto da BROOK TAYLOR a tutti i matematici continentali si debbono a JOH. BERNOULLI *Opera omnia* (T. II, Lausannae et Genevae, MDCCXLII, pag. 402-422) e G. MANFREDI, *Supplemento al Giornale de' letterati d'Italia* (T. II, 1722, pag. 241-269).

Pag. 265. — La memoria del VARIGNON su cui riposa l'argomentazione del Fagnano è la seguente: *De la resistence des solides en général pour tout ce qu'on peut faire d'hypothèses touchant la force et la tenacité des corps à rompre; en particulier sur les hypothèses de Galilée et de M. Mariotte* (*Histoire de l'Académie des sciences*, année MDCCII, pag. 66-93).

Pag. 271-272. — Le frasi ricordate si leggono a pag. 252 delle *Opere complete* di GIOVANNI BERNOULLI (Lausannae et Genevae, MDCCXLII) come chiusa della memoria *Theorema universale rectificationi linearum curvarum inserviens. Nova parabolarum proprietas. Cubicalis primariae arcuum mensura*, etc.

Pag. 285. — La frase di Cartesio a cui fa allusione il Fagnano è probabilmente quella con cui apresi il III libro della *Géométrie*, cioè la seguente: « Encore que toutes les lignes courbes qui peuvent être décrites par quelques mouvement régulier doivent être réçues en la géométrie, ce n'est pas à dire qu'il soit permis de se servir indifféremment de la première qui se rencontre pour la construction de chaque problème, mais il faut avoir soin de choisir toujours la plus simple par laquelle il soit

possible de le résoudre ». Del resto, qui il grande pensatore francese non faceva che ripetere precetti appresi dagli antichi geometri greci.

Pag. 290. — La memoria del NICOLE sfruttata dal nostro ha per titolo: *Méthode générale pour rectifier toutes les roulettes à bases droites ou circulaires* (*Histoire de l'Académie des sciences*, année MDCCVIII, pag. 86-88).

Pag. 303. — Gli scritti qui menzionati sono i seguenti:

G. G. L.(EIBNIZ), *De solutionibus problematis catenarii vel funicularis in Actis Junii A. 1691 aliisque a Dn. J. B. propositi* (v. LEIBNIZ, *Mathematische Scrhiften*, ed. Gerhardt, 2e Abth., T. I, Halle a. S., 1858, pag. 255-27).

Jac. B.(ERNOULLI), *Constructio curvae accessus et recessu aequabilis, ope rectificationis curvae cuiusdam algebraicae, addenda nuperae solutionis mense Junii; Explicationes, annotationes et additiones ad ea, quae in Actis sup. anni de curva elastica, isochrona paracentrica, et velaria, hinc inde memorata, et partim controversa leguntur; ubi de linea mediarum directionum, aliisque novus.*

Nova et singularis geometriae promotio circa dimensionem quantitatum curvarum per D. T.(SCHIRNHAUSEN).

Pag. 304. — La memoria n. XXXIV ha un valore eccezionale, essendo stata il germe della teoria delle funzioni ellittiche e stimolo alla creazione di questa importante disciplina. Chi desidera formarsi un concetto della importanza sua, in sè e per l'influenza che esercitò, ricorra alla dotta e profonda memoria di F. SIACCI, *Sul teorema del Conte di Fagnano* (*Bull. di bibl. e storia delle scienze matematiche e fisiche*, T. III, 1870, pag. 1-26); si potrà anche consultare il primo dei *Due scritti inediti* del prof. GEMINIANO RICCARDI (Id. T. VIII, 1875, pag. 40-42). A chi poi ritenesse che le ricerche del FAGNANO sopra la misura ed il paragone degli archi ellittici non posseggano, ormai più che un valore storico, si può rispondere citando la recente memoria di P. J. HARDING, *Elliptic Trammels and Fagnano Points* (*The mathematical Gazette*, May and Juni 1911), avente per iscopo di dimostrare le principali proposizioni stabilite dal geometra Nostro col solo sussidio della geometria elementare.

Pag. 307. — Fagnano si riferisce qui alle seguenti memorie:

JOH. BERNOULLI, *Animadversio in precedentem solutionem Illustris D. Marchionis. Hospitalii* (cfr. JOH. BERNOULLI, *Opera omnia*, T. I, pag. 132).

G. G. L.(EIBNIZ). *Notatiuncula ad constructiones lineae in qua sacoma, aequilibrium cum ponere moto faciens incedere debet, Februario proximo datas. Et quaedam de quadra turis.* (cfr. LEIBNIZ, *Mathem. Schriften*, 2e Abth. I Bd., Halle a. S., 1858, pag. 313)

Pag. 311. — Il passo ricordato dell'opera del marchese DE L'HÔPITAL trovasi a pag. 292 della succitata edizione veneta.

Pag. 318-363. — Memorie XXXVI-XLIII. Delle curve ivi diffusamente studiate è agevole trovare l'equazione generale in termini finiti quando si usino, invece delle coordinate cartesiane, le coordinate polari ρ, ω. Detta infatti k « la ragione data di numero a numero » e μ l'angolo della tangente col raggiove ttore, la semplice considerazione della figura dà la relazione $k\omega = \omega + \frac{\pi}{2} = \mu$ ossia $(k-1)\omega = \frac{\pi}{2} - \mu$, onde $\cot (k-1)\omega = tg\, \mu$.

Ma è noto che $tg\, \mu = \rho : \frac{d\rho}{d\omega}$, quindi $\frac{d\rho}{\rho} = tg\, (k-1)\,\omega . d\omega$; e integrando

$$\rho^{1-k} = c^{1-k} \cos (1-k)\,\omega \quad (*) \tag{1}$$

(*) La (1) può ridursi alla forma $\rho^{1-k} = c^{1-k}\, \text{sen}\, (1-k)\,\omega$.

Questa equazione mostra che le curve di Fagnano altro non sono che *spirali sinusoidi.*

Giova aggiungere qualche altra osservazione per mostrare come il nostro Autore abbia avuto idee estremamente confuse intorno alla forma di tali curve (cfr. G. LORIA, *Topologia delle curve di Lamé e delle spirali sinusoidi algebriche; Atti dell'Accademia Pontaniana*, 1909), il che non deve stupire chi ricordi come la topologia delle linee rappresentate da equazioni un po' complicate sia stato un campo, in cui non si è riusciti a penetrare, che moltissimi anni dopo Cartesio.

Pag. 329. — Le curve considerate, in coordinate polari hanno per equazioni

$$\rho^4 = a^4 \operatorname{sen} 4\omega, \quad \rho^4 \operatorname{sen} 4\omega = a^4$$

che è facile ridurre alla forma (1); Fagnano non osserva che soltanto la seconda si estende all'infinito.

Pag. 342, 347. — Sotto il nome di *cicloide primaria* il Fagnano, seguendo l'esempio dato dall'OZANAM nel suo *Dictionnaire mathématique* (Amsterdam, 1691), designa la curva oggi chiamata *cardioide;* che essa rientri nella classe di curve considerate si vede osservando che, in coordinate polari, si puo rappresentare con una equazione della forma $\rho = \frac{l}{2} + \frac{l}{2} \cos \omega$ e che questa equivale a $\rho^{\frac{1}{2}} = l^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\omega}{2}$.

Il lettore a cui è noto l'aspetto della cardioide non potrà certamente convenire col Fagnano quando egli intende di rappresentarne un quadrante con le Figure 50 e 51.

Pag. 344. — Passando a coordinate polari l'equazione $2a^2 xy = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ diviene $\rho^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\omega$; essa rappresenta una curva composta di *quattro* foglie aventi per assi di simmetria le bisettrici degli angoli degli assi; la Fig. 48 non contiene, quindi, che l'ottava parte dell'intiera curva.

Pag. 346. — Trasformando similmente l'equazione $y^3x - x^3y = \frac{(x^2+y^2)^4}{4a^4}$ si ottiene $\rho^4 = -2a^4 \operatorname{sen} 4\omega$; la curva rappresentata comprende *otto* foglie, onde non ha, come crede il Fagnano, la stessa forma indicata dalla Fig. 48.

Così si vede che la Fig. 49 dà soltanto una piccola parte della curva

$$y^3x - x^3y = \frac{a^4}{4} \quad \text{cioè} \quad a^4 = -2\rho^4 \operatorname{sen} 4\omega$$

la quale si estende all'infinito.

Pag. 320. — Si tratta della già citata memoria di VARIGNON, *Autre règle des forces centrales*, etc.

Pag. 369. Si allude qui all'estratto della memoria di A. DE MOIVRE inserita nelle *Philosophical Transactions for the Year 1707*, pubblicato con titolo *Aequationem quarundam potestatis tertiae, quintae, septimae, nonae & superiorum ad infinitum usque pergendo in termini finitis, ad instar regularum pro cubicis, quae vocantur Cardani.*

Pag. 375, 377. — JOH. BERNOULLI, *Angulorum arcuumque sectio indefinita per formulam universalem expressa sine serierum auxilio: & hinc deducta aequationum angularium prompta formatio* (cfr. JOH. BERNOULLI, *Opera omnia*, T. I, pag. 511-514).

Pag. 377. — DE LAGNY, *Supplément de trigonométrie, contenant deux théorèmes généraux sur les tangentes et les sécantes des arcs multiples* (*Histoire de l'Académie des sciences*, année MDCCV, pag. 254-263).

JOH. BERNOULLI, *Theorema novum habens utilitatem in dividendis multiplicandisque angulis, nec non in condendis tabulis sinuum, tangentium & secantium* (cfr. JOH. BERNOULLI, *Opera omnia*, T. II, pag. 526–535).

Pag. 380, 384. — Memorie XLVI-XLVII. Riguardo a questi contributi dati da Fagnano ai metodi di risoluzione delle equazioni letterali si può ripetere quanto si osservò nelle *Note* al T. I (pag. 474): essi rimasero ignoti ai cultori ed agli storici di tale teoria.

Pag. 381. — Nel primo membro dell'equazione che segue la (3), invece di r si legga $4r$; ciò non infirma i risultati stabiliti poi, perchè nelle applicazioni si è sempre supposto $r = 0$.

Pag. 407. — JOH. BERNOULLI, *Continuatio schediasmatis de angulorum arcuumque sectione indefinita* (*Opera*, T. I, pag. 514).

Pag. 427, 432. — La rettificazione della logaritmica risale ad epoca anteriore a Fagnano, giacchè si legge in due importanti lettere dirette dal marchese De l'Hôpital a C. Huygens il 26 luglio ed il 10 settembre 1692 (cfr. *Oeuvres complètes de* C. HUYENS, *T. X*, La Haye, 1905, pag. 305 e 307).

(G. L.)

Prezzo dell'Opera completa in tre volumi

Lire Quaranta